

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Portofolio *Global Minimum Variance* (GMV) adalah salah satu strategi dalam manajemen risiko di pasar modal dengan mengombinasikan beberapa aset untuk memperoleh imbal hasil tertentu dengan risiko minimum. Portofolio GMV dirancang untuk menghasilkan kombinasi bobot aset yang meminimalkan nilai variansi portofolio tanpa mensyaratkan tingkat *return* tertentu, sehingga sangat sesuai bagi investor konservatif maupun investor pemula yang memiliki keterbatasan modal dan toleransi risiko rendah. Walaupun portofolio GMV menawarkan risiko terendah dengan *return* yang tidak terlalu besar, bukan berarti portofolio GMV tidak dibutuhkan oleh investor agresif. Investor agresif dapat menggunakan portofolio GMV sebagai bagian dari strategi diversifikasi yang lebih luas. Dengan memanfaatkan prinsip diversifikasi dan korelasi antar aset, portofolio GMV mampu mereduksi fluktuasi nilai investasi secara lebih efisien dibandingkan investasi pada aset tunggal.

Portofolio GMV membutuhkan matriks variansi-kovariansi untuk menentukan bobot aset yang meminimalkan risiko. Matriks variansi-kovariansi menyatakan variansi aset dan kovariansi antar aset dalam suatu portofolio. Elemen matriks variansi-kovariansi dihasilkan dari *return* aset yang berbentuk bilangan real. Matriks variansi-kovariansi dari portofolio GMV gagal menangkap fluktuasi dan pola hubungan antar aset pada kondisi pasar yang sangat volatil dan memiliki pola hubungan yang rumit sehingga menyebabkan bias. Hal ini disebabkan oleh tingginya volatilitas data saham dan pola hubungan yang kompleks. Volatilitas data yang tinggi membuat asumsi nilai ekspektasi konstan tidak lagi terpenuhi. Selain itu, metode-metode konstruksi portofolio yang didasarkan pada matriks kovariansi empiris tidak menyertakan sifat dinamis aset ke dalam portofolio. Informasi dinamis pada data deret waktu mengacu pada perubahan dan variasi data seiring perubahan waktu. Informasi dinamis pada data deret waktu khususnya data saham antara lain arah perubahan harga, *noise trading*, dan hubungan antar aset yang berubah seiring dengan perubahan waktu. Informasi-informasi tersebut tidak bisa ditemukan

pada GMV berbasis bilangan real, namun dapat ditangkap apabila data *return* berbasis quaternion. Salah satu cara untuk mengatasi masalah volatilitas dan menambah informasi dinamis yang lebih banyak pada data deret waktu adalah dengan melakukan transformasi.

Beberapa peneliti telah mengaplikasikan transformasi Fourier untuk menyelesaikan masalah volatilitas data. Penelitian Kurbatsky et al [2014] menunjukkan bahwa transformasi Fourier dapat diterapkan pada data penggunaan listrik yang volatil di Australia untuk menghitung amplitudo dan frekuensi pada suatu waktu. Machado et al [2010] melakukan analisis sifat dinamis data indeks saham dengan metode *fractional Fourier transform*. Metode *fractional Fourier transform* terbukti sangat baik dalam menangkap dinamika dan kluster indeks pasar saham. Selain itu, Puckovs & Matvejevs [2014] membuat analisis struktur heliks koefisien Fourier dari gelombang volatilitas data saham. Struktur heliks koefisien Fourier membantu dalam memahami struktur pasar dan gelombang volatilitas yang menyebabkan krisis pasar. Nevrla [2016] memperkenalkan penggunaan transformasi Fourier dalam menentukan harga opsi. Metode transformasi Fourier dinilai sangat bermanfaat dalam memodelkan harga opsi, khususnya ketika harga opsi memiliki volatilitas yang tinggi. Song et al. [2021] melakukan prediksi data indeks saham menggunakan transformasi Fourier. Metode *padding-based Fourier transform denoising* yang dikembangkan oleh Song et al. [2021] bermanfaat dalam mengurangi volatilitas data indeks pasar saham harian.

Penelitian-penelitian yang menggunakan transformasi Fourier dalam mengatasi masalah volatilitas data runtun waktu sejalan dengan penelitian yang menggunakan transformasi Hilbert dalam pembentukan portofolio. Uchiyama et al. [2019] menggunakan transformasi Hilbert pada data *return* saham ke bilangan kompleks untuk membentuk portofolio yang dikenal sebagai *Complex Valued Risk Diversification* (CVRD). Implementasi portofolio CVRD telah dikembangkan oleh beberapa peneliti. Pembentukan portofolio CVRD didasarkan pada penggunaan transformasi *Hilbert* dalam peramalan data *time series* non-stasioner [Kurbatsky et al, 2014]. Selain itu, Majidah et al. [2024] juga mengembangkan portofolio *Mean-Variance* (MV) berbasis bilangan kompleks dengan hasil yang lebih baik dibandingkan portofolio MV berbasis real. Transformasi data aset ke bilangan

kompleks bertujuan untuk menangkap informasi dinamis dari data *time series*. Data *return* saham yang ditransformasi ke bilangan kompleks dapat menjadi lebih adaptif dalam menangkap volatilitas dari pergerakan harga saham.

Keberhasilan penerapan bilangan kompleks pada portofolio CVRD menjadi ide bagi pembentukan portofolio yang menggunakan perluasan bilangan kompleks atau quaternion. Konsep quaternion diperkenalkan oleh Sir Rowan Hamilton pada tahun 1843 [Dospra, 2015]. Quaternion merupakan ekspansi dari bilangan kompleks yang tidak komutatif dan dapat diaplikasikan pada bidang tiga dimensi [Ekawati et al., 2019]. Suatu bilangan quaternion mengandung satu komponen real dan tiga komponen imajiner. Beberapa sifat penting dari transformasi Fourier quaternion antara lain translasi, modulasi, konvolusi, korelasi, dan teorema perkalian telah dibuktikan oleh Bahri et al [2018].

Portofolio yang dikembangkan dari CVRD menggunakan konsep quaternion disebut *Quaternion Valued Risk Diversification* (QVRD). Portofolio QVRD memberikan hasil yang lebih baik lagi dibandingkan CVRD karena dapat menangkap lebih banyak informasi dari data *time series* [Sugitomo & Maeta, 2020]. Selain itu, Ekasasmita et al. [2023] dalam penelitiannya membahas tentang nilai harapan dan variansi dalam transformasi Fourier quaternion satu dimensi. Hal ini semakin memperkuat alasan bahwa konsep quaternion dapat digunakan dalam bidang keuangan.

Berdasarkan analisis mendalam dari portofolio CVRD yang dikembangkan oleh Uchiyama et al. [2019] dan QVRD yang dikembangkan oleh Sugitomo & Maeta [2020], diperoleh celah penelitian bahwa portofolio-portofolio tersebut tidak mempertimbangkan heterogenitas dalam pembentukan portofolio. Heterogenitas menyebabkan terjadinya perbedaan dan keberagaman karakteristik dari aset yang diinvestasikan. Teknik klustering dalam pembentukan portofolio dapat mengurangi waktu yang digunakan dalam pemilihan saham, karena saham dengan kategori yang sama dapat dengan mudah dikelompokkan dalam satu kluster [Gubu et al., 2021]. Dengan demikian, peneliti menggunakan metode klustering sebelum pembentukan portofolio agar portofolio yang terbentuk dapat lebih optimal. Teknik klustering *K-Means* telah diterapkan dalam pembentukan portofolio tanpa transformasi [Wu et al., 2022]. Selain itu, penelitian yang dilakukan oleh Park [2020] juga menggunakan

teknik klaster *K-Means* berdasarkan pergerakan harga aset pada pembentukan portofolio GMV. Penelitian yang dilakukan oleh Gubu et al. [2021] menunjukkan bahwa jumlah klaster optimum dapat mencapai risiko terkecil. Tingkat keuntungan saham individu mencapai fluktuasi optimum pada jumlah klaster yang optimum.

Portofolio dengan pendekatan QVRD dan CVRD hanya fokus pada pembentukan bobot yang memaksimalkan keuntungan tanpa mempertimbangkan fluktuasi risiko yang akan dihadapi oleh investor. Pengembangan portofolio yang dapat mereduksi risiko sangat diperlukan, khususnya bagi investor pemula atau investor yang cenderung konservatif. Otoritas Jasa Keuangan (OJK) melaporkan bahwa pada Juli 2023 persentase investor milenial dan gen Z sebesar 80,44% di pasar modal [Surjantoro et al., 2023]. Kemudahan mengakses investasi online bagi generasi muda mengakibatkan meningkatnya jumlah investor pemula di pasar modal. Namun, peningkatan jumlah investor pemula tidak diiringi dengan peningkatan literasi keuangan, sehingga investor pemula tersebut cenderung untuk berinvestasi pada saham berisiko tinggi demi mendapatkan keuntungan besar dalam waktu singkat [Murwani, 2023]. Selain kurangnya literasi keuangan, investor pemula juga senang membeli saham berisiko tinggi karena saham berisiko tinggi cenderung memiliki harga yang lebih murah dibandingkan saham *blue chip*. Saham dengan harga murah memiliki pergerakan harga yang fluktuatif dan harganya belum tentu naik dengan cepat, bahkan harganya bisa menjadi lebih murah lagi, sehingga investor pemula dapat merugi lebih cepat. Konstruksi bobot portofolio yang berfokus meminimumkan risiko sangat diperlukan bagi investor pemula yang masih memiliki modal kecil untuk berinvestasi. Selain itu, saat ini belum ada penelitian terkait pembentukan portofolio GMV yang menggunakan pendekatan transformasi Fourier quaternion dua dimensi. Oleh karena itu, penulis ingin mengembangkan portofolio GMV yang menggunakan konsep quaternion dua dimensi dan berfokus pada pertimbangan risiko.

Secara ringkas, uraian hasil penelitian terdahulu yang terkait dengan transformasi Fourier dan pembentukan portofolio dinyatakan dalam Tabel 1.1.

Tabel 1.1 Penelitian terdahulu.

Tahun	Penulis	Penelitian
1952	Markowitz	Menggunakan konsep mean dan variansi dalam mengalokasikan aset (portofolio <i>mean-variance</i>).
1989	Michaud	Menyatakan bahwa alokasi aset tertentu dalam portofolio <i>mean-variance</i> dapat menjadi sangat besar.
2007	Hitzer	Menyelidiki sifat-sifat transformasi Fourier quaternion yang dapat diaplikasikan pada berbagai bidang.
2010	Machado et al	Melakukan analisis sifat dinamis data indeks saham dengan metode <i>fractional Fourier transform</i> .
2014	Puckovs & Matvejevs	Membuat analisis struktur heliks koefisien Fourier dari gelombang volatilitas data saham.
2014	Kurbatsky	Menggunakan transformasi Hilbert pada peramalan data <i>time series</i> .
2016	Onanaye & Agbolamagbin	Menggunakan metode simpleks dalam menyelesaikan masalah QP pada pembentukan portofolio (GMV).
2019	Uchiyama et al	Membuat portofolio <i>Complex Valued Risk Diversification</i> (CVRD).
2020	Sugitomo & Maeta	Membuat portofolio <i>Quaternion Valued Risk Diversification</i> (QVRD).
2020	Park	Membuat portofolio GMV dengan pendekatan klustering <i>K-Means</i> berdasarkan pergerakan harga aset.
2021	Gubu et al	Menunjukkan bahwa jumlah kluster optimum dapat mencapai risiko terkecil.
2021	Nurwahidah	Menggunakan metode <i>primal dual interior point</i> dalam menyelesaikan masalah QP pada pembentukan portofolio GMV.
2022	Wu et al	Menerapkan teknik klustering <i>K-Means</i> dalam pembentukan portofolio konvensional.
2023	Ekasasmita et al	Membahas nilai harapan dan variansi dalam transformasi Fourier quaternion satu dimensi yang diterapkan dalam bidang keuangan.

Dalam membentuk portofolio GMV berbasis quaternion dua dimensi, penulis mengembangkan penelitian transformasi Fourier quaternion satu dimensi pada teori peluang yang dilakukan oleh Ekasasmita et al. [2023]. Penelitian yang dilakukan oleh Ekasasmita et al. [2023] terbatas pada konsep variansi pada quaternion satu dimensi dan masih perlu dilakukan pengembangan ke arah transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D) agar dapat diperoleh konsep kovariansi pada quaternion. Konsep kovariansi pada quaternion ini nantinya akan diterapkan pada pembentukan matriks varians-kovariansi untuk membangun portofolio GMV. Portofolio GMV berbasis quaternion diharapkan dapat mereduksi risiko lebih optimal dibandingkan portofolio GMV berbasis real.

Penelitian ini bertujuan untuk membangun teori-teori pendukung yang memadai dalam membentuk kovariansi dalam TFQ2D. Penerapan konsep kovariansi dalam TFQ2D berfungsi untuk membentuk portofolio GMV dalam konteks quaternion dengan metode klastering *K-Means*.

1.2. Rumusan Masalah

Saat ini belum ada penelitian terkait pembentukan portofolio GMV berbasis quaternion. Oleh karena itu, diperlukan penelitian fundamental untuk membangun teori yang dapat menghubungkan konsep TFQ2D dengan teori probabilitas. Hubungan konsep TFQ2D dengan teori probabilitas diperlukan untuk membangun konsep kovariansi berbasis quaternion yang nantinya dapat diterapkan untuk membentuk portofolio GMV berbasis quaternion. Berdasarkan uraian masalah tersebut, dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengembangan konsep fungsi karakteristik, nilai ekspektasi, kovariansi, dan momen dalam kaitannya dengan transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D)?
2. Bagaimana implementasi transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D) pada pembentukan portofolio GMV dengan pendekatan klastering *K-Means* pada proses pemilihan aset?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan, tujuan dari penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Membangun teorema konvolusi untuk transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D).
2. Mendefinisikan relasi fungsi karakteristik dan transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D).
3. Menggunakan nilai ekspektasi dalam konteks aljabar quaternion untuk menghitung momen dan kovariansi.
4. Membandingkan sifat-sifat variabel random dan fungsi karakteristik pada transformasi Fourier quaternion satu dimensi dengan transformasi Fourier quaternion dua dimensi dalam teori probabilitas.
5. Membandingkan fungsi karakteristik dan sifat variabel random transformasi Fourier quaternion dua dimensi dengan teori probabilitas klasik.
6. Mengaplikasikan transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D) pada pembentukan portofolio GMV dengan pendekatan klastering *K-Means* pada proses pemilihan aset.

1.4. Kegunaan Penelitian

Penelitian ini bermanfaat dalam pengembangan ilmu pengetahuan pada bidang matematika keuangan, teori optimasi keuangan, dan manajemen risiko kuantitatif. Pembentukan portofolio GMV menggunakan konsep TFQ2D mempertimbangkan pendekatan klastering *K-Means* pada proses pemilihan aset. Metode TFQ2D pada bidang keuangan diharapkan dapat diterapkan oleh perusahaan manajer investasi dalam melakukan seleksi aset dan menentukan alokasi aset pada reksadana atau instrumen investasi lainnya.

1.5. Keterbaruan Penelitian

Keterbaruan yang menjadi bahan kajian dalam penelitian ini adalah:

1. Pengembangan definisi dan sifat fungsi karakteristik dalam aljabar quaternion dan hubungannya dengan TFQ2D.
2. Pengembangan teorema konvolusi yang bersesuaian dengan TFQ2D.
3. Pengembangan konsep nilai ekspektasi, kovariansi, dan momen TFQ2D.
4. Pembentukan portofolio GMV berbasis TFQ2D.

1.6. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini antara lain sebagai berikut:

1. Penelitian ini murni mengembangkan sifat fungsi karakteristik quaternion tanpa bergantung pada bentuk distribusi tertentu.
2. Penelitian ini menitikberatkan pada formulasi aljabar dan transformasi quaternion. Pembahasan mengenai norm probabilistik berbasis teori ukuran untuk menjamin konsistensi sifat-sifat karakteristik belum menjadi fokus utama dan direncanakan sebagai pengembangan pada studi lanjutan.

BAB II

TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION DUA DIMENSI DALAM PEMODELAN PROBABILITAS

2.1. Abstrak

Transformasi Fourier memegang peranan penting dalam statistika, matematika terapan, dan teknik. Pada penelitian ini, diperkenalkan definisi transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D) yang merupakan pengembangan dari transformasi Fourier dua dimensi. Selain itu, penelitian ini juga mengembangkan teorema konvolusi baru yang berkaitan dengan TFQ2D. Penelitian ini mengkaji fungsi karakteristik dalam kerangka aljabar quaternion dan sifat-sifat pentingnya. Berdasarkan kajian penelitian, akan dicari nilai harapan, variansi, kovariansi, dan hubungannya dengan transformasi Fourier quaternion dua dimensi. Ilustrasi hasil penelitian berupa contoh juga disertakan untuk melihat perbedaan TFQ2D dengan kasus klasik.

keywords: Transformasi Fourier quaternion dua dimensi, quaternion, fungsi karakteristik, fungsi kepadatan peluang quaternion, kovariansi quaternion.

2.2. Pendahuluan

Transformasi Fourier merupakan alat matematika yang penting dan telah digunakan secara luas dalam berbagai bidang studi ilmiah, termasuk analisis sinyal dan pemrosesan gambar ([Bracewell, 2000], [Mallat, 2001] dan [Athanasiotis, 1977]). Sebagai generalisasi alami dari transformasi Fourier dua dimensi (TF2D), transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D) telah menarik perhatian yang signifikan dari banyak peneliti dalam aspek terapan dan teoretis ([Grigoryan et al., 2015], [Bhatti et al., 2021], [Hitzer, 2016], [Hitzer, 2016]. [Bahri et al., 2013], [Bihan et al., 2003], [Grigoryan & Aghaian, 2015], [Hitzer, 2017], [Cheng et al., 2018], [Assefa et al., 2009]). Berbagai sifat TFQ2D telah diteliti secara rinci, seperti linearitas, modulasi, teorema konvolusi, turunan parsial, konservasi energi, dan prinsip ketidakpastian. Sifat-sifat ini merupakan modifikasi dari sifat-sifat yang sesuai pada TF2D.

Di sisi lain, penggunaan transformasi Fourier klasik dalam pemodelan probabilitas sangat luas. Hal ini terkait dengan fungsi karakteristik dari variabel acak bernilai real untuk menghitung momen, variansi, kovariansi, fungsi distribusi, dan sebagainya. Dalam Richter [2023], penulis merepresentasikan fungsi karakteristik menggunakan vektor dan transformasi Fourier klasik, lalu memberikan beberapa contoh terkait dengan fungsi karakteristik yang diusulkan. Teori probabilitas yang lebih umum diteliti oleh Fahlaoui & Monaim [2024] menggunakan transformasi Clifford–Fourier satu dimensi. Berbeda dengan metode transformasi Fourier quaternion satu dimensi dalam pemodelan probabilitas [Ekasasmita et al., 2023], metode transformasi Fourier quaternion dua dimensi dalam pemodelan probabilitas quaternion lebih kompleks. Penelitian ini membahas penerapan metode transformasi Fourier quaternion dua dimensi dalam pemodelan probabilitas quaternion. Penelitian ini dapat dianggap sebagai perpanjangan dan kelanjutan dari penelitian Ekasasmita et al. [2023]. Penelitian ini dimulai dengan memperkenalkan transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D) dan menggali lebih dalam beberapa sifat berguna dari transformasi ini. Penelitian ini membahas lebih dalam terkait aplikasi transformasi TFQ2D dalam pemodelan probabilitas. Secara khusus, penulis mempelajari fungsi karakteristik dalam konteks aljabar quaternion dan menjelaskan hubungannya dengan transformasi Fourier quaternion dua dimensi. Beberapa sifat fungsi karakteristik quaternion juga diteliti secara rinci. Penulis memanfaatkan hasil tersebut untuk menghitung momen, variansi, dan kovariansi dalam konteks aljabar quaternion. Penelitian ini menyajikan beberapa contoh untuk memverifikasi perbedaan TFQ2D dengan kasus klasik.

Penelitian ini terdiri atas beberapa bagian. Bagian 2.3. akan membahas secara singkat pengetahuan dasar aljabar quaternion yang diperlukan untuk bagian selanjutnya. Pada bagian 2.4. disajikan sifat-sifat dari 2DQFT, seperti teorema inversi dan rumus Parseval. Bagian ini juga menetapkan bentuk baru dari teorema konvolusi, termasuk TFQ2D. Pada bagian 2.5., dibahas kegunaan TFQ2D dalam pemodelan probabilitas. Kesimpulan disajikan pada 2.6..

2.3. Quaternion

Quaternion adalah perluasan bilangan real dan kompleks ke dimensi yang lebih tinggi. Himpunan quaternion dilambangkan dengan $\mathbb{H}$. Sebuah bilangan quaternion q dapat ditulis dalam bentuk berikut [Morais et al., 2014]

$$\mathbb{H} = \{q = q^a + \mathbf{i}q^b + \mathbf{j}q^c + \mathbf{k}q^d : q^a, q^b, q^c, q^d \in \mathbb{R}\}, \quad (2.1)$$

dimana unsur imajiner $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, dan $\mathbf{k}$ memenuhi:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1. \quad (2.2)$$

Persamaan ini akan menghasilkan

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}. \quad (2.3)$$

Unsur skalar dan vektor quaternion $q = q^a + \mathbf{i}q^b + \mathbf{j}q^c + \mathbf{k}q^d$ masing-masing dinotasikan sebagai $S_c(q) = q^a$ and $V_c(q) = \mathbf{q} = \mathbf{i}q^b + \mathbf{j}q^c + \mathbf{k}q^d$. Berdasarkan (2.2) dan (2.3) diperoleh hasil kali quaternion qp sebagai berikut

$$qp = q^a p^a - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q^a \mathbf{p} + p^a \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \quad (2.4)$$

dimana

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = q^b p^b + q^c p^c + q^d p^d,$$

dan

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \mathbf{i}(q^c p^d - q^d p^c) + \mathbf{j}(q^d p^b - q^b p^d) + \mathbf{k}(q^b p^c - q^c p^b). \quad (2.5)$$

Sama seperti pada bilangan kompleks, konjugat dari quaternion q didefinisikan sebagai berikut

$$\bar{q} = q^a - \mathbf{i}q^b - \mathbf{j}q^c - \mathbf{k}q^d, \quad (2.6)$$

yang memenuhi

$$\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}, \quad \forall p, q \in \mathbb{H}. \quad (2.7)$$

Berdasarkan (2.7) dapat dilihat dengan jelas bahwa konjugat quaternion mengubah urutan perkalian quaternion. Dari hubungan (2.6), diperoleh modulus sebagai berikut

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{(q^a)^2 + (q^b)^2 + (q^c)^2 + (q^d)^2}. \quad (2.8)$$

Bagian skalar dari setiap quaternion memenuhi sifat simetri sebagai berikut

$$S_c(rpq) = S_c(prq) = S_c(qrp), \quad \forall p, q, r \in \mathbb{H} \quad (2.9)$$

Persamaan dan pertidaksamaan ini memiliki peran penting dalam menentukan beberapa sifat transformasi Fourier quaternion. Selain itu, dapat dengan mudah diverifikasi bahwa

$$|S_c(q)| \leq |q|, \quad |q^2| = |q|^2, \quad |qp| = |q||p|, \quad \text{and} \quad |q + p| \leq |q| + |p|, \quad \forall p, q \in \mathbb{H}. \quad (2.10)$$

Berdasarkan persamaan (2.26), (2.8), dan (2.10), diperoleh invers dari suatu bilangan quaternion tidak nol $q \in \mathbb{H}$ sebagai berikut

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \quad (2.11)$$

Dimana $|q| = 1$, q disebut unit quaternion dan $q^a = 0$, q disebut quaternion murni.

Hasil kali untuk dua fungsi $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$ adalah

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad d\mathbf{x} = dx_1 dx_2. \quad (2.12)$$

Untuk $f = g$, diperoleh

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

2.3.1. Posisi Matematis Quaternion

Secara aljabar, quaternion tidak memenuhi aksioma *field* karena operasi perkaliannya bersifat tidak komutatif. Pada quaternion berlaku relasi $ij = k \neq ji = -k$, sehingga hukum komutatif tidak dipenuhi. Meskipun demikian, setiap elemen quaternion tidak nol memiliki invers, sehingga $\mathbb{H}$ digolongkan sebagai *division ring* atau *skew field*. Struktur ini menempatkan quaternion pada kelas aljabar yang lebih umum daripada *field*, namun tetap cukup kuat untuk melakukan analisis matematis lanjutan, termasuk definisi eksponensial quaternion dan transformasi Fourier quaternion [Morais et al., 2014, Hitzer, 2016].

Quaternion tergolong sebagai ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan dimensi empat. Setiap quaternion $q = q^a + iq^b + jq^c + kq^d$ dapat diidentifikasi dengan vektor $(q^a, q^b, q^c, q^d) \in \mathbb{R}^4$. Struktur ruang vektor ini memungkinkan penerapan teori analisis fungsional, khususnya dalam pendefinisian ruang fungsi bernilai quaternion seperti $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{H})$ [Morais et al., 2014]. Namun, struktur ruang vektor quaternion ini bersifat sekunder dan tidak menggantikan struktur aljabar quaternion yang lebih kaya. Meskipun $\mathbb{H}$ secara struktur vektor isomorfik dengan $\mathbb{R}^4$, kedua objek tersebut tidak ekuivalen secara aljabar. Ruang $\mathbb{R}^4$ tidak memiliki operasi perkalian internal yang bermakna dan tertutup, sedangkan quaternion memiliki operasi perkalian yang terdefinisi secara intrinsik dan bersifat non-komutatif. Oleh karena itu, quaternion tidak dapat diperlakukan hanya sebagai vektor berdimensi empat tanpa kehilangan sifat-sifat fundamentalnya. Dalam Transformasi Fourier Quaternion dua dimensi, perbedaan ini menjadi krusial karena memungkinkan adanya kernel transformasi dua sisi yang tidak dapat direpresentasikan dalam kerangka Fourier klasik berbasis ruang vektor semata [Hitzer , 2007, 2016].

Dalam konteks analisis Fourier quaternion, fungsi-fungsi yang dikaji umumnya merupakan fungsi bernilai quaternion yang terdefinisi pada ruang Euclidean dan berada dalam ruang Lebesgue, seperti $L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ atau $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$. Integrasi Lebesgue terhadap fungsi quaternion dilakukan secara komponen, yakni melalui integrasi terhadap bagian real dan imajiner secara terpisah. Pendekatan ini memastikan bahwa konsep integral, norma, serta teorema Parseval/ Plancherel tetap sah dalam kerangka quaternion. Dengan demikian, struktur ruang fungsi berperan sebagai landasan analitis, sementara struktur ring quaternion berperan dalam operasi transformasi dan manipulasi aljabar Cheng et al. , Bahri et al. , 2018, 2013.

2.4. Transformasi Fourier Quaternion dan Sifat-sifatnya

Pada bagian ini terdapat definisi transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D). Penulis menyajikan rumus Parseval dan teorema konvolusi yang akan digunakan . Informasi lebih rinci terkait mengenai sifat-sifat 2DQFT telah dijelaskan dalam [[Hitzer , 2007], [Hitzer, 2016], [Hitzer, 2017]].

Definisi 2.4.1 *Transformasi Fourier quaternion dua dimensi dari fungsi $f \in$*

$L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H}) \cap L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}_H\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 x_1} f(x) e^{j\omega_2 x_2} dx, \quad (2.14)$$

untuk $x, \omega \in \mathbb{R}^2$.

Perlu diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_H(\omega)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 x_1} f(x) e^{j\omega_2 x_2} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |e^{i\omega_1 x_1} f(x) e^{j\omega_2 x_2}| dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

menunjukkan $|\mathcal{F}_H(\omega)|$ dibatasi oleh konstanta quaternion $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}$.

Selanjutnya, invers TFQ2D dengan struktur yang telah disesuaikan dengan aljabar quaternion adalah sebagai berikut [Hitzer, 2016, Cheng et al., 2018].

Definisi 2.4.2 Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dan $\mathcal{F}_H\{f\} \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$. Invers TFQ2D adalah sebagai berikut

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega_1 x_1} \mathcal{F}_H\{f\}(\omega) e^{-j\omega_2 x_2} d\omega. \quad (2.16)$$

Berdasarkan definisi 2.4.2, dapat diperoleh teorema Plancherel/ parseval yang akan digunakan pada pembuktian dengan norm dan bagian skalar quaternion [Cheng et al., 2018].

Teorema 2.4.1 Misalkan fungsi quaternion $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}_H\{f\}(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.17)$$

yang sering disebut Plancherel formula untuk TFQ2D.

Salah satu hasil fundamental dalam TFQ2D adalah teorema konvolusi. Diketahui bahwa bentuk teorema konvolusi dalam TFQ2D lebih rumit dibandingkan dengan teorema konvolusi dalam transformasi Fourier (lihat [Bahri et al., 2013] untuk detail lebih lanjut). Pada bagian ini akan diperkenalkan definisi konvolusi dan korelasi, lalu akan dikembangkan versi baru teorema konvolusi yang terkait dengan 2DQFT.

Definisi 2.4.3 Misalkan dua fungsi $f, g \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$. Operator konvolusi dari f dan g dideskripsikan sebagai berikut

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (2.18)$$

Berdasarkan definisi 2.4.3, diperoleh teorema konvolusi baru TFQ2D sebagai berikut.

Teorema 2.4.2 Untuk f, g di $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, memehuni

$$\mathcal{F}_H\{f \star g\}(\omega) = \mathcal{F}_H\left\{\mathcal{F}_H\{f\}(\omega)(g^a + \mathbf{j}g^c)\right\}(\omega) + \mathcal{F}_H\left\{\mathcal{F}_H\{f\}(\omega_1, -\omega_2)(ig^b + \mathbf{k}g^d)\right\}(\omega). \quad (2.19)$$

Secara khusus, diperoleh

$$\mathcal{F}_H\{f \star g\}(\omega) = \mathcal{F}_H\{\mathcal{F}_H\{f\}g\}(\omega), \quad (2.20)$$

dimana g pada kasus ini adalah fungsi real.

Bukti. Berdasarkan definisi 2.4.3, dipunyai

$$\mathcal{F}_H\{f \star g\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 x_1} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})e^{j\omega_2 x_2} d\mathbf{y}d\mathbf{x}. \quad (2.21)$$

Variabel $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$ diganti dan diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_H\{f \star g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1(y_1+z_1)} f(\mathbf{y})g(\mathbf{z})e^{j\omega_2(y_2+z_2)} d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 y_1} e^{i\omega_1 z_1} f(\mathbf{y})g(\mathbf{z})e^{j\omega_2 y_2} e^{j\omega_2 z_2} d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 y_1} e^{i\omega_1 z_1} f(\mathbf{y})(g^a(\mathbf{z}) + ig^b(z_1, z_2) + \mathbf{j}g^c(\mathbf{z}) + \mathbf{k}g^d(z_1, z_2)) \\ &\quad e^{j\omega_2 y_2} e^{j\omega_2 z_2} d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 y_1} e^{i\omega_1 z_1} f(\mathbf{y})e^{j\omega_2 y_2} (g^a(\mathbf{z}) + \mathbf{j}g^c(\mathbf{z}))e^{j\omega_2 z_2} d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 y_1} e^{i\omega_1 z_1} f(\mathbf{y})e^{-j\omega_2 y_2} (ig^b(\mathbf{z}) + \mathbf{k}g^d(\mathbf{z}))e^{j\omega_2 z_2} d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 y_1} \mathcal{F}_H\{f\}(\omega)(g^a(\mathbf{z}) + \mathbf{j}g^c(\mathbf{z}))e^{j\omega_2 y_2} d\mathbf{z} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 y_1} \mathcal{F}_H\{f\}(\omega_1 - \omega_2)(ig^b(\mathbf{z}) + \mathbf{k}g^d(\mathbf{z}))e^{j\omega_2 y_2} d\mathbf{z} \\ &= \mathcal{F}_H\left\{\mathcal{F}_H\{f\}(\omega)(g^a + \mathbf{j}g^c)\right\}(\omega) + \mathcal{F}_H\left\{\mathcal{F}_H\{f\}(\omega_1 - \omega_2)(ig^b + \mathbf{k}g^d)\right\}(\omega), \end{aligned}$$

yang merupakan teorema baru dari konvolusi TFQ2D.

Pembentukan teorema 2.4.2 terinspirasi dari masalah konvolusi non komutatif. Teorema konvolusi quaternion bekerja dengan memanfaatkan dekomposisi komponen quaternion, sehingga masalah non-komutativitas dapat dikendalikan secara sistematis.

Korelasi quaternion didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.4 *Operator korelasi yang berhubungan dengan TFQ2D untuk dua fungsi quaternion $f, g \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ diberikan oleh integral*

$$(f \circ g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x + y) \overline{g(y)} dy. \quad (2.22)$$

Definisi 2.4.4 memperluas korelasi sinyal klasik ke fungsi quaternion dua dimensi. Fungsi utamanya bukan untuk perhitungan probabilitas, tetapi untuk melengkapi struktur analisis quaternion.

2.5. Transformasi Fourier Quaternion Dua Dimensi dalam Probabilitas Quaternion

Dalam Richter [2023] dan Olhede [2006], diteliti fungsi karakteristik dalam konteks bilangan kompleks. Penelitian Ekasasmita et al. [2023] memaparkan fungsi karakteristik quaternion menggunakan transformasi Fourier quaternion satu dimensi. Pada bagian ini, penulis meneliti penggunaan transformasi Fourier quaternion dua dimensi dalam probabilitas quaternion seperti yang ditunjukkan Tabel 2.1. Berdasarkan tujuan ini, solusi dimulai dengan definisi berikut:

Definisi 2.5.1 *Misalkan $X = (X_1, X_2)$ adalah vektor berdimensi dua dengan elemen variabel random bernilai real. Suatu fungsi bernilai quaternion $f_X(x) = f_X^a(x) + i f_X^b(x) + j f_X^c(x) + k f_X^d(x)$ disebut fungsi kepadatan peluang quaternion dari X (bandingkan dengan [Loots, 2010] dan [Brémaud, 2014]) jika*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_X^l(x) dx = 1, \quad f_X^l(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, l = a, b, c, d. \quad (2.23)$$

Pada kasus ini, $f_X^l(x)$ adalah suatu fungsi kepadatan peluang bernilai real. Fungsi distribusi kumulatif quaternion dinyatakan sebagai berikut (bandingkan dengan [Olhede, 2006])

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} F_X(u, v) \Big|_{u=x, v=y}. \quad (2.24)$$

Peluang dalam quaternion P yang berhubungan dengan F_X dari X_1 dan X_2 adalah sebagai berikut

$$F_X(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2). \quad (2.25)$$

Tabel 2.1 Perbandingan teori probabilitas dalam quaternion satu dimensi dan dua dimensi

Sifat	Teori Probabilitas dalam Quaternion 1D	Teori Probabilitas dalam Quaternion 2D
Fungsi karakteristik	$\phi_X(t) = \phi_X^a(t) + i\phi_X^b(t) + j\phi_X^c(t) + k\phi_X^d(t)$	$\phi_X(t) = \phi_X^a(t) + i\phi_X^b(t) + j\phi_X^c(-t_1, t_2) + k\phi_X^d(-t_1, t_2)$
Momen	$E[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} \phi_X(0)(-i)^k$	$E[X_1^m X_2^n] = i^{-m} j^{-n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t_1^m \partial t_2^n} \phi_X(0)$
Variansi,	$var(X) = \frac{d^2}{dt^2} \phi_X(0)(-i)^2 -$	$Cov(X_1, X_2) = i \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_X(0) j -$
Kovariansi	$\left(\frac{d}{dt} \phi_X(0)(-i) \right)^2$	$\left(i \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_X(0) \frac{\partial}{\partial t_2} \phi_X(0) j \right)^2$

Sebagai perluasan dari konsep nilai ekspektasi pada teori probabilitas klasik, nilai ekspektasi dalam kerangka quaternion didefinisikan dengan tetap mempertahankan struktur integral Lebesgue pada domain real. Pendekatan ini memastikan konsistensi dengan ekspektasi probabilitas konvensional, sekaligus memungkinkan fungsi kepadatan peluang bernilai quaternion digunakan dalam pemodelan yang lebih tinggi. Definisi 2.5.2 berikut merupakan generalisasi dari ekspektasi klasik ke dalam konteks quaternion.

Definisi 2.5.2 (Nilai ekspektasi) Misalkan $X = (X_1, X_2)$ adalah dua variabel random bernilai real dengan fungsi kepadatan peluang quaternion $f_X(x)$. Nilai ekspektasi dari X_1 dan X_2 didefinisikan sebagai

$$E[X_1 X_2] = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_X(x) dx. \quad (2.26)$$

Nilai ekspektasi X_1 adalah

$$E[X_1] = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 f_X(x) dx, \quad (2.27)$$

dan nilai ekspektasi dari X_2 didefinisikan sebagai

$$E[X_2] = \int_{\mathbb{R}^2} x_2 f_X(x) dx. \quad (2.28)$$

Persamaan (2.26) dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 E[X_1 X_2] &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 (f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x}) + \mathbf{i} f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x}) + \mathbf{j} f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x}) + \mathbf{k} f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mathbf{i} \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mathbf{j} \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &\quad + \mathbf{k} \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= E_a[X_1 X_2] + \mathbf{i} E_b[X_1 X_2] + \mathbf{j} E_c[X_1 X_2] + \mathbf{k} E_d[X_1 X_2], \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

dimana

$$E_l[X_1 X_2] = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad l = a, b, c, d \tag{2.30}$$

Ilustrasi dari hasil di atas dinyatakan dalam contoh berikut.

Contoh 1 Misalkan X_1 dan X_2 memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1 x_2 + 3\mathbf{i}x_1^2 + 3\mathbf{j}x_2^2 + \mathbf{k}(x_1 + x_2), & \text{jika } 0 < x_1, x_2 < 1 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{2.31}$$

Tentukan nilai ekspektasi dari X_1 dan X_2 .

Penyelesaian. Dapat dikonfirmasi bahwa

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad \text{untuk suatu } l = a, b, c, d. \tag{2.32}$$

Nilai ekspektasi X_1 adalah

$$\begin{aligned}
 E[X_1] &= \int_0^1 \int_0^1 x_1 (4x_1 x_2 + 3\mathbf{i}x_1^2 + 3\mathbf{j}x_2^2 + \mathbf{k}(x_1 + x_2)) dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{7}{12}\mathbf{k}. \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

Nilai ekspektasi dari X_2 adalah

$$\begin{aligned}
 E[X_2] &= \int_0^1 \int_0^1 x_2 (4x_1 x_2 + 3\mathbf{i}x_1^2 + 3\mathbf{j}x_2^2 + \mathbf{k}(x_1 + x_2)) dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{7}{12}\mathbf{k}. \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

Nilai ekspektasi dari $X_1 X_2$ adalah

$$\begin{aligned}
 E[X_1 X_2] &= \int_0^1 \int_0^1 x_1 x_2 (4x_1 x_2 + 3\mathbf{i}x_1^2 + 3\mathbf{j}x_2^2 + \mathbf{k}(x_1 + x_2)) dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{4}{9} + \frac{3}{8}\mathbf{i} + \frac{3}{8}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}. \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan (2.33), (2.34) and (2.35), dapat dilihat bahwa

$$E_i[X_1 X_2] = E_i[X_1] E_i[X_2], \quad i = a, b, c. \quad (2.36)$$

Hasil kali dari $E[X_1]E[X_2]$ adalah

$$\begin{aligned} E[X_1]E[X_2] &= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}i + \frac{1}{2}j + \frac{7}{12}k \right) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{4}j + \frac{7}{12}k \right) \\ &= \frac{4}{9} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} - \frac{49}{144} + \left(\frac{2}{6} + \frac{6}{12} + \frac{7}{24} - \frac{7}{12} \right)i + \left(\frac{2}{3} - \frac{21}{48} - \frac{2}{6} + \frac{7}{24} \right)j \\ &\quad + \left(\frac{14}{36} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{14}{36} \right)k \\ &= \frac{-31}{48} + \frac{11}{16}i + \frac{11}{16}j + 1\frac{13}{144}k. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Definisi fungsi karakteristik quaternion terinspirasi oleh fungsi karakteristik dalam teori probabilitas klasik yang dibangun melalui transformasi Fourier dengan penyesuaian pada sifat non-komutatif aljabar quaternion. Fungsi (2.38) dapat memberikan representasi frekuensi bernilai quaternion dalam teori peluang.

Definisi 2.5.3 Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ adalah variabel random real dengan fungsi kepadatan peluang quaternion $f_{\mathbf{X}}(x)$. Fungsi karakteristik dari X_1 and X_2 , $\phi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$, didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= E[e^{it_1 X_1} e^{jt_2 X_2}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(x) e^{jt_2 x_2} dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Berdasarkan persamaan (2.38), generalisasi fungsi karakteristik dalam dimensi yang lebih tinggi adalah sebagai berikut.

Catatan 1. Asumsikan $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{H})$, $n \in \mathbb{N}$. Definisi dari transformasi Fourier quaternion n dimensi dari fungsi f adalah

$$\mathcal{F}_{\mathbf{H}}\{f\}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{j\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

untuk $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Selain itu, generalisasi fungsi karakteristik dari $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\phi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{H}$, adalah sebagai berikut

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{j\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

Teorema 2.5.1 Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ adalah variabel random real. Jika fungsi kepadatan peluang quaternion dihubungkan dengan fungsi karakteristik quaternion $\phi_{\mathbf{X}}$ memenuhi

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})| < \infty,$$

maka $\phi_{\mathbf{X}}$ kontinu seragam.

Bukti. Perhitungan sederhana menghasilkan

$$\begin{aligned} |\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t} + \mathbf{h}) - \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{i x_1(t_1 + h_1)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{j x_2(t_2 + h_2)} - e^{i x_1 t_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{j x_2 t_2} d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{i x_1 h_1} \left(e^{i x_1 t_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{j x_2 h_2} - f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \right) e^{j x_2 t_2} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left(e^{i x_1 h_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{j x_2 h_2} - f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \right) \right| d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Berdasarkan ketidaksamaan segitiga untuk quaternion (2.10), maka

$$\begin{aligned} |\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t} + \mathbf{h}) - \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(|e^{i x_1 h_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{j x_2 h_2}| + |f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})| \right) d\mathbf{x} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dengan teorema konvergensi dominan berarti bahwa $|\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t} + \mathbf{h}) - \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| \rightarrow 0$ ketika $\mathbf{h} \rightarrow 0$ dan begitu juga, $\phi_{\mathbf{X}}$ kontinu seragam.

Teorema kontinuitas seragam fungsi karakteristik terinspirasi dari sifat kontinuitas fungsi karakteristik dalam teori probabilitas klasik yang berbasis transformasi Fourier. Teorema 2.5.1 dapat menjamin kestabilan analisis frekuensi quaternion, sehingga fungsi karakteristik dapat digunakan dengan baik untuk kajian sifat distribusi dan pembuktian teorema lanjutan.

Teorema 2.5.2 Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ adalah variabel random real. Jika X_1 dan X_2 independen dan fungsi kepadatan peluang quaternion $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ dapat difaktorkan sebagai

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \quad (2.40)$$

maka

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi_{X_1}(t_1) \phi_{X_2}(t_2) \quad (2.41)$$

Bukti. Misalkan

$$\begin{aligned}
 \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= E[e^{it_1 X_1} e^{jt_2 X_2}] \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Asumsikan f_{X_2} adalah fungsi bernilai real, hubungan (2.43) berubah menjadi

$$\begin{aligned}
 \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{X_1}(x_1) e^{jt_2 x_2} f_{X_2}(x_2) d\mathbf{x},
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

terbukti.

Persamaan (2.38) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} (f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x}) + i f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x}) + j f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x}) + k f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x})) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} + i \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \\
 &\quad + j \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} + k \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \\
 &= \phi_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{t}) + i \phi_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{t}) + j \phi_{\mathbf{X}}^c(-t_1, t_2) + k \phi_{\mathbf{X}}^d(-t_1, t_2),
 \end{aligned}$$

dimana

$$\phi_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x}, \quad l = a, b, c, d. \tag{2.44}$$

Proposisi 1. Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ adalah variabel random real, maka diperoleh

1. $\phi_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{0}) = 1, \quad \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}.$
2. $|\phi_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{t})| \leq 1, \quad |\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| \leq 4, \quad l = a, b, c, d$

dimana $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1) = 1 + i + j + k.$

Bukti. Berdasarkan persamaan (2.23) and (2.44), dapat dilihat bahwa

$$\phi_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \tag{2.45}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} (f_{\mathbf{X}}^a + i f_{\mathbf{X}}^b + j f_{\mathbf{X}}^c + k f_{\mathbf{X}}^d) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^a d\mathbf{x} + i \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^b d\mathbf{x} + j \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^c d\mathbf{x} + k \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^d d\mathbf{x} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Sementara itu, diketahui

$$\begin{aligned}
 |\phi_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{t})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \right| \quad l = a, b, c, d. \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2}| d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
 |\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Dengan mengaplikasikan (2.10) dan (2.23) diperoleh

$$\begin{aligned}
 |\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} (f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x}) + i f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x}) + j f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x}) + k f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x})) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} |i f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} |j f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} |k f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} |f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^a(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^b(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^c(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}^d(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 \\
 &= 4,
 \end{aligned}$$

terbukti.

Teorema 2.5.2 yang merupakan teorema independensi dan faktorisasi karakteristik terinspirasi dari sifat pemfaktoran fungsi karakteristik pada variabel

random independen dalam teori probabilitas klasik. Teorema ini dapat menunjukkan bahwa konsep independensi tetap terjaga dalam kerangka quaternion, sehingga memudahkan analisis distribusi multivariat melalui pemisahan komponen.

Definisi 2.5.4 Fungsi kepadatan peluang quaternion $f_{\mathbf{X}}(x)$ dapat dihitung dari fungsi karakteristik menggunakan rumus berikut

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it_1 x_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) e^{-jt_2 x_2} d\mathbf{t}. \quad (2.46)$$

Definisi invers fungsi karakteristik 2.5.4 ke fungsi kepadatan peluang dibuat untuk memastikan bahwa fungsi kepadatan peluang quaternion dapat direkonstruksi kembali dari representasi frekuensinya, sehingga hubungan antara domain waktu dan domain frekuensi tetap terjaga. Persamaan (2.46) terinspirasi oleh teorema inversi transformasi Fourier pada probabilitas klasik, dengan penyesuaian terhadap struktur non-komutatif aljabar quaternion.

Selanjutnya, ditentukan fungsi karakteristik dari Contoh 1 berdasarkan persamaan (2.38) sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \phi_{X_1, X_2}(t_1, t_2) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{it_1 x_1} (4x_1 x_2 + 3ix_1^2 + 3jx_2^2 + \mathbf{k}(x_1 + x_2)) e^{jt_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{it_1 x_1} (4x_1 x_2) e^{jt_2 x_2} dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 e^{it_1 x_1} (3ix_1^2) e^{jt_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ & \quad + \int_0^1 \int_0^1 e^{it_1 x_1} (3jx_2^2) e^{jt_2 x_2} dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 e^{it_1 x_1} (\mathbf{k}(x_1 + x_2)) e^{jt_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ &= 4 \int_0^1 x_1 e^{it_1 x_1} dx_1 \int_0^1 x_2 e^{jt_2 x_2} dx_2 + 3i \int_0^1 e^{it_1 x_1} x_1^2 dx_1 \int_0^1 e^{jt_2 x_2} dx_2 \\ & \quad + 3 \int_0^1 e^{it_1 x_1} dx_1 j \int_0^1 x_2^2 e^{jt_2 x_2} dx_2 + \int_0^1 e^{it_1 x_1} x_1 dx_1 \mathbf{k} \int_0^1 e^{jt_2 x_2} dx_2 \\ & \quad + \int_0^1 e^{it_1 x_1} dx_1 \mathbf{k} \int_0^1 x_2 e^{jt_2 x_2} dx_2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
& \phi_{X_1, X_2}(t_1, t_2) \\
&= 4 \left(\frac{e^{it_1}}{it_1} + \frac{e^{it_1} - 1}{t_1^2} \right) \left(\frac{e^{jt_2}}{jt_2} + \frac{e^{jt_2} - 1}{t_2^2} \right) + 3i \left(\frac{e^{it_1}}{it_1} + \frac{2e^{it_1}}{t_1^2} - \frac{2e^{it_1} - 2}{it_1^3} \right) \left(\frac{e^{jt_2} - 1}{jt_2} \right) \\
&\quad + 3j \left(\frac{e^{it_1} - 1}{it_1} \right) \left(\frac{e^{jt_2}}{jt_2} + \frac{2e^{jt_2}}{jt_2} - \frac{2e^{jt_2} - 2}{jt_2} \right) + k \left(\frac{e^{it_1}}{it_1} + \frac{e^{it_1} - 1}{t_1^2} \right) \left(\frac{e^{jt_2} - 1}{jt_2} \right) \\
&= 4 \left(\frac{t_1 e^{it_1} + i(e^{it_1} - 1)}{it_1^2} \right) \left(\frac{t_2 e^{jt_2} + j(e^{jt_2} - 1)}{jt_1^2} \right) \\
&\quad + 3i \left(\frac{t_1^2 e^{it_1} + it_1 2e^{it_1} - 2e^{it_1} + 2}{it_1^3} \right) \left(\frac{e^{jt_2} - 1}{jt_2} \right) \\
&\quad + 3j \left(\frac{e^{it_1} - 1}{it_1} \right) \left(\frac{t_2^2 e^{jt_2} + jt_2 2e^{jt_2} - 2e^{jt_2} + 2}{jt_2^3} \right) \\
&\quad + k \left(\frac{t_1 e^{it_1} + i(e^{it_1} - 1)}{it_1^2} \right) \left(\frac{e^{jt_2} - 1}{jt_2} \right) \\
&\quad + k \left(\frac{e^{it_1} - 1}{it_1} \right) \left(\frac{t_2 e^{jt_2} + j(e^{jt_2} - 1)}{jt_2^2} \right). \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Persamaan (2.48) dapat disederhanakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \phi_{X_1, X_2}(t_1, t_2) \\
&= 4 \left(\frac{(t_1 e^{it_1} + i(e^{it_1} - 1))(t_2 e^{jt_2} + j(e^{jt_2} - 1))}{kt_1^2 t_2^2} \right) \\
&\quad + 3i \left(\frac{(t_1^2 e^{it_1} + it_1 2e^{it_1} - 2e^{it_1} + 2)(e^{jt_2} - 1)}{kt_1^3 t_2} \right) \\
&\quad + 3j \left(\frac{(e^{it_1} - 1)(t_2^2 e^{jt_2} + 2jt_2^2 e^{jt_2} - 2e^{jt_2} + 2)}{kt_1 t_2^3} \right) \\
&\quad + k \left(\frac{(t_1 e^{it_1} + i(e^{it_1} - 1))(e^{jt_2} - 1)}{kt_1^2 t_2} \right) + k \left(\frac{(e^{it_1} - 1)(t_2 e^{jt_2} + j(e^{jt_2} - 1))}{kt_1 t_2^2} \right) \tag{2.49}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\phi_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = & \frac{4}{\mathbf{k}t_1^2t_2^2} \left((t_1e^{it_1} + \mathbf{i}(e^{it_1} - 1))(t_2e^{jt_2} + \mathbf{j}(e^{jt_2} - 1)) \right) \\ & + \frac{1}{\mathbf{k}t_1^3t_2} \left(3\mathbf{i}(2 + e^{it_1}(t_1^2 + 2it_1 - 2))(e^{jt_2} - 1) \right) \\ & + \frac{1}{\mathbf{k}t_1t_2^3} \left(3\mathbf{j}(2 + e^{jt_2}(t_2^2 + 2jt_2 - 2))(e^{it_1} - 1) \right) \\ & + \frac{1}{t_1^2t_2} \left((t_1e^{it_1} + \mathbf{i}(e^{it_1} - 1))(e^{jt_2} - 1) \right) \\ & + \frac{1}{t_1t_2^2} \left((e^{it_1} - 1)(t_2e^{jt_2} + \mathbf{j}(e^{jt_2} - 1)) \right)\end{aligned}$$

Sebagai konsekuensi langsung dari 2.5.4, diperoleh teorema 2.5.3 sebagai berikut.

Teorema 2.5.3 *Jika fungsi karakteristik quaternion ϕ_X dan ψ_X dari variabel random X didefinisikan sebagai*

$$\phi_X(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1x_1} f_X(\mathbf{x}) e^{jt_2x_2} d\mathbf{x}, \quad \psi_X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1x_1} g_X(\mathbf{t}) e^{jt_2x_2} d\mathbf{t}. \quad (2.50)$$

Asumsikan bahwa f_X adalah fungsi kepadatan peluang real, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} g_X(\mathbf{t}) e^{-it_1y_1} \phi_X(\mathbf{t}) e^{-jt_2y_2} d\mathbf{t} = & \int_{\mathbb{R}^2} f_X(\mathbf{x}) \psi_X^a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} + \mathbf{i} \int_{\mathbb{R}^2} f_X(\mathbf{x}) \psi_X^b(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} \\ & + \mathbf{j} \int_{\mathbb{R}^2} f_X(\mathbf{x}) \psi_X^c(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mathbf{k} \int_{\mathbb{R}^2} f_X(\mathbf{x}) \psi_X^d(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}.\end{aligned} \quad (2.51)$$

Bukti. Berdasarkan fungsi karakteristik quaternion yang didefinisikan pada (2.38), diperoleh

$$\begin{aligned}e^{-it_1y_1} \phi_X(\mathbf{t}) e^{-jt_2y_2} = & e^{-it_1y_1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1x_1} f_X(\mathbf{x}) e^{jt_2x_2} d\mathbf{x} e^{-jt_2y_2} \\ = & \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1(x_1 - y_1)} f_X(\mathbf{x}) e^{jt_2(x_2 - y_2)} d\mathbf{x}.\end{aligned} \quad (2.52)$$

Perkalian kedua sisi persamaan (2.52) dengan $g_X(\mathbf{t})$ kemudian mengintegrasikan

terhadap dt , diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} g_{\mathbf{X}}(t) e^{-it_1 y_1} \phi_{\mathbf{X}}(t) e^{-jt_2 y_2} dt &= \int_{\mathbb{R}^2} g_{\mathbf{X}}(t) \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1(x_1-y_1)} f_{\mathbf{X}}(x) e^{jt_2(x_2-y_2)} dx \right) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (g_{\mathbf{X}}^a(t) + ig_{\mathbf{X}}^b(t) + jg_{\mathbf{X}}^c(t) + kg_{\mathbf{X}}^d(t)) \\
 &\quad e^{it_1(x_1-y_1)} f_{\mathbf{X}}(x) e^{jt_2(x_2-y_2)} dx dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (g_{\mathbf{X}}^a(t) + ig_{\mathbf{X}}^b(t) + jg_{\mathbf{X}}^c(t) + kg_{\mathbf{X}}^d(t)) \\
 &\quad e^{it_1(x_1-y_1)} f_{\mathbf{X}}(x) e^{jt_2(x_2-y_2)} dx dt.
 \end{aligned}$$

Teorema Fubini memungkinkan kita untuk memperoleh

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^2} g_{\mathbf{X}}(t) e^{-it_1 y_1} \phi_{\mathbf{X}}(t) e^{-jt_2 y_2} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}(x) e^{it_1(x_1-y_1)} g_{\mathbf{X}}^a(t) e^{jt_2(x_2-y_2)} dt + i f_{\mathbf{X}}(x) \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1(x_1-y_1)} g_{\mathbf{X}}^b(t) e^{jt_2(x_2-y_2)} dt \right) dx \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left(j f_{\mathbf{X}}(x) \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1(x_1-y_1)} g_{\mathbf{X}}^c(t) e^{jt_2(x_2-y_2)} dt + k f_{\mathbf{X}}(x) \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1(x_1-y_1)} g_{\mathbf{X}}^d(t) e^{jt_2(x_2-y_2)} dt \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} (f_{\mathbf{X}}(x) \psi_{\mathbf{X}}^a(x-y) + i f_{\mathbf{X}}(x) \psi_{\mathbf{X}}^b(x-y)) dx \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (j f_{\mathbf{X}}(x) \psi_{\mathbf{X}}^c(y-x) + k f_{\mathbf{X}}(x) \psi_{\mathbf{X}}^d(y-x)) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}(x) \psi_{\mathbf{X}}^a(x-y) dx + i \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}(x) \psi_{\mathbf{X}}^b(x-y) dx \\
 &\quad + j \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}(dx) \psi_{\mathbf{X}}^c(y-x) dx + k \int_{\mathbb{R}^2} f_{\mathbf{X}}(dx) \psi_{\mathbf{X}}^d(y-dx) dx.
 \end{aligned}$$

Teorema terbukti.

Teorema relasi karakteristik dan konvolusi probabilitas dirumuskan untuk menjembatani hubungan antara operasi konvolusi dan fungsi karakteristik dalam kerangka quaternion, khususnya ketika sifat non-komutatif aljabar quaternion turut diperhitungkan. Teorema 2.5.3 terinspirasi oleh teorema konvolusi pada transformasi Fourier klasik, yang kemudian dikembangkan agar tetap berlaku pada fungsi bernilai quaternion dengan struktur dua sisi.

Berdasarkan persamaan (2.26) dapat didefinisikan momen ke- $(n+m)$ dari variabel random real X_1 and X_2 sebagai berikut

$$E[X_1^m X_2^n] = \int_{\mathbb{R}^2} x_1^m x_2^n f_{\mathbf{X}}(x) dx, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.53)$$

jika integralnya ada. Jelas bahwa untuk $n = 1, m = 0$ dan $n = 0, m = 1$ pada (2.53) diperoleh

$$\mu_1 = E[X_1] = \int_{\mathbb{R}^2} x_1 f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.54)$$

dan

$$\mu_2 = E[X_2] = \int_{\mathbb{R}^2} x_2 f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.55)$$

Teorema 2.5.4 berikut dirumuskan untuk menghubungkan momen-momen dari variabel random dengan sifat diferensial fungsi karakteristik dalam kerangka quaternion. Teorema 2.5.4 didasarkan oleh hubungan klasik antara turunan fungsi karakteristik dan momen probabilitas, yang kemudian diperluas agar tetap berlaku pada fungsi karakteristik bernilai quaternion.

Teorema 2.5.4 *Jika $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ adalah variabel random real, maka ada turunan kontinu ke- $(n + m)$ untuk fungsi karakteristik quaternion $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ yang dideskripsikan sebagai berikut*

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial t_1^m \partial t_2^n} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = i^m \int_{\mathbb{R}^2} x_1^m e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) x_2^n e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} j^n. \quad (2.56)$$

Sebagai tambahan,

$$E[X_1^n X_2^m] = i^{-m} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t_1^m \partial t_2^n} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j^{-n}. \quad (2.57)$$

Bukti. Untuk $m = 1$ dan $n = 0$ dengan perhitungan langsung ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} e^{it_1 x_1} \right) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (ix_1) e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Berdasarkan persamaan (2.58), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (ix_1) e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} \right) \\ &= i^2 \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Hal ini mengimplikasikan bahwa

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial t_1^m \partial t_2^n} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = i^m \int_{\mathbb{R}^2} x_1^m e^{it_1 x_1} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) x_2^n e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x} j^n. \quad (2.60)$$

Aplikasi persamaan (2.53) diperoleh

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial t_1^m \partial t_2^n} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = i^m \int_{\mathbb{R}^2} x_1^m f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) x_2^n d\mathbf{x} j^n. \quad (2.61)$$

Oleh karena itu,

$$i^{-m} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t_1^m \partial t_2^n} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j^{-n} = \int_{\mathbb{R}^2} x_1^m f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) x_2^n d\mathbf{x},$$

dengan demikian pembuktian teorema telah selesai.

Pada bagian ini diperkenalkan definisi kovariansi quaternion dari variabel acak real X_1 dan X_2 . Definisi kovariansi quaternion dibuat untuk memperluas konsep kovariansi dalam probabilitas klasik ke dalam kerangka quaternion dengan tetap menjaga makna statistiknya. Definisi 2.5.5 terinspirasi oleh kovariansi klasik berbasis nilai ekspektasi, dengan penyesuaian pada operasi konjugasi agar konsisten dengan struktur aljabar quaternion.

Definisi 2.5.5 Misalkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ adalah sebarang variabel random real. Kovariansi X_1 dan X_2 dalam quaternion didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E[(X_1 - E[X_1])(\overline{X_2 - E[X_2]})] \\ &= E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - \overline{E[X_2]})] \\ &= E[(X_1 X_2 - X_1 \overline{E[X_2]}) - E[X_1] X_2 + E[X_1] \overline{E[X_2]}] \\ &= E[X_1 X_2] - E[X_1] \overline{E[X_2]} - E[X_1] E[X_2] + E[X_1] \overline{E[X_2]} \\ &= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Berdasarkan (2.62), diperoleh

$$\begin{aligned} Cov(X_2, X_1) &= E[X_2 X_1] - E[X_2] E[X_1] \\ &= E[X_1 X_2] - E[X_2] E[X_1] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Secara umum, karena $E[X_1] E[X_2] \neq E[X_2] E[X_1]$, maka $Cov(X_1, X_2) \neq Cov(X_2, X_1)$. Berdasarkan (2.62), diperoleh

$$\begin{aligned} Var(X_1) = \sigma_1 &= E[X_1 X_1] - E[X_1] E[X_1] \\ &= E[X_1^2] - E^2[X_1]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

yang merupakan variansi quaternion dari variabel random real X_1 .

Berdasarkan Contoh 1, diperoleh

$$\begin{aligned}
 Cov(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \\
 &= \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{8}i + \frac{3}{8}j + \frac{1}{3}k \right) - \left(\frac{-31}{48} + \frac{11}{16}i + \frac{11}{16}j + 1\frac{13}{144}k \right) \\
 &= 1\frac{13}{144} - \frac{5}{16}i + \frac{5}{16}j - \frac{109}{144}k,
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

dan

$$\begin{aligned}
 |Cov(X_1, X_2)| &= \sqrt{\left(\frac{157}{144}\right)^2 + \left(-\frac{5}{16}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \left(-\frac{109}{144}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{10145}{5184}} = \frac{1}{72}\sqrt{10145}.
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Diperoleh bahwa kovariansi quaternion $Cov(X_1, X_2)$ dari variabel random real X_1 dan X_2 dalam fungsi karakteristik quaternion adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 Cov(X_1, X_2) &= i^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j^{-1} - \left(i \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j \right) \\
 &= i \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j - \left(i \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j \right).
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Catatan 2. Berdasarkan persamaan (2.63), diperoleh

$$\begin{aligned}
 Cov(X_2, X_1) &= i^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j^{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j^{-1} i^{-1} \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \right) \\
 &= i \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) j - \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) k \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \right).
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Contoh berikut mengilustrasikan kegunaan dari hasil yang diperoleh sebelumnya.

Contoh 2 Variabel random X_1 dan X_2 memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} e^{-\frac{(x_1 - |\mu_1|)^2}{2|\sigma_1|^2}} e^{-\frac{(x_2 - |\mu_2|)^2}{2|\sigma_2|^2}}. \tag{2.69}$$

dimana μ_1 dan μ_2 didefinisikan oleh persamaan (2.54) and (2.55). Tentukan variansi quaternion dari X_1 dan X_2 .

Penyelesaian. Berdasarkan persamaan (2.38) bahwa

$$\phi_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x_1} e^{-\frac{(x_1 - |\mu_1|)^2}{2|\sigma_1|^2}} e^{-\frac{(x_2 - |\mu_2|)^2}{2|\sigma_2|^2}} e^{jt_2 x_2} d\mathbf{x}.$$

Dengan mengubah variabel $x_1 - |\mu_1| = y_1$ dan $x_2 - |\mu_2| = y_2$, dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi_X(t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it_1(|\mu_1|+y_1)} e^{-\frac{y_1^2}{2|\sigma_1|^2}} e^{-\frac{y_2^2}{2|\sigma_2|^2}} e^{jt_2(|\mu_2|+y_2)} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{e^{it_1|\mu_1|} e^{jt_2|\mu_2|}}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_1^2}{2|\sigma_1|^2} + it_1 y_1} dy_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y_2^2}{2|\sigma_2|^2} + jt_2 y_2} dy_2. \tag{2.70}
\end{aligned}$$

selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi_X(t_1, t_2) &= \frac{e^{it_1|\mu_1|} e^{jt_2|\mu_2|}}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_1|^2} (y_1^2 - 2|\sigma_1|^2 it_1 y_1)} dy_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_2|^2} (y_2^2 - 2|\sigma_2|^2 jt_2 y_2)} dy_2 \\
&= \frac{e^{it_1|\mu_1|} e^{jt_2|\mu_2|}}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_1|^2} ((y_1 - |\sigma_1|^2 it_1)^2 - (|\sigma_1|^2 it_1)^2)} dy_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_2|^2} ((y_2 - |\sigma_2|^2 jt_2)^2 - (|\sigma_2|^2 jt_2)^2)} dy_2 \\
&= \frac{e^{it_1|\mu_1|} e^{jt_2|\mu_2|}}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(|\sigma_1|^2 it_1)^2}{2|\sigma_1|^2}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_1|^2} (y_1 - |\sigma_1|^2 it_1)^2} dy_1 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(|\sigma_2|^2 jt_2)^2}{2|\sigma_2|^2}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_2|^2} (y_2 - |\sigma_2|^2 jt_2)^2} dy_2 \\
&= \frac{e^{it_1|\mu_1|} e^{jt_2|\mu_2|}}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} e^{\frac{(|\sigma_1|^2 it_1)^2}{2|\sigma_1|^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_1|^2} (y_1 - |\sigma_1|^2 it_1)^2} dy_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_2|^2} (y_2 - |\sigma_2|^2 jt_2)^2} dy_2 e^{\frac{(|\sigma_2|^2 jt_2)^2}{2|\sigma_2|^2}}. \tag{2.71}
\end{aligned}$$

Substitusi $u_1 = y_1 - |\sigma_1|^2 it_1$ dan $u_2 = y_2 - |\sigma_2|^2 jt_2$, menghasilkan

$$\begin{aligned}
\phi_X(t_1, t_2) &= \frac{e^{it_1|\mu_1|} e^{jt_2|\mu_2|}}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} e^{-\frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} e^{-\frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_1|^2} u_1^2} du_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2|\sigma_2|^2} u_2^2} du_2 \\
&= \frac{e^{it_1|\mu_1|} e^{jt_2|\mu_2|}}{2\pi|\sigma_1||\sigma_2|} e^{-\frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} e^{-\frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}} \sqrt{2\pi|\sigma_1|^2} \sqrt{2\pi|\sigma_2|^2} \\
&= e^{it_1|\mu_1| - \frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} e^{jt_2|\mu_2| - \frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}}. \tag{2.72}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_1} \phi_X(t_1, t_2) &= (i|\mu_1| - t_1|\sigma_1|^2) e^{it_1|\mu_1| - \frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} e^{jt_2|\mu_2| - \frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}} \\
\frac{\partial}{\partial t_2} \phi_X(t_1, t_2) &= e^{it_1|\mu_1| - \frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} (j|\mu_2| - t_2|\sigma_2|^2) e^{jt_2|\mu_2| - \frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}} \\
\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_X(t_1, t_2) &= (i|\mu_1| - t_1|\sigma_1|^2) e^{it_1|\mu_1| - \frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} (j|\mu_2| - t_2|\sigma_2|^2) e^{jt_2|\mu_2| - \frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}} \\
\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \phi_X(t_1, t_2) &= \left((i|\mu_1| - t_1|\sigma_1|^2)^2 - |\sigma_1|^2 \right) e^{it_1|\mu_1| - \frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} e^{jt_2|\mu_2| - \frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}} \\
\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \phi_X(t_1, t_2) &= \left((j|\mu_2| - t_2|\sigma_2|^2)^2 - |\sigma_2|^2 \right) e^{it_1|\mu_1| - \frac{|\sigma_1|^2 t_1^2}{2}} e^{jt_2|\mu_2| - \frac{|\sigma_2|^2 t_2^2}{2}}. \tag{2.73}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.67), diperoleh

$$\begin{aligned}
 Cov(X_1, X_2) &= i \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \mathbf{j} - \left(i \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \mathbf{j} \right) \\
 &= i(i|\mu_1| |\mathbf{j}| |\mu_2|) \mathbf{j} - (i^2 |\mu_1| |\mathbf{j}| |\mu_2| \mathbf{j}) \\
 &= i^2 \mathbf{j}^2 |\mu_1| |\mu_2| - |\mu_2| |\mu_1| \\
 &= |\mu_1| |\mu_2| - |\mu_2| |\mu_1| \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Catatan 3. Berdasarkan persamaan (2.68), diperoleh

$$\begin{aligned}
 Cov(X_2, X_1) &= i \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \mathbf{j} - \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \right) \\
 &= i^2 \mathbf{j}^2 |\mu_1| |\mu_2| - \mathbf{j} |\mu_2| \mathbf{k} i |\mu_1| \\
 &= |\mu_1| |\mu_2| + |\mu_2| |\mu_1| \\
 &= 2|\mu_1| |\mu_2|.
 \end{aligned}$$

Contoh 2 memperlihatkan bahwa $Cov(X_1, X_2)$ pada persamaan(2.62) berbeda dengan $Cov(X_2, X_1)$ pada persamaan (2.63).

Hasil di atas dapat disimpulkan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Perbandingan teori probabilitas quaternion dan probabilitas klasik

Probabilitas Quaternion	Probabilitas Klasik
$Cov(x_1, x_2) \neq Cov(x_2, x_1)$	$Cov(x_1, x_2) = Cov(x_2, x_1)$
$E[X_1]E[X_2] \neq E[X_2]E[X_1]$	$E[X_1]E[X_2] = E[X_2]E[X_1]$
$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{1}$	$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$
$ \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \leq \mathbf{1} = 4$	$ \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \leq 1$

2.6. Kesimpulan

Penelitian ini memperkenalkan transformasi Fourier quaternion dua dimensi (TFQ2D) dan menyelidiki teorema konvolusi baru terkait dengan transformasi ini. Penelitian ini juga telah memperlihatkan kegunaan TFQ2D dalam pemodelan probabilitas quaternion dan memperoleh beberapa hasil yang berbeda dari pemodelan probabilitas klasik.

Semua hasil yang dilaporkan dalam penelitian ini merupakan langkah awal dari analisis yang lebih mendalam. Masih banyak isu yang dapat diteliti. Misalnya,

transformasi Fourier quaternion kontinu, transformasi Fourier quaternion diskrit [[Majorkowska-Mech , 2023] dan [Bahri et al, 2008]] dapat diterapkan dalam konstruksi fungsi karakteristik diskrit dan nilai harapan diskrit. Selain itu, generalisasi transformasi Fourier quaternion n-dimensi memungkinkan kita untuk mendefinisikan fungsi karakteristik dan nilai harapan dalam dimensi lebih tinggi. Pada penelitian selanjutnya, penulis akan meneliti penggunaan persamaan diferensial quaternion dua dimensi untuk menyelesaikan persamaan diferensial bernilai quaternion seperti transformasi Laplace quaternion [Bau et al. , 2023].