

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dimensi metrik adalah salah satu topik penelitian pada teori graf yang banyak diteliti oleh kombinatorik. Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Kajian dimensi metrik mencakup konsep jarak antara dua titik pada suatu graf, himpunan pembeda, dan representasi titik terhadap suatu himpunan pembeda. Jarak pada suatu graf yang dinotasikan $d(u, v)$ sebagai panjang lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik u dan v . Himpunan pembeda (*resolving set*) yang dinotasikan dengan W adalah himpunan titik pada suatu graf yang memungkinkan identifikasi unik setiap dua titik yang berbeda berdasarkan jaraknya ke setiap titik dalam himpunan tersebut. Sedangkan representasi titik terhadap suatu himpunan pembeda merupakan jarak suatu titik ke setiap titik dalam himpunan pembeda W . Apabila representasi dua titik yang berbeda terhadap W berbeda, maka W merupakan himpunan pembeda. Secara formal, dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pembeda. Himpunan pembeda yang memiliki kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum. Anggota-anggota dari himpunan pembeda minimum tersebut disebut basis, sedangkan banyaknya anggota basis disebut dimensi metrik dari graf G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Graf siklus adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n . Pada graf siklus, terdapat sisi yang menghubungkan titik terakhir u_n dengan titik pertama u_1 , sehingga membentuk suatu lintasan tertutup. Graf lengkap adalah graf sederhana dimana setiap dua titik yang berbeda terhubung oleh sebuah sisi. Graf lengkap dengan m titik dinotasikan dengan K_m . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ (Daniel, F., 2020).

Operasi pada graf merupakan salah satu cara yang sering digunakan dalam teori graf untuk menghasilkan bentuk graf baru yang berbeda dengan graf sebelumnya. Salah satu operasi pada graf yang banyak diteliti adalah operasi korona, yang pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Frucht tahun 1970. Operasi korona antara dua graf dinotasikan dengan $G \odot H$. Operasi ini dilakukan dengan mengambil satu salinan graf G dan sebanyak $|V(G)|$ salinan graf H , kemudian menghubungkan setiap titik pada graf G dengan semua titik pada satu salinan graf H yang bersesuaian (Yusuf, R., 2022).

Penelitian mengenai dimensi metrik pada graf operasi korona telah banyak dilakukan oleh peneliti terdahulu. Septiana dan Rehadjeng (2012), menemukan dimensi metrik pada graf siklus C_n dengan $n \geq 3$ adalah 2 atau $\dim(C_n) = 2$, dan graf lengkap K_n dengan $n \geq 2$ adalah $n - 1$ atau $\dim(K_n) = n - 1$. Listiana (2016), menemukan graf hasil operasi korona antara graf lengkap K_n dengan K_{n-1} adalah $n(n - 2)$ atau $\dim(K_n \odot K_{n-1}) = n(n - 2)$ dengan $n \geq 2$. Kapita (2017) menemukan dimensi metrik pada graf hasil operasi korona antara graf lintasan dan graf siklus adalah $n(m - 3)$ atau $\dim(P_n \odot C_m) = n(m - 3)$, dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 5$. Selanjutnya, Ferdiyanto (2019),

menemukan dimensi metrik graf hasil operasi korona antara graf lintasan P_n dengan graf lengkap K_m adalah $n(m - 1)$ atau $\dim(P_n \odot K_m) = n(m - 1)$ untuk $n \geq 2, m \geq 2$. Selain itu, Ferdianto juga menemukan dimensi metrik pada graf hasil operasi korona antara graf siklus C_n dengan graf lintasan mP_2 adalah nm atau $\dim(C_n \odot mP_2)$, dengan $n, m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$. Kemudian, Nurfadilah Rahmah (2025) menemukan dimensi metrik pada graf Buku adalah 2 untuk $n = 1$ dan n untuk $n \geq 2$.

Berdasarkan kajian terhadap hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu, telah banyak dibahas mengenai dimensi metrik pada berbagai kelas graf, namun kajian yang secara khusus membahas dimensi metrik pada graf hasil operasi korona antara graf siklus dan graf lengkap belum pernah diteliti sebelumnya. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti dimensi metrik dengan mengambil objek graf siklus dan graf lengkap sebagai objek penelitian. Untuk itu, penulis mengambil judul **“Dimensi Metrik pada Graf Hasil Operasi Korona antara Graf Siklus dan Graf Lengkap.”**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan dimensi metrik pada graf hasil operasi corona antara graf siklus dan graf lengkap.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan tugas akhir ini tentang penentuan dimensi metrik graf hasil operasi corona pada graf siklus berorde $n(C_n)$ untuk $n \geq 3$ dan graf lengkap berorde $m(K_m)$, untuk $m = 3$ dan 4 .

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah menentukan dimensi metrik pada graf hasil operasi corona antara graf siklus dan graf lengkap.

1.5 Landasan Teori

Pada subbab ini dibahas mengenai konsep dasar graf, jenis-jenis graf, operasi dalam graf, dimensi metrik, dan hasil penelitian terdahulu yang relevan terhadap penelitian yang akan digunakan dalam bab hasil dan pembahasan.

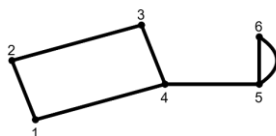
1.5.1 Dasar-Dasar Graf

Secara umum, terdapat beragam definisi, notasi, dan istilah dalam graf yang sebagian besar merujuk pada buku *“Pengantar Teori dan Jenis-Jenis Graf”* karya Hasmawati yang diterbitkan pada tahun 2023.

Definisi 1.5.1.1 Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit yang anggotanya disebut titik (vertex) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan elemen-elemen $V(G)$ yang anggotanya disebut sisi (edge).

Simpul (titik) dalam graf dapat diberi label menggunakan huruf, seperti a, b, c, d , dan seterusnya, atau dengan bilangan asli 1,2,3 dan sebagainya, atau kombinasi antara huruf dan bilangan asli. Sementara itu, sisi yang menghubungkan dua simpul, yaitu simpul u dan simpul v , dapat dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dilambangkan sebagai e . Dengan demikian, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dan v , maka dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$ atau uv untuk menunjukkan hubungan antara kedua simpul tersebut (Munir, 2003).

Contoh 1.5.1.1 Diberikan graf G dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $E(G) = \{12, 23, 34, 14, 45, 56, 65\}$. Berikut graf G seperti pada Gambar 1.5.1.1.

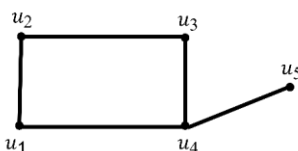


G :

Gambar 1.5.1.1 Graf G

Definisi 1.5.1.2 Orde dari graf G adalah banyaknya titik pada G dan ukuran graf G adalah banyaknya sisi pada graf G . Orde dari graf G dinyatakan dengan simbol p yakni banyaknya anggota dari $V(G)$ dan ukuran dari graf G dinyatakan dengan q yakni banyaknya anggota dari $E(G)$. (Hasmawati, 2023)

Contoh 1.5.1.2 Misalkan diberikan graf G dengan himpunan $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(H) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5\}$. Bentuk graf G dapat dilihat pada Gambar 1.5.1.2



H :

Gambar 1.5.1.2 Graf H

Pada Gambar 1.5.1.2, diperoleh orde atau banyaknya titik pada graf G adalah 5 atau $p(G) = 5$ dan banyaknya ukuran atau sisi pada graf G adalah 5 atau $q(G) = 5$.

Definisi 1.5.1.3 Kardinalitas suatu himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Kardinalitas biasanya dinyatakan oleh simbol " $| \quad |$ ". (Hasmawati, 2023)

Contoh 1.5.1.3 Misalkan diberikan graf H pada contoh 1.5.1.2 dengan $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(H) = \{u_1u_2, u_1u_4, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5\}$.

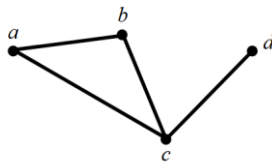
Pilih $W = \{u_1, u_2\}$, maka kardinalitas dari graf G adalah $|G| = 2$.

Definisi 1.5.1.3 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$.

Jika $x = v_i, v_j$, maka dikatakan bahwa :

1. Titik v_i bertetangga (adjacent) dengan titik v_j
2. Sisi x terkait (incident) dengan titik v_i , demikian pula untuk titik v_j .

Contoh 1.5.1.3 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{ab, bc, ac, cd\}$. Berikut graf G seperti pada gambar berikut



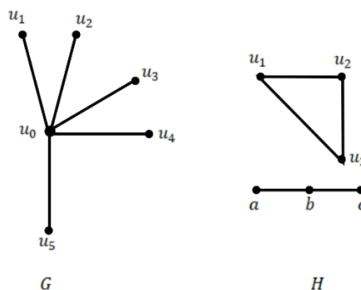
G :

Gambar 1.5.1.3 Graf G Bertetangga

Graf pada gambar 1.5.1.3 adalah graf sederhana dengan $p = 4$. Pada graf tersebut, titik c bertetangga dengan titik a, b dan d . tetapi titik d tidak bertetangga dengan titik a dan titik b . sisi ab tidak bertetangga dengan sisi cd . Sedangkan sisi-sisi yang bertetangga adalah sisi cd, ac, bc . Sisi cd terkait dengan titik c dan titik d (Hasmawati, 2023).

Definisi 1.5.1.4 Graf dikatakan terhubung jika setiap dua titik pada graf tersebut termuat pada lintasan yang sama. Sebaliknya, disebut tak terhubung yakni apabila terdapat dua titik pada graf tersebut yang tidak termuat pada lintasan manapun. (Hasmawati, 2023)

Contoh 1.5.1.4 Diberikan graf G adalah graf terhubung dan graf H adalah graf tak terhubung. Berikut gambar graf G dan graf H .



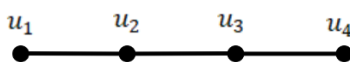
Gambar 1.5.1.4 Graf terhubung G dan graf tak terhubung H

1.5.2 Jenis-Jenis Graf

Pada teori graf terdapat berbagai jenis graf. Pada bagian ini graf yang akan dibahas adalah graf lintasan, graf siklus, dan graf lengkap. Graf siklus dan graf lengkap merupakan dua jenis graf khusus yang akan digunakan sebagai objek utama dalam penelitian ini.

Definisi 1.5.2.1 Graf lintasan adalah graf sederhana di mana kedua titik ujungnya memiliki derajat satu, yang disebut sebagai pendant, sedangkan titik-titik lainnya memiliki derajat dua. Graf lintasan ini dilambangkan dengan P_n (Alfarisi,2017).

Contoh 1.5.2.1 Misalkan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\}$. Maka graf $G = P_4$ dengan Panjang 3. Berikut merupakan contoh gambar dari graf G .

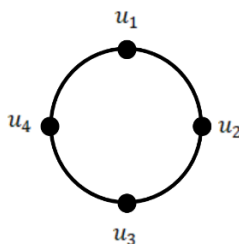


P_4 :

Gambar 1.5.2.1 Graf Lintasan P_4

Definisi 1.5.2.2 Misalkan $P_n: v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah lintasan berorde n dengan panjang $n - 1$. Siklus C_n dengan panjang $n, n \geq 3$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_nv_1\}$ (Hasmawati,2023).

Contoh 1.5.2.2 Misalkan graf siklus dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1\}$. Maka graf $G = C_4$. Berikut merupakan contoh gambar graf G .

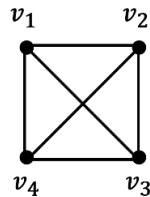


C_4 :

Gambar 1.5.2.2 Graf Siklus C_4

Definisi 1.5.2.3 Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap dua titiknya bertetangga atau dengan kata lain untuk setiap $u, v \in V(G)$ berlaku $uv \in E(G)$. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Hasmawati, 2023).

Contoh 1.5.2.3 Misalkan graf lengkap dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Maka graf $G = K_4$. Berikut merupakan contoh gambar dari graf G .



K_4 :

Gambar 1.5.2.3 Graf Lengkap K_4

Berdasarkan uraian jenis-jenis graf yang telah dibahas, objek penelitian ini menggunakan graf siklus dan graf lengkap. Oleh karena itu, subbab selanjutnya akan membahas operasi dalam graf sebagai dasar pembentukan graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini.

1.5.3 Operasi dalam Graf

Dalam graf terdapat beberapa operasi yaitu operasi gabung, operasi penjumlahan graf, operasi perkalian graf dan operasi corona. Pada penelitian kali ini digunakan operasi corona. Pembahasan operasi graf ini merujuk pada buku "Pengantar dan Jenis-Jenis Graf" yang disusun oleh Hasmawati pada tahun 2023.

Definisi 1.5.3.1 Misalkan G adalah graf terhubung berorde n dan H graf terhubung berorde m . Graf korona G dan H dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sebanyak n kali namakan $H_1, H_2, \dots, H_n$ dan mengaitkan titik v_i di G dengan setiap titik di graf $H_i, i = 1, 2, \dots, n$.

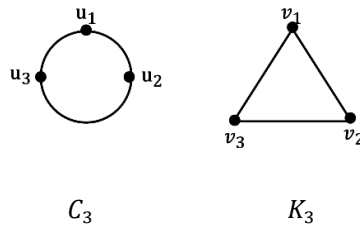
Berdasarkan definisi tersebut, himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $G \odot H$ berturut-turut sebagai berikut

$$V(G \odot H) = v(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} V(H_i)$$

$$E(G) = E(G) \cup \bigcup_{i \in V(G)} E(H_i) \cup \{iu_i | u_i \in V(H_i)\}$$

Banyaknya H_i sama banyaknya titik di G atau dapat ditulis $i = 1, 2, \dots, |V(G)|$ (Iswadi, H., 2011)

Contoh 1.5.3.1 Diberikan graf G adalah graf C_3 dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3\}$ serta graf H adalah graf K_3 dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$. Bentuk graf G dan H dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 1.5.3.1 Graf C_3 dan K_3

Maka hasil konstruksi melalui operasi korona $C_3 \odot K_3$ adalah

$$V(C_3) \odot V(K_3) = \{u_1, u_2, u_3\} \odot \{v_1, v_2, v_3\}$$

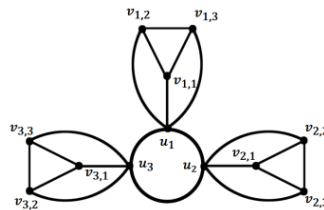
$$= \{u_1, u_2, u_3, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{3,2}, v_{3,3}\}$$

$$E(C_3) \odot E(K_3)$$

$$= \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1, v_{1,1}v_{1,2}, v_{1,2}v_{1,3}, v_{1,3}v_{1,1}, v_{2,1}v_{2,2}, v_{2,2}v_{2,3}, v_{2,3}v_{2,1}, v_{3,1}v_{3,2}, v_{3,2}v_{3,3}, v_{3,3}v_{3,1},$$

$$u_1v_{1,1}, u_1v_{1,2}, u_1v_{1,3}, u_2v_{2,1}, u_2v_{2,2}, u_2v_{2,3}, u_3v_{3,1}, u_3v_{3,2}, u_3v_{3,3}\}.$$

Hasil operasi korona graf $C_3 \odot K_3$ diperoleh 12 titik dan 21 sisi dilihat pada gambar berikut ini :



Gambar 1.5.3.2 Graf Hasil Operasi Korona $C_3 \odot K_3$

1.5.4 Batas Atas dan Batas Bawah suatu Himpunan

Dalam penentuan dimensi metrik digunakan istilah batas atas dan batas bawah. Karena itu, sebelum membahas dimensi metrik, terlebih dahulu disajikan pengertian batas atas dan batas bawah.

Definisi 1.5.4.1 Misalkan A adalah suatu himpunan bilangan. Suatu bilangan disebut batas atas dari himpunan A apabila bilangan tersebut lebih besar atau sama dengan setiap anggota himpunan A . Artinya, tidak ada anggota A yang nilainya melebihi batas atas tersebut. Sebaliknya, suatu bilangan disebut batas bawah dari himpunan A apabila bilangan tersebut lebih kecil atau sama dengan setiap anggota himpunan A . Artinya, tidak ada anggota A yang nilainya lebih kecil dari batas bawah tersebut.

Definisi 1.5.4.1 Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$. Batas atas terkecil dari suatu himpunan A disebut supremum dan dinotasikan $\sup A$. Sedangkan batas bawah terbesar dari himpunan tersebut disebut infimum dan dinotasikan dengan $\inf A$ (Rudin, 1976).

Contoh 1.5.4.1 Misalkan $A = \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan ini memiliki batas atas, misalnya 1,2, dan seterusnya. Batas atas terkecil dari himpunan tersebut adalah 1, sehingga $\sup A = 1$. Selain itu, himpunan ini memiliki batas bawah, misalnya 0 dan -1 . Batas bawah terbesar dari himpunan tersebut adalah 0, sehingga $\inf A = 0$.

Pada contoh 1.5.4.1, supremum dan infimum masing-masing merupakan anggota himpunan A . Hal ini menunjukkan bahwa supremum dan infimum suatu himpunan dapat menjadi anggota himpunan tersebut, bergantung pada struktur himpunannya.

Definisi 1.5.4.2 Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika supremum dari himpunan A merupakan anggota dari A , maka supremum tersebut disebut maksimum dan dinotasikan $\max A$. Jika infimum dari himpunan A merupakan anggota dari A , maka infimum tersebut disebut minimum dan dinotasikan dengan $\min A$ (Bartle dan Sherbert, 2011).

Contoh 1.5.4.2 Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,6\} \subseteq \mathbb{N}$. Batas atas terkecil dari himpunan A adalah 6 dan karena $6 \in A$, maka 6 merupakan maksimum dari himpunan tersebut, yaitu $\max A = 6$. Selanjutnya, batas bawah terbesar dari himpunan A adalah 1 dan karena $1 \in A$, maka 1 merupakan minimum dari himpunan tersebut, yaitu $\min A = 1$.

Konsep batas atas dan batas bawah tersebut kemudian diterapkan dalam penentuan dimensi metrik graf. Untuk suatu graf terhubung G , banyaknya anggota suatu himpunan pembeda merupakan bilangan asli, sehingga semua kemungkinan kardinalitas himpunan pembeda graf G membentuk suatu himpunan bilangan asli. Batas atas menunjukkan jumlah titik yang cukup untuk membedakan seluruh titik pada graf, sedangkan batas bawahnya dari himpunan tersebut menunjukkan jumlah minimum titik yang harus dipilih agar seluruh titik pada graf dapat dibedakan. Oleh karena itu, dalam menentukan dimensi metrik suatu graf, pendekatan yang umum digunakan adalah dengan menentukan batas atas dan bawah atas dari kardinalitas himpunan pembeda, apabila batas atas dan batas bawah yang diperoleh bernilai sama, maka nilai tersebut merupakan dimensi metrik graf yang dikaji.

1.5.5 Jarak dan Himpunan Pembeda pada Graf

Dalam kajian dimensi metrik graf, jarak digunakan sebagai dasar untuk membedakan titik-titik pada graf. Untuk keperluan tersebut, dipilih suatu himpunan titik yang disebut himpunan pembeda dan dinotasikan dengan W . Titik-titik dalam W membedakan titik-titik pada graf berdasarkan jarak terpendek masing-masing titik terhadap setiap titik dalam W , sehingga terbentuk representasi jarak.

Definisi 1.5.5.1 Misalkan u dan v adalah dua titik pada graf terhubung G . Jarak dari u dan v adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G yang dinotasikan dengan $d(u, v)$.

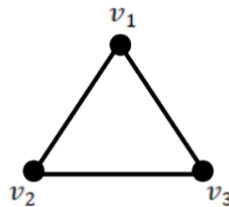
Definisi 1.5.5.2 Misalkan $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ adalah himpunan titik pada graf G yang anggota-anggotanya telah diurutkan. Representasi titik $u \in V(G)$ terhadap W didefinisikan sebagai k -tupel $r(u|W) = (d(u, w_1), d(u, w_2), \dots, d(u, w_k))$ dengan $d(u, w_i)$ adalah jarak dari titik u ke w_i untuk $i = 1, 2, \dots, k$. Himpunan W disebut himpunan pembeda atau *resolving set* jika representasi setiap titik di graf bersifat unik, yaitu untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$. Dengan kata lain, himpunan pembeda memastikan tidak ada dua titik berbeda dalam graf yang memiliki representasi yang sama terhadap himpunan W (Eka dan Rahadjeng, 2012).

Definisi 1.5.5.3 Diberikan graf terhubung G dan titik $u, v \in V(G)$. Titik u, v dikatakan setara apabila memenuhi salah satu sifat berikut :

1. $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$
2. Terdapat titik c sehingga $d(u, c) + d(c, s) = d(v, c) + d(c, s), \forall s \in V(G) \setminus \{u, v\}$.

Pada Definisi 1.5.5.3, jika titik u dan v memenuhi syarat 1, maka titik u dan v adalah setara kuat dan jika tidak maka u dan v disebut setara lemah yang memenuhi syarat 2.

Contoh 1.5.5.1 Diberikan graf K_3 dengan $V(K_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(K_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$, dan setiap dua titik saling bertetangga. Gambar graf K_3 adalah sebagai berikut.

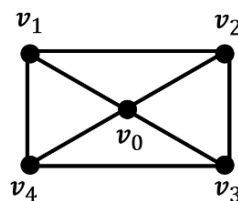


Gambar 1.5.4.1 Graf K_3

Karena K_3 adalah graf lengkap, maka setiap dua titik saling bertetangga sehingga jarak antara titik berbeda selalu 1.

Berdasarkan definisi 1.5.5.3 bagian (1), untuk dua titik berbeda v_1 dan v_2 , serta setiap $w \in V(K_3) \setminus \{v_1, v_2\} = \{v_3\}$, berlaku $d(v_1, w) = d(v_2, w) = 1$. Oleh karena itu, v_1 dan v_2 merupakan titik setara kuat.

Contoh 1.5.5.2 Diberikan graf W_4 dengan $V(W_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(W_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\} \cup \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4\}$. Gambar graf W_4 adalah sebagai berikut.



Gambar 1.5.5.2 Graf W_4

Pada gambar 1.5.5.2, misalkan titik $u = v_1$ dan $v = v_2$ serta titik $c = v_0$. Berdasarkan Definisi 1.5.5.3 bagian (2) , diperoleh

$$d(v_1, v_0) + d(v_0, v_3) = d(v_2, v_0) + d(v_0, v_3)$$

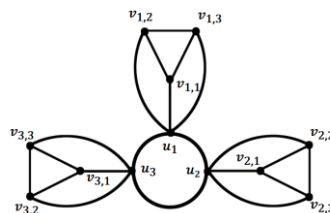
Karena semua titik siklus jaraknya ke pusat v_0 sama, maka definisi tersebut memenuhi, sehingga titik v_1 dan v_2 adalah titik setara lemah.

1.5.6 Dimensi Metrik

Salah satu topik dalam teori graf adalah dimensi metrik pada graf. Dimensi metrik pada graf diperkenalkan pertama kali secara terpisah oleh Slater pada tahun 1975 dan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 (Eka dan Rahadjeng, 2012). Konsep dasar dari dimensi metrik adalah menentukan *resolving set* dengan kardinalitas minimum.

Definisi 1.5.6.1 Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pembeda pada G yang dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Contoh 1.5.6.1 Diberikan graf G seperti berikut



Gambar 1.5.4.2 Graf G

Dapat dipilih sub himpunan dari $V(G)$, yaitu $W = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,2}\}$ dan diperoleh representasi titik :

$$r(u_1|W) = (1,1,2,2,2,2)$$

$$r(v_{1,1}|W) = (0,1,3,3,3,3)$$

$$r(v_{1,2}|W) = (1,0,3,3,3,3)$$

$$r(v_{1,3}|W) = (1,1,3,3,3,3)$$

$$r(u_2|W) = (2,2,1,1,2,2)$$

$$r(v_{2,1}|W) = (3,3,0,1,3,3)$$

$$r(v_{2,2}|W) = (3,3,1,0,3,3)$$

$$r(v_{2,3}|W) = (3,3,1,1,3,3)$$

$$r(u_3|W) = (2,2,2,2,1,1)$$

$$r(v_{3,1}|W) = (3,3,3,3,0,1)$$

$$r(v_{3,2}|W) = (3,3,3,3,1,0)$$

$$r(v_{3,3}|W) = (3,3,3,3,1,1)$$

Karena semua titik pada $C_3 \odot K_3$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W maka $W = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,2}\}$ merupakan himpunan pembeda bagi $C_3 \odot K_3$.

Untuk menentukan dimensi metrik pada graf tersebut, akan dibuktikan dengan mencari batas atas dan batas bawah.

1. $W = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,2}\}$ merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas 6, maka $\dim(G) \leq 6$
2. Akan dibuktikan bahwa $\dim(G) \geq 6$. Ambil sembarang $W' \in V(G)$ dengan $|W'| < 6$. Artinya, W' hanya memuat paling banyak lima titik. Dengan demikian, terdapat paling sedikit satu salinan graf K_3 pada $C_3 \odot K_3$ yang memuat paling sedikit dua titik yang bukan anggota W' . Dengan demikian, $\dim(G) \geq 6$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan $\dim(G) = 6$.

1.5.7 Hasil Peneliti Terdahulu

Teorema 1.5.7.1 Jika C_n adalah graf siklus dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $\dim(C_n) = 2$. (Septiana dan Rahadjeng, 2012).

Teorema 1.5.7.2 Suatu graf terhubung G dengan orde $n \geq 2$ memiliki dimensi metrik $n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$ (Chartrand, 2000).

Teorema 1.5.7.3 Misalkan P_n adalah graf lintasan orde n dan K_m graf lengkap orde m maka $\dim(P_n \odot K_m) = n(m - 1)$, dengan $n \geq 2, m \geq 2$.

Teorema 1.5.7.4 Misalkan C_n adalah graf siklus orde n dan P_2 adalah graf lintasan dengan orde 2, maka $\dim(C_n \odot mP_2) = nm$, dengan $n, m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$ (Ferdianto, 2019).

Teorema 1.5.7.5 Jika graf G adalah $K_n \odot K_{n-1}$, dengan $n \geq 3$ maka dimensi metrik dari G adalah $\dim(K_n \odot K_{n-1}) = n(n - 2)$ (Listiana, 2016).

Teorema 1.5.7.6 Jika G adalah graf hasil $(P_n \odot C_m)$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 5$, maka $\dim(G) = n(m - 3)$ (Kapita, 2017).

Teorema 1.5.7.8 (Rahmah, N., 2025) Dimensi metrik sisi graf Buku B_n yaitu :

$$B_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ n, & n \geq 2 \end{cases}$$

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian pustaka (*library research*). Metode ini merupakan metode yang dilakukan dengan mengkaji beberapa literatur-literatur yang ada dengan tujuan menunjang dan memastikan penelitian yang dilakukan belum diteliti oleh para peneliti sebelumnya.

2.2 Waktu dan Tempat Penelitian

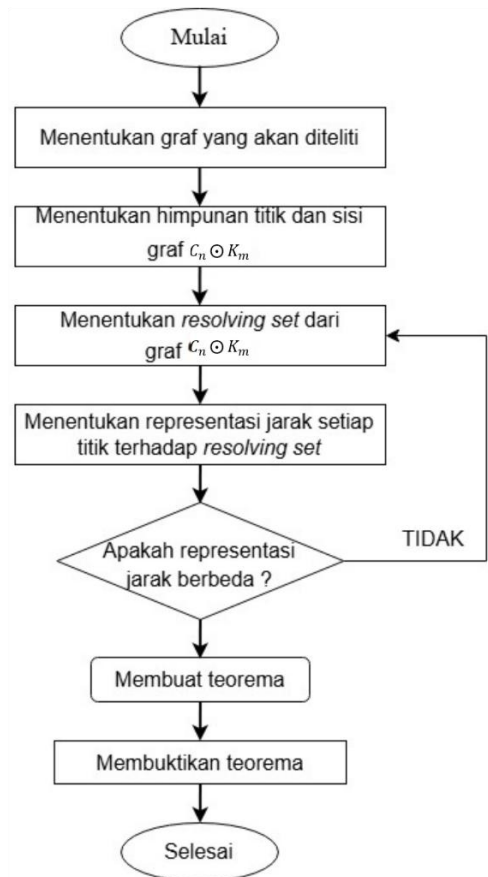
Penelitian ini dimulai pada 25 Agustus 2025 dengan memanfaatkan berbagai sumber literatur yang relevan. Kegiatan penelitian dilaksanakan di Universitas Hasanuddin, khususnya di Perpustakaan FMIPA dan Perpustakaan Pusat.

2.3 Prosedur Penelitian

Adapun beberapa Langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini Adalah sebagai berikut.

1. Melakukan studi pustaka untuk memahami konsep dasar teori graf, dimensi metrik, dan karakteristik graf hasil operasi corona antara graf siklus dan graf lengkap.
2. Mengontruksi graf hasil operasi corona antara graf siklus dan graf lengkap.
3. Menentukan himpunan pembeda yang akan digunakan untuk mengukur jarak dari setiap titik.
4. Menentukan representasi jarak setiap titik terhadap titik pembeda (*resolving set*).
5. Mengecek Kembali representasi titik terhadap titik pembeda. Apabila terdapat representasi titik yang sama, maka Kembali ke tahap empat. Sebaliknya, apabila representasi setiap titik sudah berbeda, maka penelitian dapat dilanjutkan ke tahap berikutnya.
6. Menentukan teorema dimensi metrik pada graf hasil operasi corona antara graf siklus dan graf lengkap.
7. Membuktikan teorema

2.4 Alur Kerja Penelitian



Gambar 2.4.1 Alur Kerja Penelitian