

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Leptospirosis adalah penyakit menular yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Leptospira interrogans*. Penyebaran bakteri *Leptospira interrogans* pada manusia terjadi melalui kontak dengan air atau tanah yang terkontaminasi. Leptospirosis juga tergolong ke dalam penyakit zoonosis yang penularannya melalui kontak langsung atau tidak langsung dengan urin atau darah hewan yang terinfeksi. Beberapa hewan yang dapat menularkan leptospirosis adalah tikus, sapi, kucing, dan lain-lain. Pada kasus yang sangat jarang terjadi, penularan leptospirosis juga dapat terjadi antarmanusia melalui ASI pada ibu hamil dan janin atau hubungan seksual (Alodokter, 2023; Kemenkes, 2022).

Leptospirosis merupakan salah satu penyakit yang terjadi di seluruh dunia dengan estimasi 1.03 juta kasus dan 58.900 kasus meninggal setiap tahun. Kejadian tertinggi sebanyak 73% kasus (estimasi) terjadi di Asia Tenggara, Afrika Timur, Karibia, dan Australia yang merupakan daerah tropis (Costa et al., 2015; Rajapakse, 2022). Faktor risiko terjadinya leptospirosis adalah usia, jenis kelamin, keberadaan tikus, genangan air, saluran air tersumbat, dan lain-lain (Ilma et al., 2022). Beberapa dari faktor risiko ini sangat umum terjadi di Indonesia yang memiliki iklim tropis. Hal ini menyebabkan, penyebaran leptospirosis di Indonesia tergolong cukup tinggi. Kasus leptospirosis di Indonesia dilaporkan meningkat sejak tahun 2019, sebanyak 2.554 kasus terjadi pada tahun 2023 dengan kasus meninggal sebanyak 205 kasus dari dua belas provinsi dengan penyumbang kasus terbanyak dari provinsi Jawa Timur dan Jawa Tengah masing-masing sebesar 42,7% dan 36,6% (Kemenkes, 2024). WHO melaporkan angka morbiditas tahunan leptospirosis di Indonesia sekitar 39,2 per 100.000 orang (WHO, 2020).

Tikus memiliki peran yang cukup penting dalam proses penyebaran leptospirosis. *Leptospira* dapat menetap pada tubuh tikus yang terinfeksi. Bagian tubuh tikus yang umumnya ditemukan bakteri *Leptospira* yakni pada tubulus ginjal, sistem reproduksi, hingga mata. *Leptospira* dapat bertahan dalam tubuh tikus selama berbulan-bulan hingga bertahun-tahun. Hal ini menyebabkan tikus dapat menyebarkan *Leptospira* pada lingkungan dengan jumlah yang banyak melalui urin atau cairan tubuh lainnya. Cairan tubuh dari tikus yang mengandung bakteri ini mengontaminasi tanah, air, bahkan bahan makanan yang dapat berkontak langsung dengan manusia (Goarant et al., n.d.; Haake & Levett, 2015).

Manusia dapat tertular leptospirosis melalui luka tidak tertutup, konjungtiva, oral, dan permukaan genital yang terpapar bakteri *Leptospira*. Bakteri *Leptospira* ini dapat berasal dari kontak dengan hewan yang terinfeksi ataupun melalui kontak dengan air atau tanah yang terkontaminasi urin hewan yang terinfeksi. Individu yang berisiko tinggi terpapar leptospirosis yakni dokter hewan, peternak, petani, dan pekerja yang berhubungan dengan lingkungan yang mungkin terkontaminasi bakteri *Leptospira*. Selain itu curah hujan tinggi dan tinggal di daerah rawan banjir juga meningkatkan risiko tertular leptospirosis (Haake & Levett, 2015). Proses penularan penyakit leptospirosis ini dapat diformulasikan ke dalam model matematika.

Menurut Bender (1978) model matematika dapat diartikan sebagai suatu abstrak, penyederhanaan, serta konstruksi matematika dengan meniru masalah di dunia nyata menggunakan bahasa matematika untuk mencapai tujuan tertentu. Model matematika telah digunakan peneliti-peneliti di dunia untuk mendeskripsikan serta memprediksi penyebaran suatu penyakit menular. Penyebaran leptospirosis juga menjadi salah satu penyakit yang dibahas dan diteliti pola penyebarannya menggunakan model matematika. Beberapa penelitian mengenai model matematika penyebaran leptospirosis telah dilakukan sebelumnya yakni, Pimpunchat et al. (2013) menganalisis kestabilan model matematika leptospirosis dengan kompartemen SIR-SI pada populasi manusia dan vektor. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Baca-Carrasco et al. (2015) menggunakan model kompartemen SI-SI-B. Khan et al. (2016) mengonstruksi model SIR-SI pada populasi manusia dan vektor dengan melibatkan *saturated incident rate*. Pada tahun 2021 Bhalraj et al. menganalisis model matematika leptospirosis pada populasi manusia dan hewan pengerat. Penelitian mengenai penyebaran leptospirosis pada tikus di lingkungan pada tahun 2019 oleh Minter et al. memuat model matematika SI-SI-SI-B pada populasi tikus muda, tikus peralihan, dan tikus dewasa, serta populasi *Leptospira*. Chadsuthi et al. (2021) melakukan penelitian mengenai pengaruh banjir dan kondisi cuaca dalam penyebaran leptospirosis di Thailand. Farman et al. (2024) menganalisis dinamika penyebaran leptospirosis menggunakan model matematika *fractal-fractional order*. Engida & Fisseha (2025) mengonstruksi model matematika koinfeksi penyebaran penyakit leptospira dan malaria. Rahayu & Subhan (2022) melakukan pemodelan matematika leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik mengembangkan model matematika penyebaran leptospirosis pada populasi manusia, tikus, dan bakteri *Leptospira* dengan memperhitungkan pengaruh *treatment* terhadap penyebarannya, sehingga penelitian skripsi ini akan dilakukan dengan judul:

“Analisis Kestabilan Model Matematika Penyakit Leptospirosis Pada Populasi Manusia Dan Tikus dengan *Treatment*”

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*?
2. Bagaimana titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*?
3. Bagaimana bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*?
4. Bagaimana analisis kestabilan titik ekuilibrium pada model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*?
5. Bagaimana analisis sensitivitas lokal parameter terhadap bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) pada model matematika penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*?

6. Bagaimana hasil simulasi numerik dari model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*?

1.3. Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, diperlukan batasan masalah agar penelitian terstruktur dan terarah. Batasan-batasan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Model matematika penyebaran penyakit leptospirosis akan dibagi menjadi 9 kompartemen, yaitu kompartemen *Susceptible Human* (S_h), *Exposed Human* (E_h), *Infected Human* (I_h), *Treated Human* (T_h), *Recovered Human* (R_h), *Susceptible Rodent* (S_v), *Infected Rodent* (I_v), *Recovered Rodent* (R_v), dan bakteri *Leptospira* (B).
2. Populasi manusia dan populasi tikus masing-masing konstan, sehingga laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama.
3. Populasi manusia dan populasi tikus adalah populasi tertutup atau diasumsikan tidak terjadi imigrasi dan emigrasi pada kedua populasi.
4. Penularan penyakit dapat terjadi dari tikus ke manusia, bakteri ke manusia dan tikus, dan tikus ke tikus
5. Individu pada subpopulasi I_v dan R_v menyebarkan *Leptospira* pada lingkungan.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengembangkan model matematika penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*.
2. Menganalisis titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik matematika penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*.
3. Menganalisis bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*.
4. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dari model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*
5. Menganalisis sensitivitas lokal parameter terhadap bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) pada model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*
6. Menganalisis simulasi numerik dari model penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Memberikan gambaran tentang penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus dengan *treatment*.
2. Menjadi salah satu kajian pustaka tentang pemodelan matematika mengenai penyebaran penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan tikus.

1.6. Landasan Teori

Pada subbab ini, akan dibahas mengenai teori-teori yang akan digunakan dalam penelitian ini. Adapun teori-teori terkait analisis kestabilan model matematika leptospirosis dengan *treatment* antara lain leptospirosis, persamaan differensial, sistem persamaan differensial, nilai eigen, titik ekuilibrium, linearisasi, kestabilan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, kriteria Routh, analisis sensitivitas parameter, serta beberapa referensi penelitian terdahulu yang digunakan dalam penelitian ini mengenai pemodelan matematika leptospirosis.

1.6.1. Leptospirosis

Leptospirosis adalah penyakit zoonosis disebabkan oleh bakteri gram negatif *Leptospira* yang dapat hidup di ginjal hewan selama beberapa tahun. Penyakit ini dapat menular dari hewan yang terinfeksi ke manusia melalui kontak langsung dengan cairan tubuh hewan atau kontak tidak langsung dengan air, tanah, dan makanan yang terkontaminasi urin hewan. Kelompok individu dengan risiko tinggi adalah peternak, orang yang tinggal di tempat dengan kualitas sanitasi yang buruk, hingga korban banjir. Penyakit ini dapat menyebabkan kerusakan ginjal, gagal hati, masalah pernapasan, hingga kematian. Gejala umum leptospirosis adalah demam, sakit kepala, mual, muntah, diare, mata merah, nyeri otot, sakit perut, dan bintik-bintik merah pada kulit yang tidak hilang saat ditekan. Beberapa penderita mungkin tidak mengalami gejala (CDC, 2024; Kemenkes, 2022; Rajapakse, 2022).

Walaupun kebanyakan kasus leptospirosis tergolong kasus yang ringan dan dapat sembuh tanpa pengobatan, namun tidak jarang terjadi kasus yang parah akibat terserang penyakit ini. Pada kasus parah yang memerlukan perawatan inap, pasien umumnya diberikan *treatment* dengan menggunakan obat jenis antibiotik untuk mengurangi perkembangan bakteri pada tubuh pasien seperti penisilin dan ceftriaxone. Di sisi lain, doxycycline digunakan untuk menangani pasien rawat jalan. Penggunaan doxycycline ini dilaporkan mampu mengurangi durasi sakit pada individu yang mengalami leptospirosis (Haake & Levett, 2015).

Pencegahan leptospirosis yang paling utama adalah menghindari paparan terhadap bakteri *Leptospira*, kontak langsung dengan air atau tanah yang terkontaminasi *Leptospira*, dan juga menghindari kontak dengan hewan yang terinfeksi bakteri *Leptospira*. Selain itu, menggunakan pakaian yang melindungi kontak langsung pada area berisiko, menghindari kontak dengan hewan yang mungkin terinfeksi, menjaga luka tetap tertutup, menjaga kebersihan makan dan minum sebelum dikonsumsi (CDC, 2018, 2024).

1.6.2. Persamaan Differensial

Suatu persamaan yang terdiri atas turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui, fungsi itu sendiri, dan konstan disebut persamaan differensial. Ada dua jenis persamaan differensial berdasarkan jumlah variabel bebasnya, yaitu persamaan differensial biasa atau ordinary differential equation (ODE) dan persamaan differensial parsial atau partial differential equation (PDE). ODE merupakan persamaan differensial yang melibatkan satu variabel bebas, sedangkan PDE adalah persamaan differensial yang melibatkan dua atau lebih variabel bebas (Farlow, 2006).

Definisi 1 Farlow (2006) Suatu ODE dengan orde- n adalah persamaan yang memiliki bentuk umum

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

di mana notasi turunan menunjukkan turunan terhadap x , sehingga, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, dan seterusnya.

Contoh 1

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 5, \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 4y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 5x \quad (4)$$

Berdasarkan Definisi 1, Persamaan (2), (3), dan (4) berturut-turut merupakan ODE berorde 1, berorde 2, dan berorde 3.

Fungsi yang tidak diketahui dalam PDE umumnya dinotasikan dengan u (variabel terikat) yang bergantung terhadap dua atau lebih variabel bebas. PDE sering dinotasikan sebagai $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, Orde suatu PDE merupakan pangkat tertinggi dari turunan parsialnya (Farlow, 2006).

Contoh 2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \quad (5)$$

$$u_x + u_y + uu_x = 0 \quad (6)$$

$$u_t + u_{xz} + u_{xyz} = 2 \quad (7)$$

Persamaan (5), (6), dan (7) berturut-turut adalah PDE dengan dua variabel bebas dan berorde 2; PDE dua variabel bebas dan berorde 1; PDE empat variabel bebas dan berorde 3.

Berdasarkan linearitasnya, persamaan differensial diklasifikasikan menjadi dua yaitu persamaan differensial linear dan non-linear (Farlow, 2006).

Definisi 2 Farlow (2006) Suatu ODE dengan orde- n adalah linear, ketika persamaan differensial dapat ditulis dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \quad (8)$$

di mana $a_0(x), \dots, a_n(x)$ dapat berbentuk konstan atau dalam bentuk fungsi yang diasumsikan kontinu dan $a_0(x) \neq 0$.

Suatu persamaan differensial yang tidak dapat ditulis dalam bentuk umum (8) disebut ODE non-linear.

Berdasarkan Definisi 2, Persamaan (2), (3), dan (4) berturut-turut merupakan ODE linear, linear, dan non-linear.

Bentuk umum PDE orde dua dengan dua variabel adalah sebagai berikut

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (9)$$

di mana A, B, C, D, E , dan G adalah fungsi dari x dan y atau konstan.

Suatu PDE orde dua dengan dua variabel yang tidak memenuhi (9) disebut PDE non-linear (Farlow, 2006). Persamaan (5) dan (6) berturut-turut adalah linear dan non-linear.

1.6.3. Sistem Persamaan Differensial

Sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan differensial yang saling berhubungan disebut sistem persamaan differensial. Bentuk umum dari sistem persamaan differensial adalah sebagai berikut (Boyce et al., 2017).

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Berdasarkan linearitasnya, sistem persamaan differensial terbagi menjadi dua, yaitu sistem persamaan differensial linear dan non-linear (Boyce et al., 2017).

Pada sistem (10), jika fungsi $F_1, \dots, F_n$ adalah fungsi linear dari variabel terikat $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, maka sistem persamaan differensial tersebut dikatakan linear (Boyce et al., 2017). Bentuk umum dari sistem persamaan differensial linear orde pertama adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Sistem persamaan differensial dikatakan nonlinear, jika setidaknya terdapat satu dari fungsi $F_1, \dots, F_n$ pada persamaan (10) adalah persamaan non-linear (Boyce et al., 2017).

Sistem persamaan differensial juga dibagi berdasarkan homogenitasnya. Jika fungsi $g_1(t), \dots, g_n(t)$ adalah nol untuk setiap t , maka sistem dikatakan homogen dan tidak homogen jika $g_1(t), \dots, g_n(t)$ adalah tak nol (Boyce et al., 2017).

Berikut bentuk umum sistem persamaan differensial yang homogen

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n, \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t)x_n, \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n. \end{aligned} \quad (12)$$

1.6.4. Nilai Eigen

Sistem persamaan differensial homogen (12) dapat ditulis dalam bentuk (Braun, 1993).

$$x' = Ax, \quad (13)$$

dengan

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

Misalkan solusi dari (13) yaitu $x(t) = ve^{\lambda t}$, di mana v adalah vektor konstan. Berdasarkan hal tersebut, perhatikan bahwa

$$\frac{d}{dt} ve^{\lambda t} = \lambda ve^{\lambda t}, \quad \text{dan} \quad A(ve^{\lambda t}) = Ave^{\lambda t}. \quad (15)$$

sehingga, $x(t) = ve^{\lambda t}$ adalah solusi dari (13) jika dan hanya jika $\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}$. Selanjutnya, dengan membagi kedua ruas dengan $e^{\lambda t}$ diperoleh

$$Av = \lambda v, \quad (16)$$

dengan demikian, $x(t) = e^{\lambda t}v$ adalah solusi dari (13) jika dan hanya jika memenuhi persamaan (16).

Definisi 3 Braun (1993) Suatu vektor tak nol v yang memenuhi (16) disebut vektor eigen dari A dengan nilai eigen λ .

Suatu vektor eigen matriks A merupakan vektor yang istimewa jika dengan transformasi linear $x \rightarrow Ax$, nilai vektor menjadi kelipatan dari λ itu sendiri (Braun, 1993). Untuk menentukan vektor tersebut, persamaan (16) dapat ditulis sebagai berikut

$$(A - \lambda I)v = \vec{0}, \quad (17)$$

di mana I adalah matriks identitas.

Persamaan (17) memiliki solusi vektor eigen tak nol jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I) = 0$ (Braun, 1993) atau

$$\det \begin{pmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

Determinan matriks $A - \lambda I$ merupakan persamaan karakteristik polinomial derajat n . Persamaan polinomial ini dikenal sebagai karakteristik A , dinotasikan $P(\lambda)$ memiliki setidaknya n akar-akar yang berbeda. Untuk setiap akar-akar polinomial karakteristik $P(\lambda)$, dinotasikan λ_j , dengan $j = 1, 2, \dots, n$, sedemikian sehingga $P(\lambda_j) = 0$, terdapat setidaknya satu vektor tak nol v_j yang memenuhi (16). Berdasarkan hal tersebut, setiap matriks memiliki setidaknya satu nilai eigen, akibatnya memiliki setidaknya satu vektor eigen. Dengan demikian, matriks $n \times n$ memiliki paling banyak n nilai eigen dan n vektor eigen (Braun, 1993).

1.6.5. Titik Ekuilibrium

Suatu titik ekuilibrium pada sistem dinamik menunjukkan kondisi sistem (Astrom & Murray, 2021). x_e adalah titik ekuilibrium dari suatu sistem dinamik

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (19)$$

jika $F(x_e) = 0$.

Jika suatu sistem dinamik memiliki titik equilibrium $x(0) = x_e$, maka sistem tetap pada titik ekuilibrium $x(t) = x_e$ untuk setiap $t \geq 0$. Titik Ekuilibrium dalam suatu sistem

dinamik merupakan fitur yang sangat penting, walaupun tak semua sistem dinamik memiliki titik ekuilibrium (Astrom & Murray, 2021).

Contoh 3

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= x - 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Titik ekuilibrium dari (20)

$$(x_e, y_e) = (2, -2). \quad (21)$$

1.6.6. Linearisasi

Solusi dari suatu sistem persamaan differensial non-linear tidak selalu mudah untuk ditentukan, salah satu teknik yang dapat digunakan adalah teknik linearisasi. Linearisasi merupakan teknik yang dilakukan pada suatu pemodelan matematika yaitu dengan mengubah suatu sistem persamaan differensial nonlinear ke dalam bentuk sistem persamaan differensial linear.

Teknik linearisasi dalam Betounes (2010) suatu sistem persamaan differensial sebagai berikut

$$x' = F(x), \quad (22)$$

adalah sistem persamaan differensial dari suatu bidang vektor $F: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pada suatu himpunan buka $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. Secara aljabar dan numerik ditentukan titik ekuilibrium dari sistem. Titik $x_e \in \mathcal{O}$ sedemikian sehingga bidang vektor $F(x_e) = 0$. Hal tersebut memberi solusi konstan $\alpha(t) \equiv x_e, \forall t \in \mathbb{R}$, sehingga di sekitar titik ekuilibrium $x_e \in \mathcal{O}$ menggambarkan bidang fase sistem linear dari suatu linearisasi sistem non-linear pada titik ekuilibrium x_e sebagai berikut

$$y' = Ay, \quad (23)$$

dengan A adalah matriks Jacobian atau matriks turunan F di x_e

$$A \equiv F'(x_e), \quad (24)$$

Definisi 4 Betounes (2010) Suatu pemetaan $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^k$ di mana $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan memiliki turunan di $\mathcal{O}$, jika setiap turunan parsial dari fungsi-fungsi komponen $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ada di $\mathcal{O}$. Matriks Jacobian dari F di titik $x \in \mathcal{O}$ adalah matriks $k \times n$ sebagai berikut

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

Matriks diatas disebut matriks turunan F di x , sehingga turunan F di x dari pemetaan $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^k$ adalah matriks $k \times n$.

Berdasarkan Definisi 4, linearisasi Persamaan (23) sistem non-linear pada titik ekuilibrium x_e dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_e) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_e) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Contoh 4 Misalkan suatu sistem non-linear sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1^2 + 4x_2, \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Berdasarkan Definisi 4, matriks Jacobian dari sistem (27) adalah $\begin{pmatrix} 4x_1 & 4 \\ 3 & 4x_2 \end{pmatrix}$, dengan titik ekuilibrium $x_e = \left(3, -\frac{9}{2}\right)$, sehingga sistem (27) dapat dilinearisasi ke dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_1' &= 12y_1 + 4y_2, \\ y_2' &= 3y_1 - 18y_2. \end{aligned} \quad (28)$$

1.6.7. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan titik ekuilibrium dapat digunakan untuk menganalisis sistem persamaan differensial. Analisis kestabilan sistem differensial pada titik ekuilibrium dapat ditentukan dengan meninjau nilai eigen sistem persamaan differensial.

Teorema 1 Olsder et al. (2011) Misalkan suatu persamaan differensial $x' = Ax$, dengan A adalah matriks $n \times n$ yang memiliki nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ yang artinya $k \leq n$, dengan titik ekuilibrium $x_e = 0$ adalah

1. Stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, k$. dan untuk setiap bagian imajiner nilai eigen λ_i pada suatu bilangan kompleks dengan $Re(\lambda_i) = 0$ memiliki perkalian aljabar dan perkalian geometri yang sama.
2. Stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$.
3. Tidak stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) > 0$ untuk suatu $i = 1, 2, \dots, k$ atau terdapat λ_i pada bagian imajiner yang perkalian aljabarnya lebih besar dari perkalian geometrinya.

Contoh 5 Misalkan persamaan karakteristik polinomial suatu matriks A sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda. \quad (29)$$

Nilai eigen persamaan karakteristik (29) diperoleh dengan

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 5\lambda + 6 &= 0, \\ (\lambda + 2)(\lambda + 3) &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

sehingga diperoleh nilai eigen dari persamaan karakteristik (29) adalah

$$\lambda_1 = -2 \text{ dan } \lambda_2 = -3. \quad (31)$$

Berdasarkan Teorema 1, sistem persamaan differensial dengan matriks A adalah stabil asimtotik.

1.6.8. Kriteria Routh

Kriteria Routh dapat digunakan untuk meninjau kestabilan suatu sistem tanpa menghitung nilai eigen dari suatu persamaan karakteristik polinomial. Misalkan suatu persamaan karakteristik polinomial sebagai berikut (Olsder et al., 2011).

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \quad (32)$$

Persamaan (32) dapat ditulis dengan menyusun koefisien $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ menjadi dua baris seperti berikut

Tabel 1 Tabel Routh Persamaan (32)

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	0
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	0
b_1	b_2	b_3	...	0
c_1	c_2	c_3	...	0
d_1	d_2	d_3	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
0	0	0	0	0

dengan koefisien $b_i, c_i, \dots$ untuk $i = 1, 2, \dots$ didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & b_2 &= \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \dots & 0 \\
 c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} & c_2 &= \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, & \dots & 0 \\
 d_1 &= \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} & d_2 &= \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}, & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 0 & & 0 & & 0 & 0
 \end{aligned} \quad (33)$$

Kriteria Routh menyatakan akar-akar polinomial $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, dengan $a_n \neq 0$, memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika tabel Routh dengan $n + 1$ kolom pada setiap elemen pada kolom pertama memiliki tanda yang sama atau setiap elemen pada kolom adalah negatif atau positif (Olsder et al., 2011).

Contoh 6 Misalkan persamaan karakteristik polinomial suatu matriks A sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 4\lambda^4 + 5\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 12. \quad (34)$$

Berdasarkan kriteria Routh, suatu sistem persamaan differensial yang memiliki persamaan karakteristik dari suatu matriks A dapat ditentukan kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibriumnya tanpa menghitung nilai eigennya. Tabel Routh persamaan (34) adalah sebagai berikut

Tabel 2 Tabel Routh Persamaan (34)

λ_5	1	5	8	0
λ_4	4	4	12	0
λ_3	4	5	0	0
λ_2	-1	12	0	0
λ_1	53	0	0	0
λ_0	12	0	0	0

Pada Tabel 2 terdapat perubahan tanda pada elemen kolom 1, sedemikian sehingga berdasarkan kriteria Routh, Persamaan (34) memiliki akar-akar non-negatif.

1.6.9. Bilangan Reproduksi Dasar

Pemodelan matematika pada epidemi penyakit menular dapat digunakan untuk mengukur ambang batas suatu penyakit dapat bertahan dalam suatu populasi. Ukuran ambang batas yang dimaksud adalah bilangan reproduksi dasar dinotasikan sebagai $\mathcal{R}_0$. $\mathcal{R}_0$ merupakan rata-rata jumlah kasus infeksi yang disebabkan oleh interaksi satu individu terinfeksi pada populasi susceptible. van den Driessche (2017) menyimpulkan bahwa suatu Disease Free Equilibrium (DFE) dikatakan stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Bilangan Reproduksi Dasar ($\mathcal{R}_0$) dapat ditentukan dengan Matriks Generasi Selanjutnya atau Next Generation Matrix (NGM) dinotasikan sebagai K . Nilai eigen dominan dari K merupakan $\mathcal{R}_0$ (Diekmann et al., 2010). NGM merupakan matriks Jacobian dalam bentuk $T + \Sigma$, dengan T adalah bagian penularan (infeksi baru) dari sistem dan Σ adalah bagian perpindahan subpopulasi (termasuk perpindahan karena kematian ataupun karena mendapatkan kekebalan tubuh) dari sistem. Nilai eigen dominan dari K diperoleh dari $-T\Sigma^{-1}$ yang merupakan NGM dengan domain large atau $K_L = -T\Sigma^{-1}$. Diekmann et al. (2010) membuktikan $\rho(K) = \rho(K_L)$, sehingga $\mathcal{R}_0$ dapat ditentukan dengan formula sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = \rho(K) = \rho(K_L) = \rho(-T\Sigma^{-1}) \quad (35)$$

Contoh 7 Misalkan model SEIR

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta \frac{SI}{N} - \mu S \\ E' &= \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu)E, \\ I' &= \kappa E - (\alpha + \mu)I, \\ R' &= \alpha I - \mu R, \end{aligned} \quad (36)$$

di mana $N = S + E + I + R$. Selanjutnya perhatikan titik ekuilibrium bebas penyakit dari sistem (36) adalah $E = I = R = 0$, sehingga $S = \frac{\Lambda}{\mu}$.

Linearisasi dari sistem bagian infeksi pada titik ekuilibrium adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} E &= \beta \frac{SI}{N} - (\kappa + \mu)E, \\ I' &= \kappa E - (\alpha + \mu)I, \end{aligned} \quad (37)$$

sehingga diperoleh matriks T dan Σ dari persamaan (36) adalah sebagai berikut

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Lambda\beta}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} -(\kappa + \mu) & 0 \\ \kappa & -(\alpha + \mu) \end{pmatrix} \quad (38)$$

diperoleh matriks $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\kappa + \mu)} & 0 \\ -\frac{\kappa}{(\kappa + \mu)(\alpha + \mu)} & -\frac{1}{(\alpha + \mu)} \end{pmatrix}$.

Nilai eigen dominan dapat ditentukan dengan

$$\begin{aligned} K_L &= -T\Sigma^{-1} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{\Lambda\beta}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\kappa + \mu)} & 0 \\ -\frac{\kappa}{(\kappa + \mu)(\alpha + \mu)} & -\frac{1}{(\alpha + \mu)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\Lambda\beta\kappa}{\mu(\kappa + \mu)(\alpha + \mu)} & \frac{\Lambda\beta}{\mu(\alpha + \mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

Berdasarkan persamaan (39) bilangan reproduksi dasar Sistem (36) dapat ditentukan dengan

$$\mathfrak{R}_0 = \rho(K_L) = \frac{\Lambda\beta\kappa}{\mu(\kappa + \mu)(\alpha + \mu)}. \quad (40)$$

1.6.10. Analisis Sensitivitas Lokal Parameter

Analisis Sensitivitas merupakan suatu metode yang digunakan untuk menilai secara kualitatif atau kuantitatif pengaruh yang terjadi pada suatu *output* model dengan parameter yang nilainya tidak pasti sebagai *input*-nya. Umumnya, analisis sensitivitas dibagi menjadi dua kategori yaitu analisis sensitivitas lokal dan analisis sensitivitas global. Beberapa peneliti juga meyakini bahwa metode *screening* (penyaringan) merupakan langkah mendasar dalam melakukan analisis sensitivitas untuk menemukan parameter yang dianggap tidak begitu berpengaruh dalam model yang kompleks untuk memudahkan proses komputasi (Li dkk., 2023; Wu dkk., 2025).

Analisis sensitivitas lokal mengamati variasi *output* dari suatu model dengan memvariasikan nilai dari satu parameter tertentu dengan nilai parameter yang lainnya tetap atau konstan (Wu dkk., 2025). Analisis sensitivitas lokal dapat digunakan pada bilangan reproduksi dasar ($\mathfrak{R}_0$) untuk menentukan parameter-parameter yang memiliki pengaruh besar terhadap nilai $\mathfrak{R}_0$ (Deressa dkk., 2020).

Definisi 5 Deressa et al. (2020) Indeks sensitivitas $\mathfrak{R}_0$ yang dinormalisasi, yang terdiferensialkan terhadap suatu parameter c didefinisikan sebagai

$$\psi_c^{\mathfrak{R}_0} = \frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial c} \frac{c}{\mathfrak{R}_0}. \quad (41)$$

Berdasarkan Definisi 5, Indeks sensitivitas parameter β pada Persamaan (40) dapat ditentukan sebagai berikut

$$\psi_\beta^{\mathfrak{R}_0} = \frac{\partial \mathfrak{R}_0}{\partial \beta} \frac{\beta}{\mathfrak{R}_0} = \frac{\Lambda\kappa}{\mu(\kappa + \mu)(\alpha + \mu)} \frac{\mu(\kappa + \mu)(\alpha + \mu)}{\Lambda\kappa} = 1, \quad (42)$$

Nilai indeks sensitivitas parameter β pada Persamaan (42) adalah $1 > 0$. Berdasarkan penjelasan dalam Deressa et al. (2020), nilai parameter β berbanding lurus dengan nilai $\mathcal{R}_0$ atau semakin besar nilai parameter β maka semakin besar juga nilai $\mathcal{R}_0$ begitupun sebaliknya. Selain itu, nilai 1 juga menunjukkan bahwa dengan meningkatkan 1% nilai β akan meningkatkan nilai $\mathcal{R}_0$ sebanyak 1%.

Nilai indeks sensitivitas parameter suatu model yang bernilai negatif, menunjukkan bahwa nilai parameter tersebut berbanding terbalik dengan nilai $\mathcal{R}_0$. Sedangkan, nilai indeks sensitivitas yang bernilai 0 menunjukkan bahwa nilai parameter tersebut tidak mempengaruhi nilai $\mathcal{R}_0$ (Deressa et al., 2020).

1.6.11. Penelitian Terdahulu

Pada bagian ini, akan diuraikan ulasan dari beberapa penelitian sebelumnya mengenai penyebaran leptospirosis yang berkaitan dengan penelitian yang akan dilakukan.

(Pimpunchat et al., 2013) mengonstruksi model matematika pada manusia dan vektor. Mereka menyimpulkan dua faktor yang memengaruhi keadaan endemik leptospirosis ialah laju penularan dari keadaan *susceptible* ke dalam keadaan *infected* pada kedua populasi γ_H (*human*) dan γ_A (vektor) yang diteliti. Khan et al. (2016) membahas dinamika model matematika dan kontrol optimal penyakit leptospirosis pada populasi manusia dan vektor dengan *saturated incident rate*. Minter et al. (2019) menentukan kontrol optimal penyakit leptospirosis pada populasi vektor dan lingkungan dengan membagi populasi vektor berdasarkan usia. Dalam penelitian tersebut, menyimpulkan bahwa mengurangi subpopulasi tikus yang terinfeksi dapat membantu mengurangi penyebaran leptospirosis di lingkungan. Pada tahun (2021) Bhalraj et al. menggunakan model SIR-SI dalam memahami proses penyebaran leptospirosis pada populasi manusia dan hewan pengerat. Mereka melakukan analisis bifurkasi pada parameter laju kematian tikus serta menyimpulkan bahwa parameter γ_r menjadi salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mengontrol penyebaran penyakit leptospirosis. Selain itu praktis menjaga kebersihan yang buruk dapat meningkatkan risiko tertular.

Beberapa penelitian menggunakan tiga populasi yang melibatkan manusia, vektor (hewan pengerat atau ternak), dan bakteri *Leptospira* atau lingkungan terkontaminasi. Seperti penelitian yang dilakukan Baca-Carrasco et al. (2015) mengonstruksi model matematika dengan kompartemen SI-SI-B pada populasi (manusia, hewan, dan bakteri *Leptospira*). Selain itu, penelitian oleh Chadsuthi et al. (2021) dilakukan berdasarkan data pada dua provinsi dengan kasus terbanyak di Thailand. Mereka mengonstruksi model kompartemen pada populasi manusia, ternak, serta mempertimbangkan keadaan cuaca dan musim banjir sebagai kompartemen lingkungan yang terkontaminasi. Dalam penelitian tersebut, mereka menyimpulkan daerah yang mengalami banjir menjadi faktor penting dalam penyebaran leptospirosis pada manusia dan hewan. Farman et al. (2024) mengonstruksi model matematika *fractal-fractional order* menggunakan Mittag-Leffler Kernel untuk menganalisa dinamika penyebaran leptospirosis pada populasi manusia dan hewan pengerat. Engida & Fisseha (2025) mengonstruksi model matematika deterministik koinfeksi leptospirosis dan malaria pada populasi manusia, tikus, nyamuk, dan *Leptospira*. Dalam

penelitian ini, Engida & Fisseha (2025) juga membahas model matematika penyebaran kedua penyakit secara terpisah dan menentukan kontrol optimal serta strategi *cost-effective* untuk mengurangi penyebaran leptospirosis, malaria, dan koinfeksi dari kedua penyakit pada populasi dengan optimal dan efektif.

(Rahayu & Subhan, 2022) mengonstruksi model matematika dengan menambahkan kompartemen *treatment* pada populasi manusia. Model yang dikonstruksi terdiri dari dua populasi yakni manusia (SITR) dan vektor (SI). Berdasarkan hasil simulasi numerik yang disajikan, mereka menyimpulkan tingkat penularan yang semakin tinggi menyebabkan terjadinya endemik. Selain itu, penyakit leptospirosis dapat mewabah apabila tingkat penularan pada vektor yang terinfeksi serta tingkat kelahiran vektor meningkat. Sebaliknya, penyakit leptospirosis dapat berkurang jika tingkat kematian alami serta tingkat kematian akibat leptospirosis pada vektor meningkat.

Penelitian yang dilakukan Engida & Fisseha (2025) dan Farman et al. (2024) menggunakan asumsi bahwa populasi manusia dapat menyebarkan bakteri *Leptospira* pada lingkungan. Dalam penelitian ini, akan diasumsikan bahwa populasi manusia tidak menyebarkan *Leptospira*. Asumsi ini berdasarkan studi literatur yang dilakukan, populasi manusia mampu menyebarkan bakteri *Leptospira* namun tidak secara signifikan mempengaruhi penyebaran *Leptospira* pada lingkungan serta merupakan *incidental host* yang sangat jarang menularkan leptospirosis. (Barragan dkk., 2017; Haake & Levett, 2015; Lunn, 2022). Dalam penelitian ini juga akan mempertimbangkan penularan yang terjadi antara tikus yang terinfeksi dengan tikus yang sehat. Hal ini dilakukan berdasarkan studi literatur yang menyatakan bahwa tikus sangat mungkin menularkan leptospirosis pada tikus sehat lainnya (Febriani et al., 2024). Selain itu, beberapa literatur juga menyatakan bahwa tikus masih dapat menyebarkan bakteri ke lingkungan pasca infeksi (Haake dan Levett, 2015; Lunn, 2022). Berdasarkan studi literatur tersebut, dalam penelitian ini penulis akan menggunakan asumsi bahwa tikus dapat tertular melalui bakteri yang tersebar di lingkungan dan asumsi bahwa tikus pada populasi R_v masih dapat menyebarkan bakteri ke lingkungan. Penelitian ini juga akan menambahkan kompartemen T (*treatment*) pada populasi manusia seperti yang dilakukan oleh Rahayu & Subhan (2022). Penambahan kompartemen T juga dilakukan berdasarkan studi literatur yang menyimpulkan *treatment* dapat mengurangi durasi dan tingkat keparahan leptospirosis (CDC, 2018; Petakh et al., 2024).