

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kualitas udara merupakan salah satu indikator penting bagi kesehatan lingkungan dan kesejahteraan masyarakat. Pesatnya pertumbuhan populasi serta intensitas aktivitas antropogenik seperti emisi dari industri, transportasi, dan pembangunan, risiko pencemaran udara semakin meningkat. Pencemaran ini tidak hanya berdampak pada lingkungan tetapi juga memicu berbagai masalah kesehatan, termasuk penyakit pernapasan, kardiovaskular, dan gangguan lainnya. Sebagai pusat pertumbuhan regional dengan aktivitas mobilitas dan pembangunan yang tinggi, Kota Makassar mengalami penurunan kualitas udara yang signifikan (Jumadil, 2023). Konsentrasi polutan utama seperti partikulat PM_{2,5}, PM₁₀, dan gas karbon monoksida (CO) sering melampaui ambang batas baku mutu, sehingga memerlukan sistem pemantauan yang ketat untuk mencegah dampak kesehatan yang lebih serius (Hasna dkk., 2024).

Pemantauan kualitas udara secara berkelanjutan sangat krusial untuk mendeteksi perubahan kondisi lingkungan secara dini. Indeks Kualitas Udara (IKU) atau *Air Quality Index* (AQI) digunakan sebagai ukuran komprehensif yang mengintegrasikan berbagai polutan untuk memberikan gambaran tingkat pencemaran secara utuh. Pengendalian kualitas statistika, sebagaimana dipaparkan oleh Montgomery (2020), menawarkan pendekatan sistematis untuk memantau proses melalui pengukuran karakteristik kualitas, perbandingan dengan standar, dan tindakan korektif jika terjadi penyimpangan. Dalam konteks kualitas udara, pendekatan multivariat diperlukan karena polutan PM_{2,5}, PM₁₀, dan CO saling terkait. Pemantauan secara univariat dinilai tidak efektif karena gagal menangkap dinamika polusi yang kompleks dan saling memengaruhi.

Peta kendali multivariat merupakan salah satu alat dalam *Statistical Process Control* (SPC) yang digunakan untuk memantau kestabilan proses dengan melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas secara bersamaan. Salah satu peta kendali multivariat yang paling umum digunakan adalah peta kendali T^2 Hotelling yang berfungsi memantau pergeseran rata-rata proses. Namun, pemantauan kualitas yang ideal tidak hanya berfokus pada rata-rata, tetapi juga pada variabilitas. Untuk tujuan tersebut, digunakan peta kendali dispersi dengan pendekatan *successive difference* yang memperhatikan perbedaan antar pengamatan berurutan, sehingga lebih sensitif dalam mendeteksi perubahan variabilitas. Penggunaan peta kendali T^2 Hotelling dan *successive difference* secara terpisah dinilai kurang efisien karena memerlukan interpretasi ganda serta berpotensi meningkatkan risiko keterlambatan deteksi ketidakterkendalian proses akibat kenaikan laju *false alarm*.

Sebagai solusi, dikembangkan peta kendali *Maximum Multivariate Control Chart* (Max-MChart) yang mampu memonitor rata-rata dan variabilitas proses secara bersamaan. Peta kendali Max-Mchart dikembangkan untuk pengamatan individu dengan menggunakan pendekatan distribusi normal standar. Menurut Kruba dkk.

(2021), peta kendali ini menunjukkan performa yang lebih baik dibandingkan peta kendali Max-Chart dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses ketika jumlah karakteristik kualitas semakin banyak. Namun, performanya kurang optimal dalam memantau variabilitas proses. Selain itu, statistik peta kendali Max-MChart yang diperoleh dari nilai absolut statistik rata-rata dan variabilitas dapat menunjukkan hasil yang kurang sesuai karena nilai absolut dari bilangan negatif yang besar teridentifikasi sebagai *out of control*.

Untuk mengatasi kelemahan tersebut, Kruba dkk. (2021) mengusulkan peta kendali *Maximum Half-Normal Multivariate Control Chart* (Max-Half-MChart) yang merupakan pengembangan dari peta kendali Max-Mchart melalui pendekatan distribusi *half-normal* yang efektif dalam memonitor variabilitas dan rata-rata proses. Pendekatan distribusi *half-normal* digunakan untuk memperbaiki kekurangan dari peta kendali Max-Mchart yang menggunakan pendekatan distribusi normal standar. Peta kendali Max-Mchart dengan pendekatan distribusi normal standar memberikan hasil yang kurang tepat sehingga dapat menyebabkan kesalahan pengambilan keputusan pada kasus tertentu karena nilai peluang dari distribusi chi-square mendekati 0 dan nilai kuantil dari distribusi normal standar bernilai negatif sehingga nilai absolut negatif akan terdeteksi sebagai sinyal *out of control* pada peta kendali Max-Mchart. Oleh karena itu, peta kendali Max-Half-MChart dilakukan dengan pendekatan distribusi *half-normal* yang memiliki nilai asal dari 0 hingga ∞ untuk menghindari nilai negatif pada perhitungan nilai kuantil.

Berbagai penelitian terdahulu telah menunjukkan perkembangan signifikan dalam metode peta kendali multivariat. Seltuti (2018) menerapkan peta kendali T^2 Hotelling, yaitu metode peta kendali multivariat yang digunakan untuk memantau pergeseran rata-rata proses, namun belum menyentuh aspek variabilitas. Pengembangan selanjutnya dilakukan oleh Naqiyyah (2023) dalam penelitian berjudul *Pengendalian Kualitas Statistika Pupuk ZK di PT Petrokimia Gresik Menggunakan Multivariate Max-Chart* (Max-MChart). Penelitian tersebut menggunakan peta kendali Max-MChart yang memonitor rata-rata dan variabilitas proses secara simultan melalui statistik maksimum dari beberapa karakteristik kualitas. Meskipun demikian, metode ini masih berbasis asumsi distribusi normal sehingga memiliki keterbatasan pada kondisi data tertentu. Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, Kruba dkk. (2021) mengembangkan pendekatan Max-Half-MChart yang merupakan pengembangan dari Max-MChart dengan menggunakan transformasi distribusi *half-normal* untuk meningkatkan sensitivitas deteksi pergeseran rata-rata dan variabilitas proses secara simultan. Metode Max-Half-MChart selanjutnya juga diterapkan oleh Nadia dan Wibawati (2024) yang menunjukkan bahwa metode tersebut mampu memonitor rata-rata dan variabilitas proses multivariat secara efektif.

Meskipun metode Max-Half-MChart telah teruji, mayoritas implementasinya masih terbatas pada sektor industri dengan karakteristik proses yang relatif stabil dan terkontrol, seperti pada industri pupuk dan semen. Terdapat celah penelitian (*research gap*) yang signifikan dalam penerapan metode ini pada data lingkungan

yang bersifat dinamis dan kompleks. Berbeda dengan industri manufaktur, data kualitas udara di Kota Makassar pada periode Mei hingga September 2024 dipengaruhi secara ekstrem oleh musim kemarau. Penurunan curah hujan secara alami meningkatkan konsentrasi partikulat, yang menciptakan fluktuasi rata-rata dan variabilitas data yang sangat tinggi.

Penelitian ini bertujuan mengisi celah tersebut dengan menguji ketangguhan peta kendali Max-Half-MChart dalam membedakan antara variabilitas alami akibat faktor musiman dan anomali polusi akibat aktivitas antropogenik. Melalui penerapan pada data PM_{2,5}, PM₁₀, dan CO di Kota Makassar, penelitian ini diharapkan dapat memvalidasi performa distribusi *half-normal* dalam menekan *false alarm* pada data lingkungan, sekaligus memberikan kontribusi dalam pengembangan sistem peringatan dini kualitas udara yang lebih akurat dan komprehensif.

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Metode Penelitian ini dibatasi pada penerapan peta kendali *Maximum Half-Normal Multivariate Control Chart* sebagai metode pengendalian kualitas statistika untuk pemantauan kualitas udara.
2. Data yang digunakan merupakan data indeks kualitas udara yaitu PM_{2,5}, PM₁₀, dan CO di Kota Makassar periode 1 Mei 2024 – 30 September 2024.
3. Penentuan data *in control* menggunakan justifikasi peta kendali T^2 Hotelling dan *successive difference*.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh peta kendali *Maximum Half-Normal Multivariate Control Chart* (Max-Half-MChart) pada data indeks kualitas udara di Kota Makassar.
2. Mendapatkan nilai *Average Run Length* (ARL) untuk mengevaluasi efektivitas peta kendali *Maximum Half-Normal Multivariate Control Chart* (Max-Half-MChart) pada data indeks kualitas udara di Kota Makassar.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah memberikan kontribusi dalam pengembangan pengetahuan mengenai pengendalian kualitas statistik melalui penerapan peta kendali *Maximum Half-Normal Multivariate Control Chart* (Max-Half-MChart). Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar dalam penyusunan rekomendasi yang lebih komprehensif untuk mendukung perumusan kebijakan dan strategi pengendalian pencemaran udara secara lebih efektif.

1.5 Kajian Teori

1.5.1 Pengendalian Kualitas Statistika

Pengendalian kualitas statistika merupakan metode pengendalian mutu yang

menggunakan teknik statistika untuk memantau, mengevaluasi, dan menjaga kestabilan suatu proses. Pendekatan ini bertujuan mengidentifikasi variasi proses serta membedakan variasi yang bersifat alami dan variasi akibat faktor khusus sehingga penyimpangan dapat dideteksi secara dini dan tindakan perbaikan dapat dilakukan secara tepat (Montgomery, 2020). Selain itu, penerapan SPC bertujuan untuk mengidentifikasi penyebab variasi proses serta memastikan bahwa hasil pengukuran atau keluaran sistem tetap sesuai dengan standar atau spesifikasi yang telah ditetapkan sepanjang periode pengamatan (Alfie dkk., 2021). Penerapan pengendalian kualitas statistika memungkinkan suatu proses atau sistem berjalan secara stabil dan konsisten serta mendukung pengambilan keputusan berbasis data, baik pada bidang industri maupun non-industri, termasuk dalam pemantauan kualitas lingkungan (Woodall, 2000).

1.5.2 Peta Kendali

Peta kendali merupakan salah satu alat analisis statistika dalam pengendalian kualitas yang pertama kali diperkenalkan oleh Walter A. Shewhart pada awal tahun 1920. Peta kendali digunakan untuk memantau dan mengevaluasi tingkat variasi yang terjadi dalam suatu proses dengan cara membandingkan nilai statistik hasil pengamatan terhadap batas-batas kendali yang telah ditetapkan. Melalui peta kendali, penyimpangan proses dapat diidentifikasi sehingga kestabilan proses dari waktu ke waktu dapat dinilai secara objektif (Nadila dkk., 2021).

Secara umum, peta kendali terdiri atas tiga komponen utama, yaitu garis pusat (CL) yang merepresentasikan nilai rata-rata karakteristik kualitas yang diamati, batas kendali atas (UCL) menunjukkan batas maksimum toleransi penyimpangan, serta batas kendali bawah (LCL) yang menunjukkan batas minimum toleransi penyimpangan. Apabila seluruh titik pengamatan berada di dalam batas kendali dan tidak membentuk pola tertentu, maka proses dinyatakan berada dalam kondisi terkendali secara statistik. Sebaliknya, keberadaan titik di luar batas kendali atau munculnya pola yang tidak acak mengindikasikan adanya ketidakstabilan proses yang memerlukan evaluasi dan tindakan perbaikan lebih lanjut (Montgomery, 2020).

1.5.3 Uji Dependensi

Untuk menguji korelasi antar variabel karakteristik kualitas, digunakan uji dependensi, yaitu uji *Bartlett*. Tujuan dari uji *Bartlett* adalah untuk memastikan apakah matriks korelasi antar variabel setara dengan matriks identitas. Jika matriks korelasi berbeda secara signifikan dari matriks identitas, ini mengindikasikan bahwa terdapat korelasi yang signifikan antar variabel-variabel tersebut. Hipotesis dan statistik uji dari uji dependensi yang digunakan adalah sebagai berikut.

$H_0: \mathbf{R} = \mathbf{I}$ (tidak ada korelasi antar karakteristik kualitas)

$H_1: \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ (terdapat korelasi antar karakteristik kualitas)

Statistik uji:

$$\chi^2_{hitung} = - \left[n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right] \ln |\mathbf{R}| \quad (1)$$

dengan:

n = jumlah observasi
 p = jumlah karakteristik
 R = matriks korelasi dari masing-masing karakteristik
 $|R|$ = determinan matriks korelasi

Pada tingkat signifikansi α , tolak H_0 jika nilai dari $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}$ atau $p - values < \alpha$ sehingga dapat disimpulkan terdapat hubungan antar karakteristik kualitas (Johnson & Wichern, 2007).

1.5.4 Uji Normal Multivariat

Distribusi normal multivariat adalah pengembangan dari distribusi normal univariat ketika data terdiri dari lebih dari satu variabel. Untuk mengevaluasi apakah data mengikuti distribusi normal multivariat, dapat digunakan uji *Shapiro–Wilk*. Hipotesis yang diuji adalah:

H_0 : Data memiliki distribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak memiliki distribusi normal multivariat

Statistik uji:

$$W^* = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p W_k \quad (2)$$

dimana

$$W_k = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

Pada tingkat signifikansi α , nilai $p - value > \alpha$ atau apabila nilai $W^* > C_{\alpha, n, p}$ (kuantil statistik *Shapiro–Wilk*), maka akan gagal tolak H_0 . Dengan demikian, data sampel dapat dianggap berasal dari populasi yang mengikuti distribusi normal multivariat (Shapiro & Wilk, 1965).

1.5.5 Peta Kendali Dispersi

Peta kendali dispersi merupakan salah satu jenis peta kendali yang digunakan untuk memantau variabilitas proses secara multivariat, khususnya pada data pengamatan individu. Peta kendali ini dibangun dengan pendekatan *successive difference*, yaitu dengan memperhatikan perbedaan antar pengamatan yang berurutan, sehingga mampu mendeteksi perubahan variabilitas proses secara lebih sensitif (Kruba, 2022). Pendekatan ini sejalan dengan konsep pemantauan variabilitas proses yang menekankan deteksi dini terhadap perubahan dispersi sebagai indikator ketidakstabilan proses (Mahmood dkk., 2025). Secara matematis, misalkan terdapat sekumpulan observasi multivariat $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang mengikuti distribusi normal multivariat dengan matriks rata-rata μ serta matriks kovarians Σ . Untuk memonitor variabilitas proses dari waktu ke waktu, digunakan statistik:

$$D_i = \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1})' \Sigma^{-1} (x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

dengan:

x_i = vektor observasi pada waktu ke- i .

x_{i-1} = observasi pada waktu sebelumnya.

Σ^{-1} = invers matriks kovarians

1.5.6 Peta Kendali T^2 Hotelling

Peta kendali T^2 Hotelling merupakan peta kendali multivariat yang dapat memonitor rata-rata proses, khususnya ketika dua atau lebih karakteristik kualitas yang saling berkorelasi harus dikendalikan secara simultan. Peta kendali ini digunakan untuk mendeteksi pergeseran proses dengan memanfaatkan informasi vektor rata-rata dan matriks kovarians, dengan asumsi bahwa data pengamatan mengikuti distribusi normal multivariat (Afrinaldi dkk., 2023). Terdapat dua jenis peta kendali T^2 Hotelling, yaitu peta kendali T^2 Hotelling untuk pengamatan subgroup dan peta kendali T^2 Hotelling untuk pengamatan individu. Statistik peta kendali T^2 Hotelling untuk pengamatan individu adalah sebagai berikut (Montgomery, 2020).

$$T_i^2 = (x_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (x_i - \mu_0) \quad (5)$$

dengan:

x_i = vektor pengamatan ke- i

$\bar{x}$ = vektor rata-rata

Batas kendali untuk peta kendali T^2 Hotelling untuk pengamatan individu fase I adalah sebagai berikut:

$$UCL = \frac{(n-1)^2}{n} \beta_{\alpha, p/2, (n-p-1)/2} \quad (6)$$

Batas kendali untuk peta kendali T^2 Hotelling untuk pengamatan individu fase II adalah sebagai berikut:

$$UCL = \frac{p(n+1)(n-1)}{n^2 - np} F_{\alpha, p, n-p} \quad (7)$$

Jika jumlah pengamatan $n > 100$, batas kendali peta kendali T^2 Hotelling untuk pengamatan individu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$UCL = \frac{p(n+1)(n-1)}{n^2 - np} F_{\alpha, p, n-p} \quad (8)$$

atau

$$UCL = \chi_{\alpha, p}^2 \quad (9)$$

Batas kendali bawah (LCL) pada peta kendali T^2 Hotelling untuk fase I maupun fase II ditetapkan sebesar nol. Apabila vektor rata-rata dan matriks kovarians telah diketahui, maka batas kendali atas (UCL) ditentukan berdasarkan distribusi *chi-square* dengan derajat bebas sebesar p . Berdasarkan pendekatan statistik tersebut, peta kendali T^2 Hotelling dibangun menggunakan statistik T^2 yang mengikuti

distribusi *chi-square*, sehingga penentuan batas kendali dapat dilakukan secara teoritis dalam pemantauan proses multivariat (Rakhmawan dkk., 2023).

1.5.7 Distribusi *Half-Normal*

Distribusi *half-normal* merupakan distribusi yang berasal dari distribusi normal ketika variabel acaknya direduksi menjadi nilai absolut. Distribusi ini digunakan pada kondisi ketika nilai negatif tidak mungkin muncul atau ketika nilai negatif dianggap tidak relevan dalam proses pengamatan. Jika suatu variabel acak x mengikuti distribusi normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ , maka variabel baru $z = |x|$ akan memiliki distribusi *half-normal*. Secara umum, fungsi kepadatan peluang atau *probability density function* (PDF) dari distribusi *half-normal* dengan parameter μ dan σ diberikan sebagai berikut (Daniel, 1959).

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2, x \geq 0 \quad (10)$$

Jika $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$, variabel acak $x = |z|$ mengikuti distribusi *half-normal* standar. Dengan demikian, fungsi PDF dari distribusi *half-normal* standar adalah:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right), x \geq 0. \quad (11)$$

Berdasarkan Persamaan (11), jika dilakukan substitusi $z = \frac{x}{\sqrt{2}}$, maka fungsi distribusi kumulatif atau *cumulative distribution function* (CDF) untuk distribusi *half-normal* standar dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2}} \exp(-z^2) dz = \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (12)$$

di mana fungsi $\text{erf}(\cdot)$ merupakan *error function* yang umum digunakan dalam teori distribusi probabilitas (Loka dkk., 2024).

1.5.8 Peta Kendali *Maximum Half-Normal Multivariate Control Chart*

Peta kendali *Maximum Half-Normal Multivariate Control Chart* (Max-Half-MChart) merupakan pengembangan lanjutan dari peta kendali Max-Mchart yang memanfaatkan transformasi distribusi *half-normal* untuk memonitor proses multivariat (Kruba dkk., 2021). Secara historis, peta kendali Max-MChart dikembangkan sebagai perluasan dari Bivariate Max-Chart yang menggabungkan dua pendekatan statistik, yaitu statistik T^2 Hotelling untuk mendeteksi pergeseran rata-rata serta statistik *successive difference* untuk memonitor perubahan varians-kovarians proses pada data multivariat. Kedua statistik tersebut pada dasarnya menggunakan asumsi distribusi normal standar untuk menentukan kuantil dan probabilitas kejadian.

Namun, penggunaan distribusi normal standar pada peta kendali Max-

MChart seringkali menimbulkan beberapa permasalahan metodologis. Ketika nilai peluang distribusi *chi-square* berada mendekati nol atau kuantil dari distribusi normal menghasilkan nilai negatif yang relatif besar, maka nilai statistik yang dihasilkan dapat jatuh pada wilayah negatif. Nilai negatif tersebut menjadi tidak relevan untuk tujuan pemantauan kualitas karena statistik kontrol seharusnya memberikan sinyal positif sebagai indikator ketidaksesuaian proses. Ketika nilai tersebut tetap masuk ke dalam perhitungan, hal ini dapat menyebabkan kesalahan interpretasi, di mana sebuah kondisi yang sebenarnya berada *out of control* dapat terdeteksi sebagai *in control*, atau sebaliknya. Oleh sebab itu, peta kendali Max-MChart kurang memadai untuk mendeteksi sinyal-sinyal ekstrem yang muncul pada ujung distribusi.

Max-Half-MChart mengimplementasikan transformasi distribusi *half-normal*. Distribusi *half-normal* merupakan distribusi probabilitas yang hanya memiliki domain positif, sehingga nilai negatif yang sebelumnya muncul pada peta kendali Max-Mchart dapat dieliminasi sepenuhnya. Karena domainnya dimulai dari 0 hingga ∞ , distribusi ini memberikan fleksibilitas yang lebih tepat dalam menginterpretasikan nilai statistik yang berhubungan dengan jarak, varians, atau deviasi. Transformasi ke *half-normal* juga memungkinkan statistik yang bernilai besar tetap berada pada rentang yang realistis untuk penentuan sinyal *out of control*.

Dalam peta kendali Max-Half-MChart, dua statistik utama dihitung untuk setiap pengamatan individu, yaitu statistik pergeseran rata-rata dan statistik pergeseran variabilitas. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan pengamatan multivariat berukuran p dimensi yang mengikuti distribusi normal multivariat dengan mean μ_g dan matriks kovarians proses *in control* sebesar Σ_g . Statistik Max-Half-MChart untuk mendeteksi pergeseran rata-rata dirumuskan sebagai berikut:

$$Z_i^H = Q^{-1}(H_p((x_i - \mu_g)' \Sigma_0^{-1}(x_i - \mu_g))) \quad (13)$$

dengan:

$Q(\cdot)$ = fungsi distribusi kumulatif dari distribusi *half-normal*

Q^{-1} = invers dari $Q(\cdot)$

H_p = fungsi distribusi kumulatif dari distribusi *chi-square* dengan derajat bebas p

Statistik variabilitas peta kendali Max-Half-MChart diperoleh dengan pendekatan *successive difference*. Statistik variabilitas peta kendali Max-Half-MChart dapat didefinisikan sebagai berikut

$$V_i^H = Q^{-1}(H_p(\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})' \Sigma_0^{-1}(x_i - x_{i-1}))) \quad (14)$$

dimana Z_i^H dan V_i^H berdistribusi *half-normal*, penggunaan pendekatan distribusi *half-normal* menyebabkan nilai statistik Z_i dan V_i berada di antara 0 sampai ∞ . Sehingga statistik dari peta kendali Max-Half-MChart dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$M_i^{IH} = \max\{Z_i^H, V_i^H\}, i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

Pada kedua persamaan di atas, fungsi $Q(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi *half-normal*, sedangkan $H_p(\cdot)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi *chi-square* dengan derajat bebas p . Transformasi melalui kedua fungsi ini menghasilkan statistik yang berskala *half-normal* dan lebih mudah digunakan untuk penentuan batas kendali.

Batas kendali untuk peta kendali Max-Half-MChart hanya mempunyai batas kendali atas, karena nilai statistik Max-Half-Mchart bernilai positif. Untuk menentukan batas kendali pada peta kendali Max-Half-MChart digunakan pendekatan *bootstrap*. Pendekatan ini dilakukan dengan mengambil sampel ulang dari proses *in control* untuk memperoleh representasi statistik yang stabil tanpa mengasumsikan bentuk distribusi tertentu. Dengan melakukan *bootstrap* sebanyak N kali, diperoleh kumpulan nilai statistik Max-Half-MChart dari setiap replikasi. Batas kendali atas ditentukan dengan mengambil nilai rata-rata dari kuantil ke-100 $(1 - \alpha)\%$ pada setiap replikasi *bootstrap*. Rumus batas kendali atas adalah sebagai berikut.

$$UCL = \sum_{i=1}^N \frac{M_{i(100(1-\alpha)),l}^{IH}}{N} \quad (16)$$

Dengan pendekatan ini, batas kendali yang diperoleh menjadi lebih akurat dan stabil, terutama ketika distribusi data tidak sepenuhnya mengikuti asumsi normalitas. Interpretasi sinyal pada peta kendali Max-Half-MChart ditentukan berdasarkan perbandingan antara nilai statistik Z_t^H dan V_t^H terhadap UCL. Jika nilai statistik rata-rata Z_t^H melampaui UCL, maka diidentifikasi bahwa proses mengalami pergeseran pada rata-rata atau ditandai dengan simbol M^{++} . Apabila statistik variabilitas V_t^H melebihi UCL, maka terindikasi adanya pergeseran variabilitas, yang ditandai sebagai V^{++} . Jika kedua nilai statistik tersebut masing-masing melebihi UCL secara bersamaan, kondisi ini menandakan terjadinya pergeseran pada rata-rata sekaligus variabilitas proses, yang kemudian ditandai sebagai D^{++} . Ketiga interpretasi sinyal ini memberikan gambaran yang lebih komprehensif mengenai kondisi proses yang dimonitor (Kruba dkk., 2021).

1.5.9 Average Run Length (ARL)

Average Run Length (ARL) digunakan sebagai kriteria untuk membandingkan kinerja peta kendali berdasarkan kecepatan dalam mendeteksi sinyal *out of control*. Peta kendali dengan nilai ARL yang lebih kecil menunjukkan tingkat sensitivitas yang lebih tinggi terhadap perubahan proses karena mampu memberikan sinyal lebih cepat dibandingkan peta kendali dengan nilai ARL yang besar (Yanuar dkk., 2021). Tujuan utama dari grafik pengendali proses statistik adalah untuk mendeteksi pergeseran proses secepat mungkin ketika proses tidak terkendali. Salah satu caranya adalah melalui ARL, yaitu rata-rata banyaknya pengamatan atau waktu hingga peta kendali memberikan sinyal bahwa proses berada dalam kondisi *out of control* (Andini dkk., 2021). Secara umum, nilai ARL dapat dihitung menggunakan rumus:

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (17)$$

di mana p adalah probabilitas suatu titik pengamatan keluar dari batas-batas kendali. Probabilitas ini berkaitan langsung dengan peluang munculnya sinyal pada peta kendali. Untuk ARL dalam kondisi terkendali, rumusnya adalah:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (18)$$

untuk ARL_0 , probabilitas $p = \alpha$, yaitu probabilitas terjadinya kesalahan tipe I. Kesalahan tipe I terjadi ketika proses dinyatakan tidak terkendali padahal sebenarnya masih berada dalam kondisi *in control*. Peristiwa ini dikenal sebagai *false alarm*, yaitu sinyal palsu yang muncul bukan karena adanya perubahan proses. Nilai ARL_0 menggambarkan rata-rata banyaknya sampel yang diamati hingga munculnya sinyal palsu tersebut. Sementara dalam kondisi tidak terkendali, ARL dinyatakan dengan:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (19)$$

ARL_1 dihitung dengan probabilitas $p = 1 - \beta$, yaitu probabilitas kesalahan tipe II. Kesalahan ini terjadi ketika peta kendali gagal memberikan sinyal meskipun proses sebenarnya telah mengalami perubahan dan berada dalam kondisi *out of control*. ARL_1 menunjukkan rata-rata jumlah sampel yang diperlukan hingga peta kendali berhasil mendeteksi perubahan proses. Secara umum, peta kendali dikatakan efektif apabila memiliki nilai ARL_1 yang kecil dan ARL_0 yang besar, karena mampu membedakan kondisi *in control* dan *out of control* serta mendeteksi perubahan proses secara cepat dan akurat.

1.5.10 Indeks Kualitas Udara

Kualitas udara ambien ditentukan oleh konsentrasi zat pencemar yang terkandung di dalamnya, di mana udara dikatakan baik apabila kadar polutan berada di bawah baku mutu dan tidak menimbulkan dampak negatif bagi kesehatan maupun lingkungan. Peningkatan konsentrasi polutan, khususnya di wilayah perkotaan dengan aktivitas transportasi dan industri yang tinggi, dapat menurunkan kualitas udara dan meningkatkan risiko gangguan kesehatan. Penelitian Hasna dkk. (2024), teridentifikasi bahwa polutan yang paling dominan memicu pencemaran udara adalah partikulat PM_{2,5}, PM₁₀, dan karbon monoksida (CO), sehingga ketiga parameter tersebut menjadi indikator penting dalam pemantauan kualitas udara.

Partikulat PM terdiri dari PM₁₀ (diameter < 10 μm) dan PM_{2,5} (diameter < 2,5 μm), yang berasal dari aktivitas industri, transportasi, dan proses pembakaran. PM_{2,5} memiliki dampak kesehatan yang lebih serius karena mampu menembus hingga ke alveoli paru-paru dan memicu peradangan, terutama pada kelompok rentan seperti anak-anak. Untuk melindungi kesehatan masyarakat, baku mutu

harian PM_{2,5} dan PM₁₀ diturunkan pada tahun 2021 menjadi masing-masing 15 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ dan 45 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ (Adi dkk., 2023).

Karbon monoksida (CO) merupakan gas yang tidak berwarna, tidak berbau, dan tidak berasa yang dihasilkan dari proses pembakaran tidak sempurna bahan bakar yang mengandung karbon. Gas ini bersifat mudah terbakar dan beracun sehingga dapat membahayakan kesehatan manusia apabila terpapar dalam konsentrasi tinggi. Sumber emisi CO berasal dari sumber alami dan antropogenik, di mana secara alami gas ini dihasilkan oleh aktivitas gunung berapi dan kebakaran hutan. Namun, kontribusi terbesar emisi CO berasal dari aktivitas manusia, khususnya kendaraan bermotor yang menyumbang lebih dari 75% emisi CO di udara ambien. Konsentrasi CO cenderung meningkat pada kondisi lalu lintas padat atau kemacetan, serta juga dihasilkan dari aktivitas transportasi lain seperti pesawat terbang dan kereta api, proses pembakaran bahan bakar, pembakaran kayu dan sampah, serta kegiatan industri (Buanawati dkk., 2017).

BAB II METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data sekunder berupa indeks kualitas udara atau Air Quality Index (AQI) di Kota Makassar. Data bersumber dari laman AQICN melalui stasiun pemantau Makassar: <https://aqicn.org/station/indonesia-north-pisang-makassar-ujung-pandang/id/#/z/12>. Data harian yang digunakan dikelompokkan ke dalam dua fase penelitian, fase I mencakup periode 1 Mei hingga 31 Agustus 2024 dengan total 123 observasi, sementara fase II mencakup periode 1 September hingga 30 September 2024 sebanyak 30 observasi.

2.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini merupakan parameter utama yang dijadikan sebagai penentu kualitas udara adalah sebagai berikut.

Tabel 1. Variabel Penelitian

Variabel	Keterangan	Satuan	Definisi
X_1	<i>Particulate Matter 2,5</i> (PM2,5)	$\mu g/m^3$	PM2,5 merupakan partikel sangat halus dengan diameter kurang dari 2,5 mikrometer. Karena ukurannya yang sangat kecil, partikel ini dapat masuk jauh ke dalam paru-paru hingga mencapai aliran darah, sehingga dapat menimbulkan berbagai masalah kesehatan serius. PM2,5 biasanya berasal dari proses pembakaran seperti emisi kendaraan bermotor, pembakaran bahan bakar minyak, serta pembakaran kayu.
X_2	<i>Particulate Matter 10</i> (PM10)	$\mu g/m^3$	PM10 merupakan partikel udara berukuran kurang dari 10 mikrometer yang dapat masuk ke saluran pernapasan dan mencapai paru-paru, namun tidak mampu menembus aliran darah seperti PM2,5. Partikel ini umumnya ditemukan di area konstruksi, pembuangan sampah, aktivitas pertanian, kebakaran hutan, serta dapat berasal dari debu, serbuk sari, dan pecahan bakteri.
X_3	Karbon monoksida (CO)	<i>ppm</i>	CO adalah gas yang tidak memiliki bau, warna, maupun rasa, sehingga sulit terdeteksi oleh indera manusia. Gas ini bersifat beracun karena mampu berikatan kuat dengan hemoglobin, sehingga mengurangi kemampuan darah dalam

mengangkut oksigen. Karena sifatnya yang tidak terdeteksi namun sangat berbahaya, CO sering disebut sebagai *silent killer*.

2.3 Metode Analisis

Pengolahan data dalam penelitian ini dilakukan dengan bantuan berupa *software* yaitu Microsoft Excel dan R. Adapun tahapan analisis yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian adalah sebagai berikut.

1. Melakukan analisis deskriptif data kualitas udara di Kota Makassar.
2. Melakukan pengujian dependensi variabel dengan menggunakan uji *Barlett* pada variabel untuk mengetahui adanya hubungan antar variabel berdasarkan Persamaan (1).
3. Melakukan uji asumsi normal multivariat pada variabel berdasarkan Persamaan (2).
4. Mendapatkan pengamatan *in control* menggunakan justifikasi peta kendali *Successive Difference* dan T^2 Hotelling.
5. Menghitung statistik peta kendali Max-Half-MChart fase I dengan tahapan sebagai berikut.
 - a. Menghitung statistik rata-rata T^2 Hotelling pada Persamaan (5).
 - b. Menghitung statistik variabilitas proses melalui Persamaan (4).
 - c. Mendapatkan fungsi transformasi statistik rata-rata dengan pendekatan distribusi *half-normal* pada Persamaan (13).
 - d. Mendapatkan fungsi transformasi statistik variabilitas dengan pendekatan distribusi normal standar pada Persamaan (14).
 - e. Mendapatkan statistik untuk peta kendali Max-Half-MChart berdasarkan Persamaan (15).
6. Menentukan batas kontrol peta kendali Max-Half-MChart fase I dengan pendekatan *bootstrap* dengan langkah sebagai berikut.
 - a. Menggunakan $\alpha = 0,0027$.
 - b. Untuk setiap perulangan $I = 1, 2, \dots, 1000$ dilakukan langkah sebagai berikut.
 - i. Menghitung statistik untuk peta kendali Max-Half-MChart data fase I *in control* yang diperoleh dari justifikasi peta kendali *successive difference* dan T^2 Hotelling.
 - ii. Meresampling statistik Max-Half-MChart sebanyak $N = 1000$ kali.
 - iii. Menghitung persentil $(1 - \alpha)$ dari hasil langkah sebelumnya.
 - iv. Menghitung UCL berdasarkan pada Persamaan (16) dengan $N = 1000$.
7. Memplotkan peta kendali Max-Half-MChart fase I, jika diperoleh pengamatan *out of control* dilakukan identifikasi dengan kriteria sebagai berikut.
 - a. Jika nilai statistik rata-rata $Z_i > UCL$, maka teridentifikasi M^{++} atau teridentifikasi terjadi pergeseran pada rata rata proses.

- b. Jika nilai statistik variabilitas $V_i > UCL$, maka teridentifikasi V^{++} atau teridentifikasi terjadi pergeseran pada variabilitas proses.
 - c. Jika nilai statistik $Z_i > UCL$ dan $V_i > UCL$ maka teridentifikasi B^{++} atau teridentifikasi terjadi pergeseran pada rata-rata proses dan variabilitas proses.
8. Menghitung statistik peta kendali Max-Half-MChart fase II dimana vektor rata-rata dan matriks kovarians diperoleh dari pengamatan fase I peta kendali Max-Half-MChart yang telah *in control*.
 9. Memplotkan peta kendali Max-Half-MChart fase II.
 10. Menghitung nilai *Average Run Length* (ARL) peta kendali Max-Half-MChart berdasarkan Persamaan (17).
 11. Menarik kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan.