

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini semakin berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi di berbagai aspek terutama di bidang matematika, matematika aljabar ikut berperan besar dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Aljabar pertama kali diperkenalkan oleh Al Khawarizmi (830). Umumnya dalam aljabar berkaitan dengan menyelesaikan suatu sistem persamaan, menemukan suatu nilai, menggunakan rumus kuadrat, persamaan dan simbol huruf.

Struktur aljabar merupakan salah satu bidang dalam matematika yang terdiri dari suatu himpunan objek dan paling sedikit memiliki satu operator biner pada himpunan bersama dengan memenuhi hukum tertentu yang disebut dengan Aljabar Modern atau Abstrak (Setiawan et al., 2014). Dalam struktur aljabar juga membahas terkait permutasi polinomial yang kemudian dikembangkan sedemikian rupa sehingga menjadi salah satu topik yang menarik untuk dibahas.

Hasil penelitian tentang permutasi polinomial hingga saat ini telah banyak diperoleh, salah satunya yaitu (Gutierrez & Jiménez Urroz, 2023) yang membahas permutasi polinomial dan grup e-Klenian, yang akan menjadi topik penelitian skripsi ini yang dimana salah satu sub materi yang dibahas dalam penelitian tersebut. Dengan demikian diharapkan penelitian ini dapat memberikan wawasan tambahan mengenai permutasi polinomial.

Berdasarkan uraian latar belakang dan penelitian sebelumnya, Peneliti tertarik untuk mengkaji permutasi polinomial terkhusus pada sub materi yang dimaksud mengenai sistem ortogonal polinomial dan latin square yang saling ortogonal sebagai objek penelitian. Sehingga pada penelitian ini penulis mengambil judul **“SISTEM ORTOGONAL POLINOMIAL PERMUTASI DAN LATIN SQUARE YANG SALING ORTOGONAL”**. Penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi keilmuan dalam bidang permutasi polinomial khususnya sistem ortogonal polinomial dan latin square yang saling ortogonal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sebuah permutasi polinomial dapat disebut ortogonal?
2. Bagaimana sebuah latin square dapat disebut ortogonal?
3. Bagaimana pemetaan bijektif permutasi polinomial dan latin square?

1.3 Batasan Penelitian

Pada penelitian ini, penulis membatasi pada fungsi polinomial dua variabel atas lapangan hingga.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menunjukkan sebuah permutasi polinomial dapat disebut ortogonal.

2. Untuk menunjukkan sebuah latin square dapat disebut ortogonal.
3. Untuk menunjukkan pemetaan bijektif permutasi polinomial dan latin square.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat kepada berbagai pihak sebagai berikut:

1. Bagi Penulis:
 - a. Sebagai sarana untuk memperkaya pengetahuan dan wawasan mengenai ilmu matematika khususnya pada bidang aljabar.
 - b. Sebagai sarana untuk menambah keterampilan dalam menerapkan teori-teori yang telah diperoleh dalam perkuliahan.
2. Bagi Pembaca:
 - a. Sebagai sarana untuk menambah pemahaman tentang teori-teori dalam bidang aljabar.
 - b. Sebagai bahan referensi dalam kajian keilmuan matematika.
3. Bagi Universitas Hasanuddin:

Sebagai pelengkap literatur mengenai matematika khususnya pada bidang aljabar yang dapat dimanfaatkan oleh civitas akademik Universitas Hasanuddin.

1.6 Landasan Teori

Saat ini, permutasi polinomial merupakan topik penelitian yang mulai diminati para peneliti. Beberapa peneliti yang mengkaji

permutasi polinomial diantaranya: Qosimil Junaidi (2014), Elvin Marwady, dkk (2014), Nugroho, A. A. (2023), dan Gutierrez & Jiménez Urroz (2023). Dalam penelitian Gutierrez & Jiménez Urroz pada tahun 2023 yang berjudul “*Local permutation polynomials and the action of e-Klenian groups*”.

Adapun teori-teori terkait sistem ortogonal polinomial dan latin square yang saling ortogonal antara lain grup, gelanggang, lapangan, lapangan hingga, permutasi, polinomial, permutasi polinomial, matriks ortogonal, dan latin square serta hasil penelitian terdahulu akan dibahas pada bab ini. Pada bab ini referensi mengenai permutasi polinomial serta notasi-notasi yang dibutuhkan lebih banyak merujuk pada penelitian (Gutierrez & Jiménez Urroz, 2023) dan buku (Shallue, 2012).

1.6.1 Grup

Grup merupakan suatu himpunan yang memiliki satu operasi biner dan terdefinisi pada himpunan tersebut, seperti perkalian atau penjumlahan yang memenuhi beberapa aksioma tertentu (Setiawan et al., 2014).

Definisi 1.6.1 Misalkan G merupakan himpunan dan G bukan himpunan kosong. Himpunan G dikatakan grup jika memenuhi aksioma berikut:

- 1) Bersifat tertutup : $a * b \in G$ untuk setiap $a, b \in G$.
- 2) Bersifat assosiatif : $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$.
- 3) Memiliki identitas : terdapat suatu unsur $e \in G$ sehingga $e * x = x * e = x$ untuk semua $x \in G$.

- 4) Memiliki invers : untuk setiap $a \in G$ terdapat $a' \in G$ sehingga $a * a' = a' * a = e$.

Apabila operasi pada grup bersifat komutatif maka grup tersebut disebut Grup Abelian atau Grup Komutatif.

Sebagai contoh dari definisi diatas, apakah $(Z,*)$ merupakan grup.

- 1) Bersifat tertutup.

$x * y \in Z$ untuk setiap $x, y \in Z$. Jadi, untuk setiap bilangan bulat dikalikan dengan bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat.

- 2) Bersifat assosiatif.

$(x * y) * z = x * (y * z)$ untuk setiap $x, y, z \in Z$. Jadi, bilangan bulat memenuhi sifat assosiatif dalam Z .

- 3) Memiliki identitas.

$x * u = u * x = x$ dan $u = 0$ untuk setiap $x \in Z$ dan $u \in Z$.
Jadi, bilangan bulat Z memiliki identitas.

- 4) Memiliki invers.

$x * x' = x' * x \neq u$ untuk setiap $x \in Z$ dan $x' \in Z$. Jadi, bilangan bulat Z tidak memiliki invers karena 0 tidak memiliki invers.

Jadi, bilangan bulat Z bukan merupakan grup.

1.6.2 Gelanggang

Suatu grup dapat dikatakan gelanggang apabila grup memiliki dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian serta memenuhi semua aksioma gelanggang (Mustaqimah, 2021).

Definisi 1.6.2 Misalkan R merupakan himpunan dan R bukan himpunan kosong terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$). Himpunan R dikatakan gelanggang jika memenuhi aksioma berikut:

- 1) $(R, +)$ merupakan grup Abelian atau grup komutatif.
- 2) $(R, \cdot)$ bersifat tertutup : $a * b \in R$ untuk setiap $a, b \in R$.
- 3) $(R, \cdot)$ bersifat assosiatif : $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$.
- 4) $(R, +, \cdot)$ bersifat distributif : $(a + b) * c = a * c + a * b$ dan $a * (b + c) = a * b + a * c$ untuk setiap $a, b, c \in R$.

Sebagai pembuktian dari definisi diatas, diketahui $R = \{0, 1\}$. Tunjukkan bahwa himpunan R dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat merupakan gelanggang komutatif.

Contoh.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Jika $(R, +, \cdot)$ merupakan gelanggang komutatif, maka $(A, +)$ merupakan grup abelian, $(R, \cdot)$ merupakan semigrup abelian, dan berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan bilangan bulat.

- $(R, +)$ merupakan grup abelian dengan bukti:
 1. $(R, +)$ bersifat tertutup dan assosiatif.
 2. Memiliki Identitas : $0 + e = e + 0 = 0$ dan $1 + e = e + 1 = 1$, sehingga $e = 0$.

3. Memiliki Invers : Misalkan $a = 0 \in A$, maka $0 + a' = 0$, demikian sehingga $a' = 0$. Misalkan $b = 1 \in A$, maka $1 + b' = 0$, demikian sehingga $b' = 1$.

4. Pada operasi penjumlahan berlaku sifat komutatif.

Jadi, terbukti bahwa $(A, +)$ merupakan grup abelian.

- $(R, \cdot)$ merupakan semigrup abelian, $(R, \cdot)$ bersifat tertutup, asosiatif dan komutatif.
- Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Misalkan $a = 1, b = 0, c = 0$.

- $a(b + c) = 1(0 + 0) = 1 \times 0 = 0$
- $ab + ac = 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0 + 0 = 0$

Jadi, $a(b + c) = ab + ac$ berdistributif kiri, dengan cara yang sama distributif kanan juga dapat di buktikan.

Jadi, terbukti bahwa $(R, +, \cdot)$ merupakan gelanggang komutatif.

1.6.3 Lapangan

Sebuah himpunan dapat dikatakan lapangan apabila memiliki operasi biner seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Dalam lapangan tidak harus memiliki operasi lain seperti pangkat, akar, log, atau fungsi lain seperti $\sin x$ (Joyce, 2017).

Definisi 1.6.3 Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan lapangan dan $\mathbb{F}$ bukan himpunan kosong terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$. Himpunan $\mathbb{F}$ dikatakan lapangan jika memenuhi aksioma berikut:

- Bersifat komutatif dan asosiatif.

- Memiliki identitas, dimana identitas penjumlahan dinotasikan dengan 0 dan identitas perkalian dinotasikan dengan 1.
- Memiliki Invers, untuk operasi perkalian memiliki invers yang tidak sama dengan 0.
- Operasi perkalian terdistribusi pada operasi penjumlahan.

Operasi biner $+: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ disebut penjumlahan, dimana memetakan setiap pasangan terurut $(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ yang dinotasikan dengan $x + y$. Sementara operasi biner $\times: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ disebut perkalian, dimana memetakan pasangan terurut $(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ yang dinotasikan dengan $x \times y$ atau yang lebih sederhana xy .

1.6.4 Lapangan Hingga

Sebuah himpunan dapat dikatakan lapangan hingga apabila lapangannya terbatas. Lapangan $\mathbb{F}$ bukanlah lapangan terkecil tetapi sub lapangan dari $\mathbb{F}$ sudah pasti terbatas, sehingga sub lapangan $\mathbb{F}$ bisa disebut lapangan hingga (Joyce, 2017).

Definisi 1.6.4 (kekongruenan modulo n). n adalah sebuah bilangan bulat positif. Dua bilangan bulat x dan y kongruen modulo n jika n membagi rata selisih x dan y yang dapat notasikan sebagai berikut:

$$x \equiv y \pmod{n}$$

Untuk menunjukkan bahwa x kongruen terhadap y modulo n dan dinotasikan $n|m$ yang menunjukkan bahwa bilangan bulat n membagi habis bilangan bulat m . Sehingga,

$$x \equiv y \pmod{n} \quad \text{jika} \quad n|(x - y)$$

Jika n tidak membagi rata selisih x dan y , maka x tidak kongruen terhadap y yang dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$x \not\equiv y \pmod{n}$$

1.6.5 Permutasi

Sebuah himpunan dapat dikatakan permutasi apabila penyusunan dari unsur-unsur mempertimbangkan urutan unsur tersebut. Permutasi juga merupakan pemetaan satu-satu dan pada.

Definisi 1.6.5 $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah urutan dari n unsur yang berbeda. Urutan dari n unsur ini disebut permutasi.

Untuk menunjukkan n adalah permutasi, misalkan permutasi dari 3 huruf yang berbeda yaitu ABC. Permutasi dari ABC adalah ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Sehingga terdapat 6 permutasi dari ABC.

Menentukan banyak permutasi dari suatu himpunan dapat ditentukan dengan mencari hasil dari faktorial unsur tersebut. Berdasarkan prinsip perkalian, terdapat $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$ yang merupakan permutasi dari n unsur yang berbeda atau banyaknya permutasi dapat kita notasikan sebagai:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n - k)!}$$

1.6.6 Polinomial

Suatu himpunan dapat dikatakan polinomial apabila memiliki beberapa unsur dan memuat variabel berpangkat bulat positif.

Definisi 1.6.6 Misalkan x adalah polinomial yang berderajat n , sehingga $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

Sebagai contoh dari definisi diatas ialah polinomial $3x^2 + x - 3 + 2x^4$ adalah polinomial berderajat 4 karena derajat tertinggi dari unsur n yaitu 4.

1.6.7 Polinomial Permutasi

Secara spesifik, topik pembahasan berfokus pada fungsi $f: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ yang artinya tertutup pada elemen dalam $\mathbb{F}_q$. Sehingga hal ini berfokus pada bijeksi fungsi $\mathbb{F}_q$ (Shallue, 2012).

Definisi 1.6.7 Sebuah polinomial $f \in \mathbb{F}_q[x]$ disebut Polinomial Permutasi (PP) dari $\mathbb{F}_q$ jika fungsi polinomial $f: c \rightarrow f(c)$ adalah permutasi dari $\mathbb{F}_q$.

Polinomial $f \in \mathbb{F}_q[x]$ adalah sebuah PP dari $\mathbb{F}_q$ jika dan hanya jika memenuhi salah satu dari beberapa aksioma berikut:

- Fungsi $f: c \rightarrow f(c)$ bersifat satu-satu.
- Fungsi $f: c \rightarrow f(c)$ bersifat pada.
- $f(x) = a$ memiliki solusi dalam $\mathbb{F}_q$ untuk setiap $a \in \mathbb{F}_q$.
- $f(x) = a$ memiliki solusi unik dalam $\mathbb{F}_q$ untuk setiap $a \in \mathbb{F}_q$.

Sebagai contoh dari definisi diatas, diketahui $f(x) = 2x^2 + x \in \mathbb{F}_4[x]$ adalah Polinomial Permutasi (PP) dari gelanggang $\mathbb{F}_4$ dengan menghitung nilai-nilainya pada $\mathbb{F}_4$ sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6.8 Latin Square

Definisi 1.6.8 Sebuah matriks A yang memiliki ordo $m \times m$ dapat disebut *Latin Square* apabila elemen yang ada pada tiap baris dan kolomnya memiliki angka yang berbeda (Umer et al., 2019).

Sebagai contoh definisi diatas ialah sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ atau } A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

Matriks ini dapat disebut sebagai latin square karena memiliki ordo $m \times m$, dalam hal ini yaitu 3×3 , dan elemen pada setiap baris dan kolomnya berbeda atau dapat dikatakan muncul tepat satu kali.

Definisi 1.6.9 Sebuah matriks A berordo $m \times m$ dengan entri a_{ij} merupakan sebuah Latin Square jika dan hanya jika terdapat fungsi $f: L \times L \rightarrow L$ sedemikian sehingga $f(c_i, c_j) = a_{ij}$ untuk semua $i, j \in L$.

- i) Jika $x, y, z \in L$ dan $y \neq z$, maka $f(x, y) \neq f(x, z)$.
- ii) Jika $x, y, z \in L$ dan $x \neq z$, maka $f(x, y) \neq f(z, y)$.

1.6.9 Local Permutation Polynomials (LPP)

Definisi 1.6.10 Sebuah polinomial $f: F_m \times F_m \rightarrow F_m$ yang menghasilkan Latin square (yaitu memenuhi kondisi pada Definisi 1.6.9) disebut Polinomial Permutasi Lokal (atau LPP).

Misalkan $f: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ adalah sebuah polinomial permutasi lokal. Jika $p = 2$ atau $p = 3$, maka f adalah linear (Diestelkamp dkk., 2005).

1.6.10 Interpolasi Lagrange

Definisi 1.6.11 Misalkan himpunan titik-titik (x_i, y_j) dimana $i = 0, 1, \dots, n$ dan $j = 0, 1, \dots, m$ memiliki nilai $f(x_i, y_j) = a_{ij}$ pada setiap titiknya. Polinomial Interpolasi Lagrange dua peubah dapat notasikan sebagai:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) L_{ij}(x, y)$$

$L_{ij}(x, y)$ merupakan perkalian dari interpolasi Lagrange dengan satu peubah yang dapat dinyatakan sebagai:

$$L_{ij}(x, y) = \ell_i(x) \cdot \ell_j(y)$$

dimana:

$$\ell_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$\ell_j(y) = \prod_{l=0, l \neq j}^m \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

Dengan demikian, polinomial $f(x, y)$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} \cdot \ell_i(x) \cdot \ell_j(y)$$

Sehingga polinomial $f(x, y)$ akan melalui semua titik (x_i, y_j) yang memiliki nilai fungsi $f(x_i, y_j)$ yang sesuai (Diestelkamp dkk., 2005.).

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dibahas mengenai metodologi penelitian yang mencakup metode penelitian, lokasi, dan waktu, serta prosedur penelitian.

2.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini berupa studi pustaka dan analisis deskriptif, yakni melakukan penelitian terhadap beberapa literatur yang ada seperti buku, jurnal ilmiah, dan artikel di internet yang terkait sistem ortogonal polinomial dan latin square yang saling orthogonal dengan tujuan menunjang dan memastikan penelitian belum diteliti sebelumnya oleh orang lain.

2.2 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakn di Perpustakaan Universitas Hasanuddin dan Laboratorium Aljbar dan Kombinatorika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin pada sejak Januari 2024.

2.3 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian merupakan Langkah untuk mendapatkan data yang dianalisis sehingga mencapai kesimpulan yang sesuai dengan tujuan penelitian. Prosedur penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Pengumpulan Jurnal dan Literatur Terkait Penelitian
Studi literatur dengan referensi berasal dari buku, jurnal ilmiah, artikel, dan sumber lain yang berhubungan dengan pokok bahasan yang diteliti.
2. Analisis Literatur
Analisa data dimulai dengan menelaah seluruh konstruksi teoritis dari analisis mengenai polinomial permutasi lokal yang telah ada. Target pada tahap ini adalah dapat melakukan pemetaan terhadap hasil-hasil terdahulu, mengetahui dan memahami Teknik/metode pembuktian yang digunakan oleh peneliti terdahulu.
3. Kontruksi Teori

Pada proses konstruksi teori baru ini semua prinsip-prinsip penalaran baik secara induktif dan deduktif akan digunakan secara penuh, mulai dari reduksi data, paparan data, dan penarikan kesimpulan.

4. Verifikasi Hasil

Tahap akhir dilakukan verifikasi semua hasil yang telah dicapai dengan menyajikan semua hasil pada tahap-tahap sebelumnya.

5. Penyepurnaan

Pada tahap ini, hasil penelitian yang telah diperoleh akan ditulis dalam bentuk Skripsi menggunakan Microsoft Word.

2.4 Diagram Alir Penelitian

Untuk Lebih Jelasnya, Prosedur Penelitian dapat digambarkan pada diagram alur berikut:

