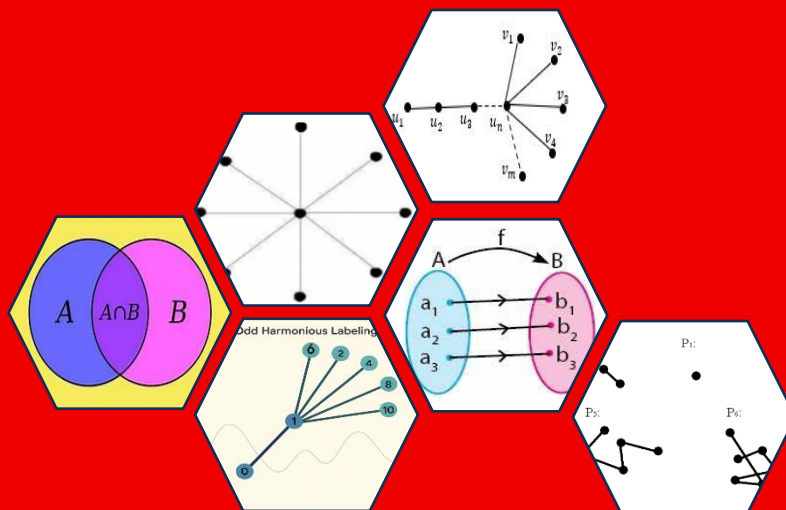


PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF SAPU



A. MUNAWWARAH

H011211002



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2025

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF SAPU

A. MUNAWWARAH

H011211002



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2025**

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF SAPU

A. MUNAWWARAH

H011211002

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program studi Matematika

Pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2025

SKRIPSI
PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF SAPU

A. MUNAWWARAH

H011211002

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Matematika pada 3 Oktober 2025
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:
Pembimbing tugas akhir,


Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si
NIP. 197008072000031002

Mengetahui:
Ketua Program Studi,


Dr. Firman, S.Si., M.Si
NIP. 196804292002121001

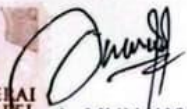
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Graf Sapu" adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. Karya ilmiah ini belum diajukan dan sedang tidak diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 3 Oktober 2025




A. MUNAWWARAH
NIM H011211002

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur saya panjatkan kepada Allah SWT. yang telah menuntun langkah penulis dari awal hingga kata terakhir tertulis. Perjalanan skripsi ini penulis ibaratkan seperti menapaki jalan panjang, terkadang terang dan terkadang juga mendung, namun selalu ada cahaya-Nya yang menuntun. Setiap lelah, setiap ragu, selalu dijawab-Nya dengan cara yang tidak pernah penulis sangka. Berkat segala nikmat dan pertolongan-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu”**. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Keberhasilan penulis sampai pada tahap penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan *support* dari berbagai pihak secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, pada kesempatan ini perkenankan penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus kepada:

1. **Ayah dan Ibu tersayang**, terima kasih atas segala doa yang menjadi pelita dalam menuntun penulis saat jalan terasa gelap. Atas segala kasih yang menjadi alasan penulis untuk terus melangkah. Atas segala pengharapan yang menjadi pengingat penulis saat lalai. Atas segala nasihat yang selalu mengiringi langkah penulis. Atas segala pelukan hangat yang begitu nyaman untuk penulis seorang. Atas segala hal baik yang menghampiri penulis.
2. Kepada saudara dan saudari tercinta, **Ainun dan Aidin** terima kasih atas dukungan dan doanya.
3. **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing akademik penulis yang telah sabar membimbing dan menuntun penulis. Terima kasih telah mengajarkan arti kelapangan dan kesabaran bagi penulis. Terima kasih atas segala pelajaran berharga akan kehidupan bagi penulis.
4. **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.**, selaku penguji pertama yang telah meluangkan waktu dan pemikirannya dalam memberikan masukan yang membangun. Terima kasih atas segala kemudahan yang diberikan.
5. **Nur Rohmah Oktaviani, P.Si., M.Si.**, selaku penguji kedua yang telah meluangkan waktu dalam memberikan masukan dan kritikan yang membangun demi penyempurnaan tugas akhir ini. Terima kasih atas segala pengajaran berharga.
6. Segenap jajaran **Dosen Pengajar dan Staf Departemen Matematika**, terima kasih atas segala ilmu, bantuan, serta bimbingan yang telah diberikan kepada penulis selama mengukir kisah di Fisika.
7. **Tante Tima**, terima kasih atas segala uluran tangan dan nasihatnya yang selalu menemani hari-hari penulis selama di Fisika. Terima kasih karena telah menjadi *rumah* kedua bagi penulis.
8. Kakak sepupu saya, **Nur Aliefia, Nurbeti**, terima kasih atas segala bantuan dan uluran tangannya kepada penulis.
9. **YBM BriLian**, terima kasih atas segala dedikasi, dorongan, dan nasihat yang tidak pernah terlewatkan untuk penulis. Terima kasih atas segala wadah tempat bertumbuh yang telah diberikan untuk penulis. Terima kasih karena mau menjadi takdir penulis dalam mengukir kisah semasa kuliah. Terima kasih atas segala pemberian tanpa pamrihnya.

10. **Blackpink; Yeyet, Puput, Mita**, terima kasih atas kebersamaannya dari awal perkuliahan hingga sekarang, terima kasih telah banyak membantu penulis selama di bangku kuliah.
11. **Matematika 21**, terima kasih kepada teman-teman seangkatan yang selalu siap siaga membantu ketika saya butuh, terkhusus **Usmaria** terima kasih atas uluran tangannya.
12. **Kak Riska dan kak Una**, terima kasih telah menjadi panutan bagi penulis, terima kasih atas nasihat dan pelajaran yang telah diberikan kepada penulis, terima kasih telah menjadi orang tua kedua bagi penulis.
13. Sahabat-sahabat saya, **Nuryola, Nayla, Rahmah**. Terima kasih telah menemani dan selalu ada ketika penulis butuh, terima kasih telah menjadi pendengar yang baik untuk penulis.
14. **Bidadari Bright; Sara, Nayla, Hawsah, Maul, Mudrika, Fitri, Ira, Aul, Selvi, Eka, Dea, Lutfiyah, Nio, Uni, Wiwi, Sariana, Syahida**. Terima kasih atas segala nasihat yang tidak pernah berhenti. Atas segala pengingat yang selalu terwanti-wanti. Atas segala bantuan yang selalu menghingapi. Atas segala dedikasi, motivasi, arahan, hiburan dan masih banyak lagi yang telah diberikan pada lembar kisah penulis. Terima kasih telah menjadi saudara *non-biologis* terbaik bagi penulis. Dan Terima kasih telah menjadi rumah ketiga, tempat penulis menuangkan keluh kesah yang terlewat.
15. **Saudara Bright Scholarship Batch 7**, terima kasih atas segala uluran tangan dan canda tawa dan menjadi teman sejati penulis selama berada di Bright. Terima kasih atas segala solidaritas tanpa batasnya. Sehat selalu buat orang-orang sholeh.

Semoga setiap kebaikan yang telah tercurahkan dalam proses ini kembali kepada Sang pengirimnya dengan berlipat ganda. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Namun, inilah hasil maksimal yang dapat diberikan oleh penulis pada penelitian ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan permohonan maaf yang sebesar-besarnya. Karena, skripsi ini bukan hanya karya tulis tapi juga catatan perjalanan hati penulis. Akhir kata, semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat untuk berbagai pihak.

Makassar, 3 Oktober 2025

A. Munawwarah

ABSTRAK

A. MUNAWWARAH. **Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Graf Sapu** (dibimbing oleh Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si)

Pelabelan graf merupakan salah satu topik penting dalam teori graf yang banyak dikaji karena memiliki keterkaitan dengan berbagai bidang ilmu. Salah satu jenis pelabelan graf yang menarik adalah pelabelan harmonis ganjil, yaitu pelabelan pada titik graf dengan menggunakan bilangan bulat dalam suatu himpunan tertentu sehingga label sisi merupakan bilangan bulat ganjil yang diperoleh dari hasil penjumlahan kedua titik yang dihubungkannya dan setiap sisi menghasilkan bilangan ganjil yang berbeda. Pada penelitian ini dibahas tentang pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu yang dinotasikan sebagai $SP_{n,m}$, yaitu graf gabungan antara graf lintasan P_n dan graf bintang S_m melalui operasi amalgamasi. Penelitian ini difokuskan pada penentuan konstruksi pelabelan graf sapu $SP_{n,m}$ serta pembuktian bahwa pelabelan tersebut memenuhi ketentuan pelabelan harmonis ganjil untuk n dan m tertentu. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf sapu $SP_{n,m}$ untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ dapat dikonstruksi serta memiliki pelabelan harmonis ganjil dan dapat disebut sebagai graf harmonis ganjil.

Kata Kunci: Pelabelan Harmonis Ganjil, Graf Sapu

ABSTRACT

A. MUNAWWARAH Odd Harmonious Labeling of Broom Graph
(supervised by Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si)

Graph labeling is an important topic in graph theory that is widely studied because it is related to various fields of science. One interesting type of graph labeling is odd harmonic labeling, which is a labeling on a graph using odd integers so that the result of the sum of the edge labels satisfies certain harmonic properties. This study discusses the odd harmonic labeling on the broom graph denoted as $SP_{n,m}$, which is labeling the vertices of a graph using integers in a certain set so that the edge label is an odd integer obtained from the sum of the two vertices it connects and each edge produces a different odd number. This study focuses on determining the labeling construction of the broom graph $SP_{n,m}$ and proving that the labeling satisfies the conditions for odd harmonic labeling for certain n and m . The results show that the broom graph $SP_{n,m}$ for $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ and $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ can be constructed and has odd harmonic labeling and can be called an odd harmonic graph.

Keywords: Odd Harmonious Labeling, Broom graph

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	iv
UCAPAN TERIMA KASIH	v
ABSTRAK	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR LAMBANG	x
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	2
1.5 Manfaat Penelitian	2
1.6 Landasan Teori	2
1.6.1 Fungsi	2
1.6.2 Konsep Dasar Graf	6
1.6.3 Jenis-jenis Graf	8
1.6.4 Operasi pada Graf	9
1.6.5 Graf Sapu	10
1.6.6 Pelabelan Graf	11
1.6.7 Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf.....	11
BAB II METODOLOGI PENELITIAN.....	14
2.1 Jenis dan Metode Penelitian	14
2.2 Langkah-langkah Penelitian.....	14
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN.....	16
BAB IV PENUTUP.....	26
4.1 Kesimpulan.....	26
4.2 Saran.....	26
DAFTAR PUSTAKA.....	27

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.6.1.1 (a) Fungsi, dan (b) bukan fungsi.....	3
Gambar 1.6.1.2 (a) Fungsi injektif, (b) dan bukan fungsi injektif.....	4
Gambar 1.6.1.3 (a) Fungsi surjektif, (b) dan bukan fungsi surjektif.....	5
Gambar 1.6.1.4 (a) Fungsi bijektif, dan (b) bukan fungsi bijektif.....	5
Gambar 1.6.2.1 Graf G	7
Gambar 1.6.2.2 Graf G	7
Gambar 1.6.3.1 Graf lintasan P_2 dan P_3	8
Gambar 1.6.3.2 Graf bintang S_8	9
Gambar 1.6.4.1 Graf G dan graf H	9
Gambar 1.6.4.2 Graf $amal(G_i, v_{0i})$	10
Gambar 1.6.5.1 Graf lintasan P_4 dan graf bintang S_7	10
Gambar 1.6.5.2 Graf sapu $SP_{4,6}$ berorde 10.....	11
Gambar 1.6.6.1 Pelabelan total pada Graf P_4	11
Gambar 1.6.7.1 Graf bintang S_5	11
Gambar 1.6.7.2 Pelabelan titik yang injektif pada graf bintang S_5	12
Gambar 1.6.7.3 Pelabelan Harmonis ganjil pada graf bintang S_5	12
Gambar 1.6.7.4 Graf siklus C_3	12
Gambar 1.6.7.5 Pelabelan titik yang injektif pada graf siklus C_3	12
Gambar 1.6.7.6 Graf C_3 tidak memenuhi kriteria pelabelan harmonis ganjil	13
Gambar 3.1 Graf sapu $SP_{n,m}$	16
Gambar 3.2 Graf sapu $SP_{3,2}$	17
Gambar 3.3 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{3,2}$	17
Gambar 3.4 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,2}$	17
Gambar 3.5 Graf sapu $SP_{3,3}$	18
Gambar 3.6 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{3,3}$	18
Gambar 3.7 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,3}$	18
Gambar 3.8 Graf sapu $SP_{3,4}$	18
Gambar 3.9 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,4}$	19
Gambar 3.10 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,4}$	19
Gambar 3.11 Graf sapu $SP_{4,2}$	19
Gambar 3.12 Pelabelan haronis ganjil pada graf sapu $SP_{4,2}$	19
Gambar 3.13 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{4,2}$	20
Gambar 3.14 Graf sapu $SP_{5,2}$	20
Gambar 3.15 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{5,2}$	20
Gambar 3.16 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{5,2}$	20
Gambar 3.17 Graf sapu $SP_{6,2}$	21
Gambar 3.18 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{6,2}$	21
Gambar 3.19 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{6,2}$	21
Gambar 3.20 Graf sapu $SP_{4,3}$	22
Gambar 3.21 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{4,3}$	22
Gambar 3.22 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{4,3}$	22
Gambar 3.23 Graf sapu $SP_{4,3}$	23
Gambar 3.24 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{4,3}$	23
Gambar 3.25 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{4,3}$	23

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan
$V(G)$	Himpunan titik graf G
$E(G)$	Himpunan sisi graf G
u, v	Titik u dan titik v
uv	Sisi uv
$p = V(G) $	Banyaknya titik pada graf G
$q = E(G) $	Banyaknya sisi pada graf G
G^i	Graf ke- i dalam operasi amalgamasi
P_n	Graf lintasan
S_m	Graf bintang
$SP_{n,m}$	Graf sapu
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
f	Fungsi pelabelan titik
f^*	Fungsi pelabelan sisi

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang sangat pesat baik dalam segi teori maupun aplikasi. Diantara sekian banyaknya topik penelitian teori graf, salah satu topik yang banyak dikaji adalah pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963 hingga saat ini telah ditemukan banyak hasil riset dari pelabelan graf yang dikumpulkan serta diperbaharui secara berkala. Berdasarkan sisi aplikasi, pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang keilmuan diantaranya teori koding, radar, astronomi, desain sirkuit, manajemen data base, dan kriptografi (Gallian, 2015).

Terdapat berbagai jenis pelabelan graf tergantung pada sifat dan tujuan pemberian label pada unsur-unsur graf, salah satunya adalah pelabelan harmonis. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis. Misal, $G = (V(G), E(G))$ suatu graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dimana banyaknya titik pada G dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya sisi pada G dinotasikan dengan $|E(G)|$. Pelabelan harmonis adalah fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)| - 1\}$, yang menginduksi fungsi pelabelan sisi $(xy) f^*: E(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)| - 1\}$, dimana saat sisi (x, y) dilabeli $f^*(xy) = f(x) + f(y) \pmod q$ berbeda untuk setiap sisi (xy) di $E(G)$. (Graham, R. L., Sloan, N. J., 1980). Berdasarkan definisi tersebut, maka $|E(G)| \geq |V(G)|$ merupakan syarat perlu dari suatu G sedemikian sehingga G memenuhi suatu pelabelan harmonis.

Pelabelan harmonis yang diperkenalkan oleh R.L. Graham dan N.J.A. Sloane menginspirasi pelabelan harmonis ganjil yang diperkenalkan oleh Zhi He Liang dan Zhan Li Bai pada tahun 2009. Misal $G = (V(G), E(G))$ suatu graf dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Misal f adalah suatu fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$. Fungsi f disebut pelabelan harmonis ganjil pada G jika f adalah injektif yang menginduksi fungsi bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$. Graf G yang memiliki fungsi pelabelan harmonis ganjil disebut graf harmonis ganjil (Liang dan Bai, 2009).

Berikut beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai graf harmonis ganjil. Liang dan Bai (2009) telah membuktikan bahwa graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0 \pmod 4$. Jeyanthi dan Philo (2016) membuktikan bahwa beberapa kelas graf yang diperoleh dari dua siklus dengan menyatukan satu sisi pada masing-masing siklus adalah graf harmonis ganjil. Vaidya dan Shah (2012) membuktikan bahwa graf shadow dan graf split dari graf lintasan P_n dan graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil. Dian Ayu Pujiwati (2020) juga memberikan hasil terkait pelabelan harmonis ganjil pada graf bintang ganda $S_{n,m}$. Dan masih banyak penelitian lain yang berkaitan dengan topik ini.

Berdasarkan penelusuran literatur yang telah dilakukan, belum ada penelitian yang berkaitan dengan pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu. Graf sapu adalah graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi antara graf lintasan P_n dan graf bintang S_m

dengan menempelkan salah satu titik ujung graf lintasan P_n pada titik sentral graf bintang S_m . Pada penelitian ini, graf sapu dinotasikan sebagai $SP_{n,m}$.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimanakah konstruksi fungsi pelabelan yang dapat diberikan pada graf sapu $SP_{n,m}$?
2. Apakah fungsi pelabelan yang telah diberikan memenuhi ketentuan pelabelan harmonis ganjil sehingga graf sapu $SP_{n,m}$ merupakan graf harmonis ganjil?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi untuk pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{n,m}$ dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang ada, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{n,m}$ dan membuktikan bahwa graf sapu $SP_{n,m}$ merupakan graf harmonis ganjil.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah memberikan informasi tambahan dan menambah wawasan bagi para pembaca mengenai pelabelan harmonis ganjil.

1.6 Landasan Teori

Graf harmonis ganjil merupakan salah satu kajian dalam teori graf yang berkaitan dengan pelabelan titik dan sisi serta fungsi injektif dan bijektif. Pemahaman terhadap konsep tersebut menjadi dasar dalam penelitian ini. Oleh karena itu, pada subbab berikut akan dibahas mengenai fungsi, konsep dasar graf, dan pelabelan harmonis ganjil pada graf.

1.6.1 Fungsi

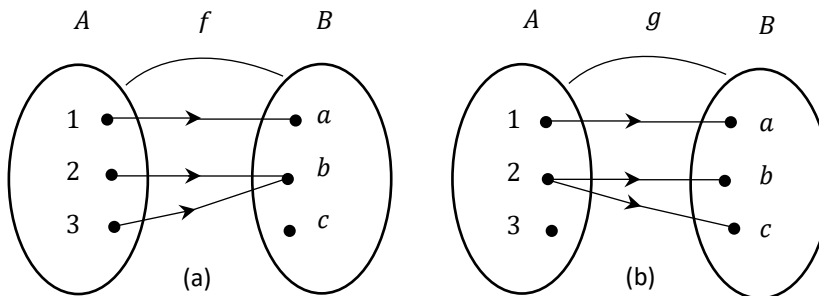
Pada subbab ini akan dibahas mengenai fungsi beserta sifat-sifatnya, yaitu fungsi injektif, surjektif, dan bijektif sebagai landasan dalam konsep pelabelan harmonis ganjil.

Definisi 1.6.1.1 Misal A, B suatu himpunan tidak kosong, pemetaan $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi apabila setiap elemen dari A dipasangkan secara tunggal dengan elemen pada B . Apabila f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$, dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan ditulis dengan $f: x \rightarrow f(x)$, sedangkan x biasa disebut prapeta dari $f(x)$. Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut, dinotasikan dengan $R(f)$ (Amir & Prasajo, 2016).

Untuk memahami definisi fungsi, pandanglah himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{a, b, c\}$. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan pemetaan f dan g sebagai berikut.:

$f: A \rightarrow B$ dengan $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

$g: A \rightarrow B$ dengan $g = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$



Gambar 1.6.1.1 (a) Fungsi, dan (b) bukan fungsi

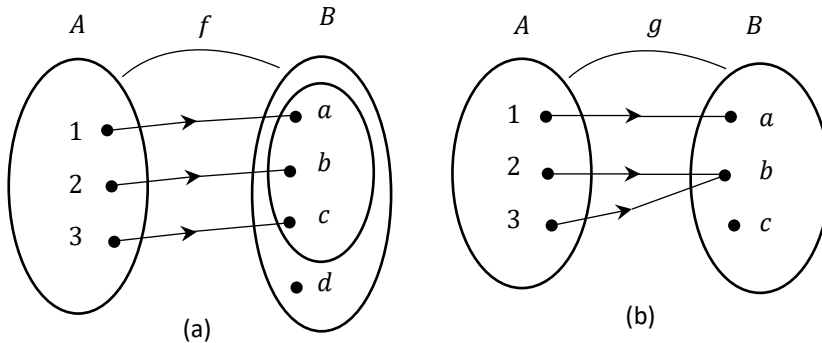
Berdasarkan diagram panah pada Gambar 1.6.1.1 (a), tampak bahwa $f(1) = a$, $f(2) = b$ dan $f(3) = b$. Ini berarti bahwa untuk setiap elemen dalam himpunan domain A dipasangkan secara tunggal dengan elemen pada himpunan kodomain B . Suatu pemetaan $f: A \rightarrow B$ dimana setiap anggota A yang berbeda memiliki pasangan tunggal di B , maka pemetaan tersebut disebut fungsi. Kemudian, berdasarkan diagram panah pada Gambar 1.6.1.1 (b), tampak bahwa $g(1) = a$, $g(2) = b$ dan $g(2) = c$. Perhatikan bahwa $3 \in A$ tidak memiliki pasangan di B , dan $2 \in A$ memiliki lebih dari satu pasangan yaitu $b, c \in B$. Artinya, terdapat elemen himpunan domain A yang tidak dipasangkan secara tunggal dengan elemen di kodomain B , maka pemetaan tersebut bukan fungsi.

Definisi 1.6.1.2 f dikatakan fungsi satu-satu ditulis $f: A \xrightarrow{1-1} B$ apabila $x_1, x_2 \in A$ dan $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$, atau ekuivalen dengan pernyataan apabila $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Fungsi satu-satu juga disebut fungsi injektif (Rosen, 2012).

Pandanglah himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{a, b, c, d\}$. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi f dan fungsi g dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut:

$f: A \rightarrow B$ dengan $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$g: A \rightarrow B$ dengan $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$



Gambar 1.6.1.2 (a) Fungsi injektif, dan (b) bukan fungsi injektif

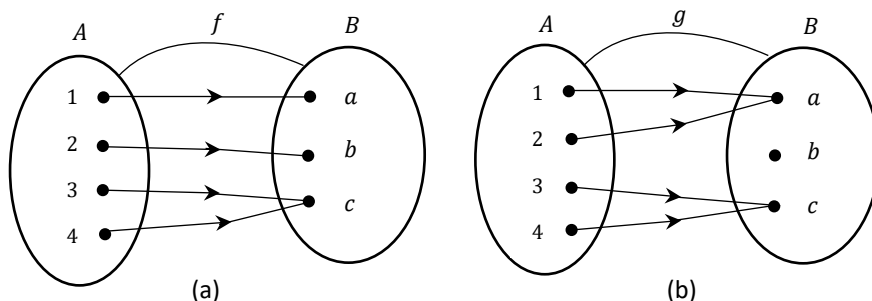
Diagram panah fungsi $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ diperlihatkan pada Gambar 1.6.1.2 (a). Berdasarkan diagram panah pada tersebut, nampak bahwa $f(1) = a$, $f(2) = b$ dan $f(3) = c$. Ini berarti bahwa untuk setiap anggota dalam himpunan A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula di himpunan B. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dengan setiap anggota A yang berbeda memiliki peta yang berbeda di B seperti itu disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif. Adapun untuk diagram panah fungsi $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ diperlihatkan pada Gambar 1.6.1.2 (b). dari diagram panah pada gambar tersebut, tampak bahwa $g(1) = a$, $g(2) = b$ dan $g(3) = b$. Perhatikan bahwa $2 \neq 3$, tetapi $g(2) = g(3) = b$. Karena terdapat anggota yang berbeda di himpunan A tetapi memiliki peta yang sama di himpunan B maka fungsi g bukan fungsi satu-satu atau bukan fungsi injektif.

Definisi 1.6.1.3 f dikatakan fungsi pada (onto) ditulis $f: A \xrightarrow{\text{pada}} B$ apabila range $R(f) = B$. Fungsi ini disebut juga fungsi surjektif (Rosen, 2012).

Pandanglah himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{a, b, c, d\}$. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi f dan fungsi g dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut:

$$f: A \rightarrow B \text{ dengan } f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

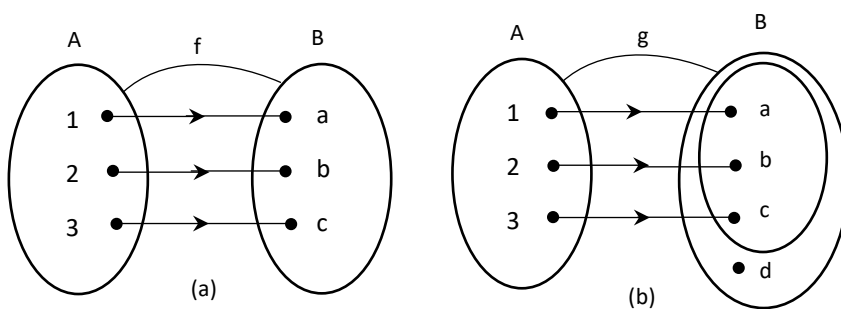
$$g: A \rightarrow B \text{ dengan } g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$$



Gambar 1.6.1.3 (a) Fungsi surjektif, dan (b) bukan fungsi surjektif

Diagram panah untuk fungsi $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, c)\}$ diperlihatkan pada Gambar 1.6.1.3. Dari gambar tersebut, tampak bahwa wilayah hasil fungsi f adalah $W_f = \{a, b, c\} = B$. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dengan wilayah hasil $R(f) = B$ dinamakan fungsi kepada B . Istilah lain untuk fungsi pada adalah fungsi onto atau fungsi surjektif. Adapun untuk diagram panah fungsi $g = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, c)\}$ diperlihatkan pada Gambar 1.6.1.3 (b). dari diagram panah pada gambar tersebut, tampak bahwa $g(1) = a$, $g(2) = a$, $g(3) = c$ dan $g(4) = c$. Perhatikan bahwa range $R(f) \neq \{a, b, c\} \neq B$, maka fungsi g bukan fungsi pada atau bukan fungsi surjektif.

Definisi 1.6.1.4 Jika fungsi f satu-satu pada, maka f disebut sebagai fungsi bijektif (Rosen, 2012).



Gambar 1.6.1.4 (a) Fungsi bijektif, dan (b) bukan fungsi bijektif

Fungsi $f: A \rightarrow B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Fungsi f dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ dengan diagram panahnya diperlihatkan pada Gambar 1.6.1.4 (a). Perhatikan bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif dan juga fungsi injektif. Fungsi f yang bersifat surjektif dan juga injektif disebut dengan fungsi bijektif. Kemudian, untuk fungsi $g: A \rightarrow B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Fungsi g dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut $g = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ dengan diagram panahnya diperlihatkan pada Gambar 1.6.1.4 (b). Perhatikan bahwa fungsi g adalah fungsi injektif tetapi bukan fungsi surjektif. Dengan demikian, fungsi g dikatakan bukan fungsi bijektif.

1.6.2 Konsep Dasar Graf

Sebagai landasan pembahasan lebih lanjut, pada bagian ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan teori graf. Konsep-konsep tersebut penting untuk dipahami sebagai landasan dalam pembahasan topik utama penelitian. Definisi, notasi, serta istilah-istilah lain dalam graf yang relevan akan dijelaskan agar memudahkan dalam proses pembuktian selanjutnya.

Definisi 1.6.2.1 *Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, sedangkan E adalah pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi. (Hasmawati, 2020).*

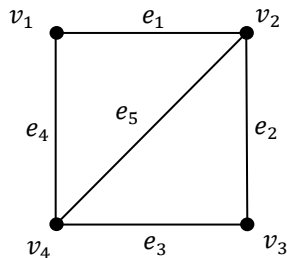
Berdasarkan definisi 1.6.2.1, himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik (*vertex set*), dan $E(G)$ disebut himpunan sisi (*edge set*). Secara matematika, Definisi 1.6.2.1 dapat ditulis sebagai berikut: Graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u: u \text{ disebut titik}\}$ dan $E(G) = \{uv: u, v \in V(G)\}$ dengan uv disebut sisi.

Definisi tersebut juga mengisyaratkan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ bisa saja kosong. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sebuah graf dapat saja tidak mempunyai sisi satu buah pun, akan tetapi mengharuskan adanya titik minimal satu. Graf yang hanya terdiri atas satu buah titik tanpa adanya sisi disebut dengan graf trivial.

Titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, seperti $a, b, c, d, \dots, u, v, \dots$, atau bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, atau gabungan huruf dan bilangan asli. Adapun sisi yang menghubungkan titik u dan titik v dapat dinyatakan dengan pasangan uv atau biasa dilambangkan dengan $e_1, e_2, \dots$ jadi, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dan v , maka e dapat dinyatakan sebagai $e = uv$. (Munir, 2003).

Banyaknya anggota dari himpunan titik $V(G)$ disebut orde (*order*) dari G yang dinotasikan sebagai $|V(G)|$ dan banyaknya anggota dari himpunan sisi $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dari G yang dinotasikan sebagai $|E(G)|$. Secara geometri, graf digambarkan sebagai sekumpulan titik di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi.

Contoh 1.6.2.1 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Sehingga orde dari graf G adalah 4, dinotasikan $|V(G)| = 4$. Sedangkan ukuran dari graf G adalah 5, dinotasikan $|E(G)| = 5$. Dimana $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_4v_1, e_5 = v_2v_4$, maka bentuk graf G dapat dilihat pada Gambar 1.6.2.1 berikut.



Gambar 1.6.2.1 Graf G

Definisi 1.6.2.1 Dua buah titik pada graf dikatakan bertetangga (adjacent) bila keduanya dihubungkan oleh suatu sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika uv adalah sisi pada graf G . (Rosen, Kenneth H., 2012).

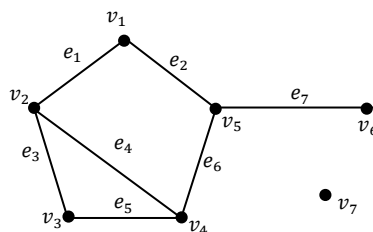
Definisi 1.6.2.2 Jika e_1 dan e_2 adalah sisi yang berbeda pada graf G yang terkait dengan sebuah titik yang sama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi-sisi bertetangga (adjacent edges). (Bondy, J.A., & Murty, U.S.R., 2008).

Definisi 1.6.2.3 Misalkan v adalah suatu titik pada graf G . Derajat titik v adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v , dan dinotasikan dengan $\deg(v)$. Notasi $\Delta(G)$ merupakan notasi yang menyatakan derajat maksimum titik dari graf G dan $\delta(G)$ merupakan notasi derajat minimum titik dari graf G . (Diestel, Reinhard., 2017).

Definisi 1.6.2.4 Suatu jalan pada graf G adalah barisan titik dari G yaitu $u_0, u_1, \dots, u_l$ sedemikian sehingga u_i dan u_{i+1} bertetangga untuk $0 \leq i \leq l-1$. Barisan tersebut dinotasikan dengan $W = \{u_0, u_1, \dots, u_l\}$, sehingga W adalah suatu jalan $u_0 - u_l$, dimana u_0 adalah titik awal dari W dan u_l adalah titik ujung dari W . Karena jalan W memiliki l sisi yaitu $u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{l-1}u_l$, maka jalan W disebut memiliki panjang l . Suatu trail adalah suatu jalan yang setiap sisinya berbeda. Suatu lintasan adalah suatu jalan yang setiap titiknya berbeda. (West, Douglas B., 2001).

Berdasarkan Definisi 1.6.2.4 panjang suatu jalan didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang membentuk jalan.

Contoh 1.6.2.2



Gambar 1.6.2.2 Graf G

Himpunan titik dan sisi dari graf G pada gambar 1.6.2.2 masing-masing adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Berdasarkan graf G pada gambar 1.6.2.2 diketahui beberapa keterangan sebagai berikut.

- Titik v_1 dan titik v_2 bertetangga, sedangkan titik v_1 dan titik v_3 tidak bertetangga.
- Sisi $e_1 = v_1v_2$ terkait dengan titik v_1 dan v_2 , sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_3 dan v_4 . Sisi e_1 bertetangga dengan sisi e_2, e_3 dan e_4 tapi tidak bertetangga dengan e_5, e_6 , dan e_7 .
- Derajat dari setiap titik graf G adalah $\deg(v_1) = \deg(v_3) = 2$, $\deg(v_2) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = 3$, $\deg(v_6) = 1$ dan $\deg(v_7) = 0$. Sehingga derajat maksimum dari graf G adalah $\Delta(G) = 3$ dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G) = 0$.
- Contoh jalan pada graf G adalah $v_1 - v_5: v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_5, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1, e_2, v_5$ dengan panjang jalan 6. Jalan lain pada graf G adalah $v_4 - v_3: v_4, e_6, v_5, e_2, v_1, e_1, v_2, e_3, v_3$ dengan panjang jalan 4.
- Suatu trail pada graf G yaitu $v_2 - v_1: v_2, e_3, v_3, e_5, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1$ dengan panjang trail 4.
- Pada graf G memiliki suatu lintasan $v_1 - v_4: v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$ dengan panjang lintasan adalah 2. Lintasan lain pada graf G adalah $v_2 - v_6: v_2, e_1, v_1, e_2, v_5, e_7$ dengan panjang lintasan adalah 3.

1.6.3 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini akan dibahas beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penulisan skripsi ini, diantaranya graf lintasan, graf bintang, dan graf sapu.

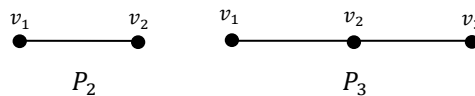
Definisi 1.6.3.1

Graf lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan. Graf lintasan yang berorde n , dinotasikan dengan P_n (Hasmawati, 2020).

Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}$, dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. Graf yang hanya terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dituliskan dengan notasi P_n apabila berorde n . (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.6.3.1

Graf lintasan P_2 dengan himpunan titik $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E(P_2) = \{v_1 v_2\}$. Dan graf lintasan P_3 dengan himpunan titik $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3) = \{v_1 v_2, v_2 v_3\}$.



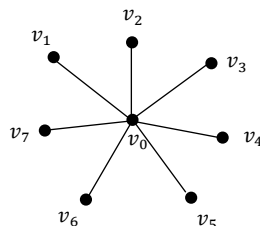
Gambar 1.6.3.1 Graf lintasan P_2 dan P_3

Definisi 1.6.3.2

Graf bintang berorde n dinotasikan S_n adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n - 1$ dan $n - 1$ titik berderajat satu. Titik yang berderajat $n - 1$ disebut titik sentral. (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.6.3.2

Graf bintang S_8 dengan himpunan titik $V(S_8) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $E(S_8) = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_0v_5, v_0v_6, v_0v_7\}$. Berdasarkan kedua himpunan tersebut, dapat diketahui bahwa graf bintang S_8 memiliki 1 titik berderajat 7 dan 7 titik berderajat 1



Gambar 1.6.3.2 Graf bintang S_8

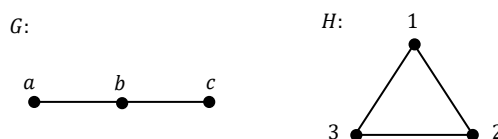
1.6.4 Operasi Graf

Dalam graf, operasi pada graf merujuk pada tindakan memodifikasi atau membentuk graf baru dari graf yang sudah ada. Terdapat beberapa dasar operasi pada graf yaitu operasi gabung, operasi kali, operasi amalgamasi, operasi corona, dan masih banyak lagi. Pada subbab ini operasi graf yang akan dibahas yaitu operasi amalgamasi.

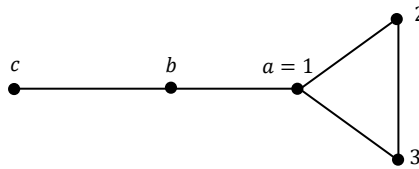
Definisi 1.6.4.1 Misalkan G^i graf terhubung dengan titik tetap $v_{0i} \in V(G^i)$. Amalgamasi graf G^i pada titik tetap v_{0i} dinotasikan dengan $Amal(G^i: v_{0i})$ adalah mengambil semua unsur-unsur (titik dan sisi) pada G^i dengan $v_{0i} = v_{0j}, \forall i, j$. (Hasmawati, 2023).

Setiap graf G^i memiliki titik tetap v_{0i} yang disebut terminal. Titik terminal adalah titik yang dipilih untuk menyatukan kedua graf.

Contoh 1.6.4.1 Misalkan G dengan himpunan titik $V(G) = \{a, b, c\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{ab, bc\}$ dan graf H dengan himpunan titik $V(H) = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{12, 13, 23\}$. Kemudian pilih titik terminal yaitu $a = v_{01}$ pada graf $G^1 = G$ dan titik $1 = v_{02}$ pada graf $G^2 = H$. Maka graf $Amal(G^i: v_{0i})$ adalah graf dengan himpunan titik $\{a = 1, b, c, 2, 3\}$ dan himpunan sisi $\{ab, bc, a2, a3, 23\}$. Bentuk graf $Amal(G^i: v_{0i})$ adalah sebagai berikut.



Gambar 1.6.4.1 Graf G dan graf H



Gambar 1.6.4.2 Graf $Amal(G^i: v_{0i})$

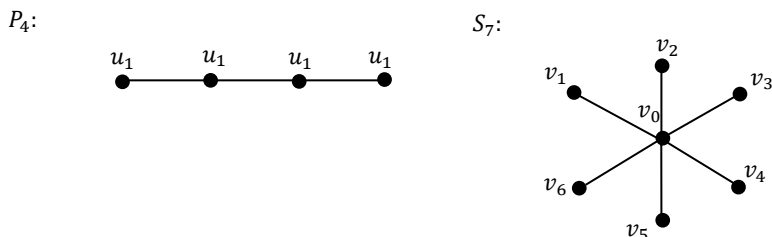
1.6.5 Graf Sapu

Pada subbab ini akan dibahas mengenai graf sapu, yaitu salah satu graf yang terbentuk dari pengoperasian dua buah graf. Uraian berikut mencakup definisi serta struktur dasar graf sapu.

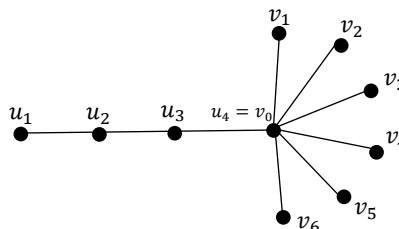
Definisi 1.6.5.1 Graf sapu $SP_{n,m}$ adalah graf terhubung berorde $n + m$ yang memiliki $m + 1$ titik berderajat 1, $n - 2$ titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat $m + 1$.

Graf sapu diperoleh dari hasil operasi amalgamasi graf lintasan dengan graf bintang, dengan cara sebagai berikut. Misalkan graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan $E(P_n) = \{u_i u_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1\}$ adalah graf lintasan berorde n dengan titik tetap u_n . Kemudian graf bintang S_m dengan $V(S_m) = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ dan $E(S_m) = \{v_0 v_i, i = 1, 2, \dots, m - 1\}$ adalah graf bintang dengan titik tetap pada titik sentral v_0 . Maka $Amal(P_n, S_m; u_n, v_0)$ merupakan graf sapu $SP_{n,m}$ berorde $n + m$ yang memiliki $m + 1$ titik berderajat 1, $n - 2$ titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat $m + 1$.

Contoh 1.6.5.1 Diberikan graf lintasan P_4 dan graf bintang S_7 . Graf sapu berorde 10 yakni amalgamasi antara P_4 dan S_7 yakni $SP_{4,6}$ memiliki 7 titik berderajat 1, 2 titik berderajat 2 serta 1 titik berderajat 7. Bentuk graf sapu tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.6.5.1 berikut.



Gambar 1.6.5.1 Graf lintasan P_4 dan graf bintang S_7



Gambar 1.6.5.2 Graf sapu $SP_{4,6}$ berorde 10

1.6.6 Pelabelan Graf

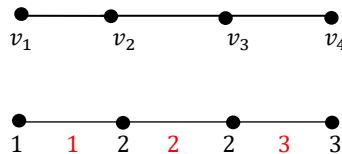
Pelabelan graf merupakan salah satu cabang kajian dalam teori graf yang banyak dikembangkan. Ide utamanya adalah memberikan label berupa bilangan pada titik maupun sisi graf. Melalui pelabelan ini, berbagai karakteristik graf dapat dikaji lebih dalam, serta membuka peluang untuk pengembangan konsep baru yang lebih luas.

Definisi 1.6.6.1 *Pelabelan suatu graf adalah suatu pemetaan yang memasangkan setiap elemen graf yaitu himpunan sisi atau himpunan titik ke bilangan bulat positif, yang disebut label. (Chartrand, Gary, & Zhang, Ping., 2011).*

Jika domainnya adalah titik, maka disebut pelabelan titik, jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi, dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (Budiasti, 2010).

Contoh 1.6.6.1

Berikut diberikan graf lintasan P_4 dengan himpunan titik $V(P_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(P_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$. Graf lintasan P_4 dapat diberi label sebagai berikut.



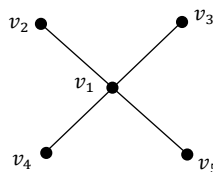
Gambar 1.6.6.1 Pelabelan total pada graf P_4

1.6.7 Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf

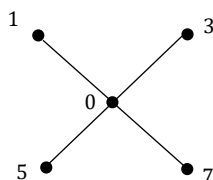
Graf memiliki banyak jenis pelabelan, salah satunya adalah pelabelan harmonis ganjil. Pada subbab ini, akan dijelaskan tentang pelabelan harmonis ganjil pada graf.

Definisi 1.6.7.1 *Graf G dikatakan graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian sehingga menginduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ yang bersifat bijektif, dan f adalah fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf G . (Liang, Bai, 2009).*

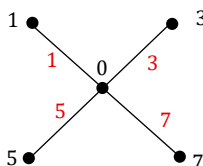
Contoh 1.6.7.1



Gambar 1.6.7.1 graf bintang S_5



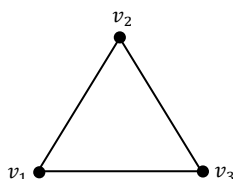
Gambar 1.6.7.2 Pelabelan titik yang injektif pada graf bintang S_5



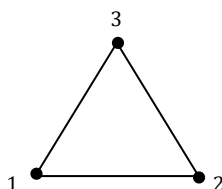
Gambar 1.6.7.3 Pelabelan harmonis ganjil pada graf bintang S_5

Perhatikan pelabelan pada graf S_5 seperti pada Gambar 1.6.7.2, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,3,5,7\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 1.6.7.3. Berdasarkan Gambar 1.6.7.3, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada S_4 merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

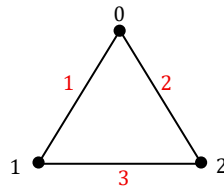
Contoh 1.6.7.2



Gambar 1.6.7.4 Graf siklus C_3



Gambar 1.6.7.5 Pelabelan titik yang injektif pada graf siklus C_3



Gambar 1.6.7.6 Graf C_3 tidak memenuhi kriteria pelabelan harmonis ganjil

Perhatikan pelabelan pada graf C_3 seperti pada Gambar 1.6.6.7.5, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 1.6.7.6. Berdasarkan Gambar 1.6.7.6, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut bukan fungsi bijektif dengan range $\{1,2,3\}$ karena 2 bukan anggota dari $\{1,3,5\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada C_3 bukan pelabelan harmonis ganjil.

BAB II

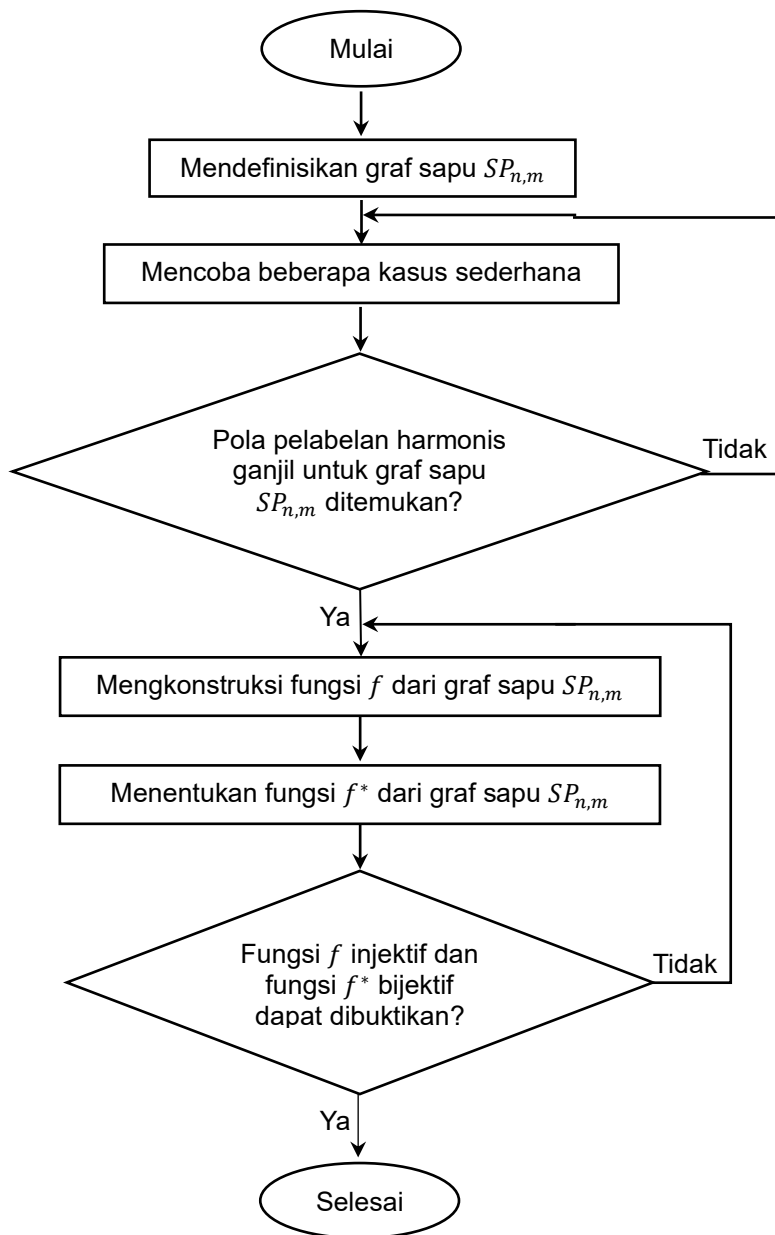
METODOLOGI PENELITIAN

1.1. Jenis dan Metode Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian teoretis. Penelitian ini difokuskan pada kajian matematis dan pembuktian tanpa melibatkan pengumpulan data lapangan. Metode yang digunakan adalah metode kepustakaan (*library research*), dilakukan dengan mengkaji literatur dan hasil penelitian terdahulu yang relevan. Selanjutnya dilakukan analisis teoretis untuk mendefinisikan graf sapu $SP_{n,m}$, mengkonstruksi fungsi, serta membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan pelabelan graf tersebut.

1.2. Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian ini disusun untuk mempermudah alur berfikir dalam mencapai tujuan penelitian yaitu membuktikan bahwa graf sapu $SP_{n,m}$ merupakan graf harmonis ganjil. Tahapan penelitian tersebut dapat dilihat pada skema berikut.



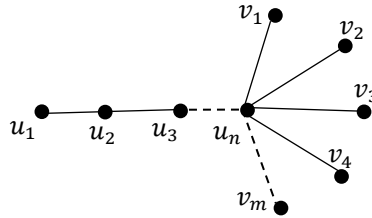
BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan Definisi 1.6.7.1 yang menyatakan bahwa graf sapu $SP_{n,m}$ adalah graf terhubung berorde $n + m$ yang memiliki $m + 1$ titik berderajat 1, $n - 2$ titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat $m + 1$. Maka himpunan titik dan himpunan sisi dari graf sapu $SP_{n,m}$ adalah sebagai berikut.

$$V(SP_{n,m}) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_m\}$$

$$E(SP_{n,m}) = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{n-1}u_n, u_nv_1, u_nv_2, u_nv_3, u_nv_4, \dots, u_nv_m\}$$



Gambar 3.1 Graf sapu $SP_{n,m}$

Berdasarkan definisi tersebut, maka banyaknya titik yang dinotasikan sebagai p adalah $n + m$ dan banyaknya sisi yang dinotasikan sebagai q adalah $n + m - 1$. Adapun titik-titik pada graf sapu $SP_{n,m}$ yang merupakan domain dari fungsi pelabelan titik yang akan dikonstruksi, akan dipetakan ke himpunan kodomain berikut.

$$f: V(SP_{n,m}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\} = \{0, 1, 2, \dots, 2(n + m - 1) - 1\} = \{0, 1, 2, \dots, 2n + 2m - 3\}$$

$$f: V(SP_{n,m}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n + 2m - 3\}$$

Dan sisi-sisi graf sapu $SP_{n,m}$ sebagai domain fungsi pelabelan sisi yang diinduksi dari hasil penjumlahan dua label titik yang bertetangga $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $xy \in E(SP_{n,m})$ harus dipetakan ke himpunan kodomain berikut.

$$f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\} = \{1, 3, 5, \dots, 2(n + m - 1) - 1\} = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}.$$

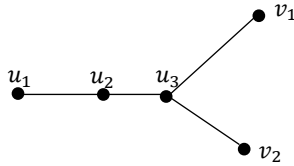
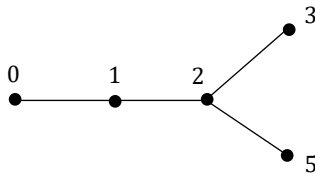
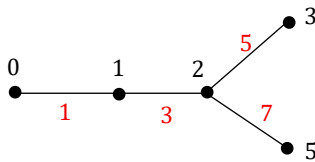
$$f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}$$

Masing-masing pemetaan tersebut harus menghasilkan fungsi yang injektif untuk fungsi pelabelan titik f dan fungsi yang bijektif untuk fungsi pelabelan sisi f^* .

Sebelum menentukan fungsi pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{n,m}$, dilakukan konstruksi pelabelan harmonis ganjil pada beberapa kasus terlebih dahulu. Karena pada penelitian ini, graf sapu $SP_{n,m}$ dibatasi dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$, maka beberapa kasus yang akan dicoba diantaranya adalah untuk $n = 3, m = 2$; $n = 3, m = 3$; $n = 3, m = 4$; $n = 4, m = 2$; $n = 4, m = 3$; $n = 4, m = 4$; $n = 4, m = 3$; dan $n = 5, m = 4$.

Kasus 1. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{3,2}$

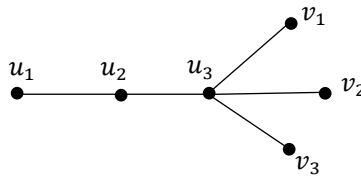
Misalkan graf $SP_{3,2}$ adalah graf berorde 5 yang memiliki 3 titik berderajat 1, 1 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 3 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3v_1, u_3v_2\}$

**Gambar 3.2** Graf sapu $SP_{3,2}$ **Gambar 3.3** Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{3,2}$ **Gambar 3.4** Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,2}$

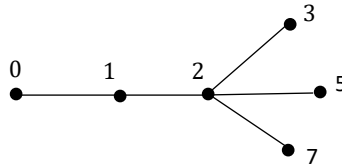
Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{3,2}$ seperti pada gambar 3.2.2, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,5\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada gambar 3.2.3. Berdasarkan gambar 3.2.3, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{3,2}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 2. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{3,3}$

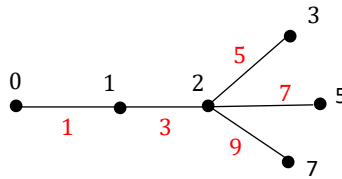
Misalkan graf $SP_{3,3}$ adalah graf berorde 6 yang memiliki 4 titik berderajat 1, 1 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 4 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3\}$



Gambar 3.5 Graf sapu $SP_{3,3}$



Gambar 3.6 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{3,3}$

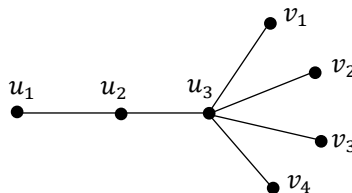


Gambar 3.7 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,3}$

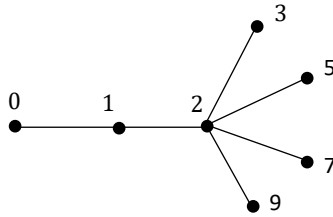
Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{3,3}$ seperti pada gambar 3.2.5, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,5,7\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada gambar 3.2.6. Berdasarkan gambar 3.2.6, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7,9\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{3,3}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 3. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{3,4}$

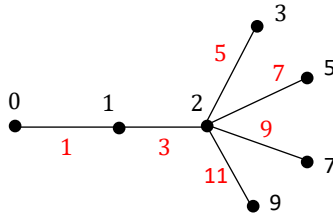
Misalkan graf $SP_{3,4}$ adalah graf berorde 7 yang memiliki 5 titik berderajat 1, 1 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 5 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3, u_3v_4\}$.



Gambar 3.8 Graf sapu $SP_{3,4}$



Gambar 3.9 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,4}$

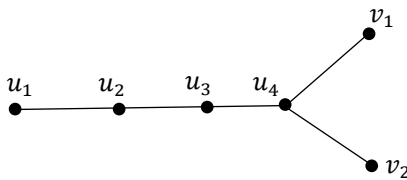


Gambar 3.10 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{3,4}$

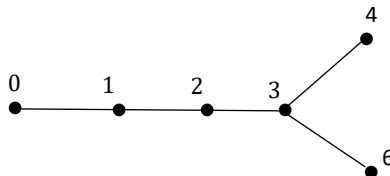
Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{3,4}$ seperti pada gambar 3.2.8, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,5,7,9\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada gambar 3.2.9. Berdasarkan gambar 3.2.9, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7,9,11\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{3,4}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 4. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{4,2}$

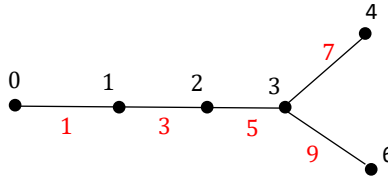
Misalkan graf $SP_{4,2}$ adalah graf berorde 6 yang memiliki 3 titik berderajat 1, 2 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 3 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4v_1, u_4v_2\}$



Gambar 3.11 Graf sapu $SP_{4,2}$



Gambar 3.12 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{4,2}$

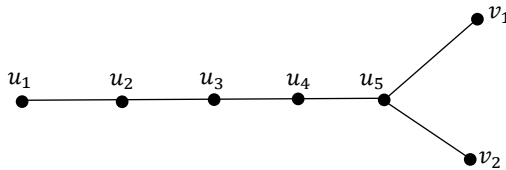


Gambar 3.13 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{4,2}$

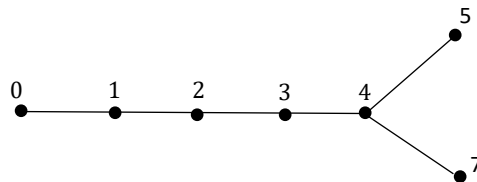
Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{4,2}$ seperti pada gambar 3.2.11, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,4,6\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada gambar 3.2.11. Berdasarkan gambar 3.2.11, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7,9\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{4,2}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 5. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{5,2}$

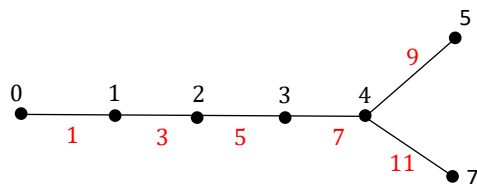
Misalkan graf $SP_{5,2}$ adalah graf berorde 7 yang memiliki 3 titik berderajat 1, 3 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 3 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5v_1, u_5v_2\}$.



Gambar 3.14 Graf sapu $SP_{5,2}$



Gambar 3.15 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{5,2}$

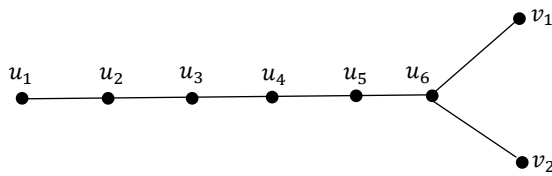


Gambar 3.16 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{5,2}$

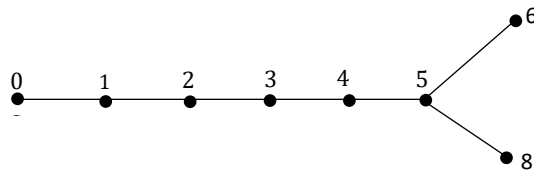
Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{5,2}$ seperti pada Gambar 3.2.14, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,5,7\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 3.2.15. Berdasarkan Gambar 3.2.15, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7,9,11\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{5,2}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 6. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{6,2}$

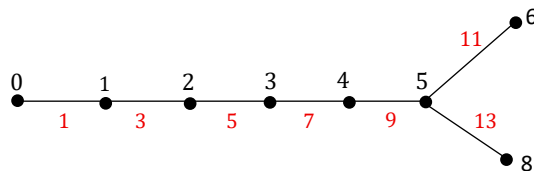
Misalkan graf $SP_{6,2}$ adalah graf berorde 8 yang memiliki 3 titik berderajat 1, 4 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 3 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_6, u_6v_1, u_6v_2\}$.



Gambar 3.17 Graf sapu $SP_{6,2}$



Gambar 3.18 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{6,2}$

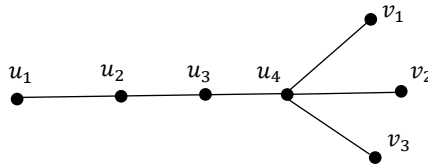


Gambar 3.19 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{6,2}$

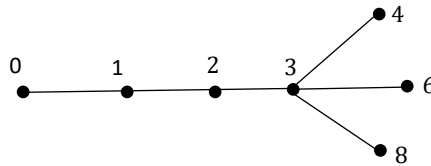
Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{6,2}$ seperti pada Gambar 3.2.17, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,5,6,8\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 3.2.18. Berdasarkan Gambar 3.2.18, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7,9,11,13\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{6,2}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 7. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{4,3}$

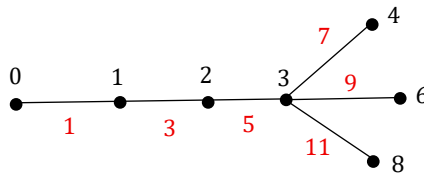
Misalkan graf $SP_{4,3}$ adalah graf berorde 7 yang memiliki 4 titik berderajat 1, 2 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 4 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4v_1, u_4v_2, u_4v_3\}$.



Gambar 3.20 Graf sapu $SP_{4,3}$



Gambar 3.21 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{4,3}$

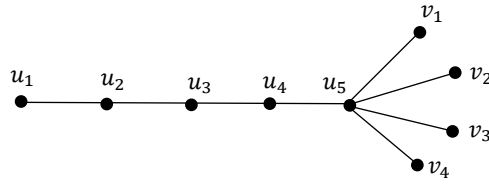


Gambar 3.22 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{4,3}$

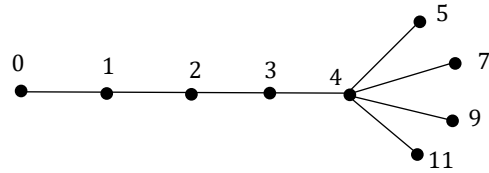
Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{4,3}$ seperti pada Gambar 3.2.20, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,4,6,8\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 3.2.21. Berdasarkan Gambar 3.2.21, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7,9,11\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{4,3}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 8. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Sapu $SP_{5,4}$

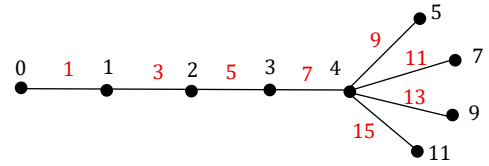
Misalkan graf $SP_{5,4}$ adalah graf berorde 7 yang memiliki 5 titik berderajat 1, 3 titik berderajat 2, dan 1 titik berderajat 5 dengan himpunan titik $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4v_1, u_4v_2, u_4v_3\}$.



Gambar 3.23 Graf sapu $SP_{5,4}$



Gambar 3.24 Pelabelan titik yang injektif pada graf sapu $SP_{5,4}$



Gambar 3.25 Pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{5,4}$

Perhatikan pelabelan pada graf $SP_{5,4}$ seperti pada Gambar 3.2.22, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,3,4,5,7,9,11\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 3.2.23. Berdasarkan Gambar 3.2.24, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada $SP_{5,4}$ merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Berdasarkan konstruksi graf sapu $SP_{n,m}$ secara umum dan analisis terhadap delapan kasus sebelumnya, diperoleh fungsi pelabelan titik pada graf sapu $SP_{n,m}$ yaitu $f: V(SP_{n,m}) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 2n + 2m - 3\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = i - 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

$$f(v_j) = n + 2j - 2, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

Dan fungsi pelabelan pada sisi-sisi graf, yaitu $f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $xy \in E(SP_{n,m})$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f^*(u_i u_{i+1}) &= f(u_i) + f(u_{i+1}) = (i-1) + i \\ f^*(u_i u_{i+1}) &= 2i-1, i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} f^*(u_n v_j) &= f(u_n) + f(v_j) = (n-1) + (n+2j-2) \\ f^*(u_n v_j) &= 2n+2j-3, j = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dengan demikian, telah dikonstruksi fungsi pelabelan harmonis ganjil untuk graf sapu $SP_{n,m}$. Selanjutnya, asumsikan bahwa fungsi f pada persamaan (3.1) dan (3.2) dan fungsi f^* pada persamaan (3.3) dan (3.4) memberikan pelabelan harmonis ganjil pada graf sapu $SP_{n,m}$ untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$, maka berlaku teorema berikut.

Teorema 3.2.1 *Graf sapu $SP_{n,m}$ adalah graf harmonis ganjil.*

Bukti. Misalkan graf sapu $SP_{n,m}$ terdiri dari lintasan $u_1 u_2 \dots u_n$ dengan n titik, dan m titik berderajat 1 yaitu $v_1, v_2, \dots, v_m$ yang masing-masing terhubung ke titik u_i dimana $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan demikian, banyak titik pada graf tersebut adalah $p = |V(SP_{n,m})| = n + m$ dan banyak sisinya adalah $q = |E(SP_{n,m})| = n + m - 1$.

Untuk menunjukkan bahwa fungsi $f: V(SP_{n,m}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n+2m-3\}$ pada persamaan (3.1) dan (3.2) berlaku untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$, maka akan dibuktikan bahwa fungsi f pada persamaan (3.1) dan (3.2) adalah fungsi injektif yang menginduksi fungsi bijektif $f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n+2m-3\}$ pada persamaan (3.3) dan (3.4).

Misalkan dipilih dua titik berbeda u_i dan u_{i+1}

Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ berlaku $f(u_i) = i-1 \neq f(u_{i+1}) = i$

Selanjutnya, dipilih dua titik berbeda v_j dan v_{j+1}

Untuk setiap $j = 1, 2, \dots, m$ berlaku $f(v_j) = n+2j-2 \neq f(v_{j+1}) = n+2(j+1)-2$

Perhatikan bahwa label titik pada u_i membentuk himpunan $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ dan label titik v_j membentuk himpunan $\{n, n+2, n+4, \dots, n+2m-2\}$. Artinya, $f(u_i) \neq f(v_j)$.

Sehingga diperoleh $f: V(SP_{n,m}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n+2m-3\}$ merupakan fungsi injektif.

Kemudian akan dibuktikan bahwa fungsi pelabelan sisi $f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n+2m-3\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $xy \in E(SP_{n,m})$ pada persamaan (3.3) dan (3.4) adalah fungsi bijektif (injektif dan surjektif).

Pertama-tama, dibuktikan bahwa $f^*(u_i u_{i+1})$ dan $f^*(u_n v_j)$ injektif.

Misalkan dipilih dua sisi berbeda $u_i u_{i+1}$ dan $u_{i+1} u_{i+2}$

Untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ maka $f^*(u_i u_{i+1}) = 2i-1 \neq f^*(u_{i+1} u_{i+2}) = 2(i+1)-1$

Selanjutnya, dipilih dua sisi berbeda $u_n v_j$ dan $u_n v_{j+1}$

Untuk setiap $j = 1, 2, 3, \dots, m$ maka $f^*(u_n v_j) = 2n+2j-3 \neq f^*(u_n v_{j+1}) = 2n+2(j+1)-3$

Perhatikan bahwa label sisi pada $u_i u_{i+1}$ membentuk himpunan $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 3\}$ dan label sisi $u_n v_j$ membentuk himpunan $\{2n - 1, 2n + 1, \dots, 2n + 2m - 3\}$. Artinya, $f^*(u_i u_{i+1}) \neq f^*(u_n v_j)$.

Sehingga diperoleh $f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}$ merupakan fungsi injektif.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $f^*(u_i u_{i+1})$ dan $f^*(u_n v_j)$ surjektif.

Berdasarkan Definisi 1.6.1.3, sebuah fungsi pelabelan sisi $f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}$ dikatakan surjektif jika dan hanya jika:

$$R(f^*) = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}, R(f^*) \text{ adalah range fungsi } f^*$$

Untuk sisi $u_i u_{i+1}$ dengan fungsi pelabelan sisi $f^*(u_i u_{i+1}) = 2i - 1, i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ diperoleh himpunan $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 3\} = R(f^*(u_i u_{i+1}))$.

Dan untuk sisi $u_n v_j$ dengan fungsi pelabelan sisi $f^*(u_n v_j) = 2n + 2j - 3, j = 1, 2, 3, \dots, m$ diperoleh himpunan $\{2n - 1, 2n + 1, \dots, 2n + 2m - 3\} = R(f^*(u_n v_j))$.

Maka, untuk range fungsi pelabelan sisi secara keseluruhan diperoleh:

$$R(f^*) = R(f^*(u_i u_{i+1})) \cup R(f^*(u_n v_j))$$

$$R(f^*) = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 3\} \cup \{2n - 1, 2n + 1, \dots, 2n + 2m - 3\}$$

$$R(f^*) = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1, 2n + 1, \dots, 2n + 2m - 3\}$$

$$R(f^*) = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}.$$

Karena jumlah sisi pada graf sapu $SP_{n,m}$ adalah $q = n + m - 1$, maka bilangan ganjil terbesar yang muncul dari hasil pelabelan sisi adalah $2q - 1 = 2n + 2m - 3$. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan bahwa $R(f^*) = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}$, yang artinya fungsi pelabelan sisi $f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}$ surjektif.

Karena fungsi $f^*: E(SP_{n,m}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n + 2m - 3\}$ merupakan fungsi injektif dan surjektif, maka fungsi f^* adalah fungsi bijektif.

Berdasarkan uraian tersebut, telah diperoleh suatu fungsi pelabelan titik f yang bersifat injektif yang menginduksi fungsi pelabelan sisi f^* yang bersifat bijektif. Maka sesuai dengan definisi graf harmonis ganjil pada Definisi 1.6.7.1, dapat disimpulkan bahwa graf sapu $SP_{n,m}$ terbukti merupakan graf harmonis ganjil. ■

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa telah berhasil dilakukan konstruksi fungsi pelabelan harmonis ganjil terhadap graf sapu $SP_{n,m}$ dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ dengan fungsi pelabelan titik:

$$\begin{aligned} f(u_i) &= i - 1, i = 1, 2, \dots, n \\ f(v_j) &= n + 2j - 2, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

dan fungsi pelabelan sisi yang didefinisikan oleh $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $xy \in E(SP_{n,m})$, yaitu:

$$\begin{aligned} f^*(u_i u_{i+1}) &= 2i - 1, i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ f^*(u_n v_j) &= 2n + 2j - 3, j = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned}$$

Dengan demikian, graf sapu $SP_{n,m}$ terbukti merupakan graf harmonis ganjil.

4.2 Saran

Bagi peneliti selanjutnya, diharapkan dapat mengembangkan hasil penelitian ini pada bentuk graf lainnya yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- Amir, M. F., & Prasojo, B.H. (2016). *Matematika dasar*. UMSIDA Press.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory* (Vol. 244). Springer.
- Budiasti, E. (2010). *Pelabelan total pada graf bintang ganda $S(n,m)$* (Skripsi, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati Bandung).
- Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). *Graphs & digraphs* (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2011). *A first course in graph theory*. Dover Publications.
- Diestel, R. (2017). *Graph theory* (5th ed.). Springer.
- Gallian, J. A. (2015). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, DS6. Retrieved from <https://www.combinatorics.org/Surveys/>
- Graham, R. L., & Sloane, N. J. A. (1980). On additive bases and harmonious graphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1(4), 382–404.
- Hasmawati. (2020). *Teori graf dan aplikasinya*. Deepublish.
- Jeyanthi, P., & Philo, S., (2016). Odd harmonious labeling of some cycle related graphs. *Proyecciones Journal of Mathematics*, 35(1), 85-98.
- Liang, Z. H., & Bai, Z. L. (2009). Odd harmonious labeling of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 22(4), 581–586.
- Munir, R. (2003). *Matematika diskrit*. Informatika Bandung.
- Pujiwati, D. A. (2020). *Pelabelan harmonis ganjil pada graf bintang ganda $S(n,m)$* (Skripsi, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati Bandung).
- Rosen, K. H. (2012). *Discrete mathematics and its applications* (7th ed.). McGraw-Hill.
- Sedláček, J. (1963). On the theory of graphs. In *Proceedings of the Symposium Smolenice* (pp. 163–167).
- Vaidya, S. H., & Shah, V. M. (2011). Odd harmonious labeling of some graphs. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 14(1), 65–76.
- West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (2nd ed.). Prentice Hall.