PEMODELAN REGRESI BIVARIATE ZERO-INFLATED POISSON UNTUK MENGATASI OVERDISPERSI

SKRIPSI

ANDI ISNA YUNITA

H121 16 310

PROGRAM STUDI STATISTIKA

DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2020

PEMODELAN REGRESI BIVARIATE ZERO-INFLATED POISSON UNTUK MENGATASI OVERDISPERSI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ANDI ISNA YUNITA

H12116310

PROGRAM STUDI STATISTIKA

DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

SEPTEMBER 2020

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Pemodelan Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson
Untuk Mengatasi Overdispersi

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 28 September 2020

METERAI TEMPEL
2A06CAHF659756848
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Andi Isna Yunita
NIM H12116310

PEMODELAN REGRESI BIVARIATE ZERO-INFLATED POISSON UNTUK MENGATASI OVERDISPERSI

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	**Pembimbing Pertama**
Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si	**Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si**
NIP. 19731228 200003 1001	**NIP. 19620926 198702 2001**

Pada Tanggal : 28 September 2020

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : Andi Isna Yunita

NIM : H12116310

Program Studi : Statistika

Judul Skripsi : Pemodelan Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson Untuk Mengatasi Overdispersi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

DEWAN PENGUJI

		Tanda Tangan
1. Ketua	: Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si	(..............................)
2. Sekretaris	: Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si	(..............................)
3. Anggota	: Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si	(..............................)
4. Anggota	: Sitti Sahriman, S.Si., M.Si	(..............................)

...kan di : Makassar

...l : 28 September 2020

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada **Allah SWT** atas segala limpahan rahmat, nikmat, dan hidayah-Nya, serta shalawat dan salam semoga selalu dilimpahkan kepada Nabi yang paling dimuliakan, pemimpin orang-orang bertakwa, **Muhammad bin Abdullah** dan kepada para keluarga serta sahabat yang berjuang bersama beliau. *Alhamdulillah*, berkat pertolongan Allah akhirnya tugas akhir dengan judul "**Pemodelan Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson Untuk Mengatasi Overdispersi**" yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulisan tugas akhir ini tentunya tidak lepas dari bantuan berbagai pihak baik moril maupun materil. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga untuk Ayahanda **Zainal Abidin** dan Ibunda tercinta **Andi Tasmawati** yang tak kenal lelah mendoakan, memberikan dukungan, dan selalu melimpahkan cinta dan kasih sayangnya kepada penulis sehingga mereka menjadi motivasi terbesar penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Untuk adik-adikku tercinta **Andi Amir Achmad Riyadi, Andi Novita Sri Ramadhani, Andi Devi Permatasari,** dan **Andi Desi Ratnasari** serta sepupu tercinta yang kuanggap kakak sendiri **Andi Nurhidayah** terima kasih telah memberikan semangat, motivasi, dukungan, dan doa yang diberikan kepada penulis. Dan tak terlupakan untuk seluruh keluarga besar, penulis ucapkan banyak terima kasih atas doa dan dukungan moril maupun materil selama penulis mengemban ilmu di Universitas Hasanuddin.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Pulubuhu, MA,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.

[illegible]k **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu [illegible]etahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.

3. Ibu **Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si** selaku Ketua Departemen Statistika, segenap dosen pengajar, dan staf Departemen Statistika yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan serta bantuan-bantuan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.
4. Bapak **Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si** selaku dosen pembimbing utama sekaligus pembimbing akademik yang telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk memberikan masukan, arahan, dan motivasi kepada penulis mulai dari awal hingga selesainya penulisan tugas akhir ini dan Ibu **Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si** selaku dosen pembimbing pertama yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan masukan dan motivasi.
5. Ibu **Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si, M.Si** dan Ibu **Sitti Sahriman, S.Si, M.Si** selaku anggota Tim Penguji. Terima kasih telah meluangkan waktu dan telah memberikan kritikan dan saran yang membangun dalam penyempurnaan penyusunan tugas akhir ini.
6. Keluarga besar **ALGORITMA 2016** yang telah penulis anggap seperti saudara sendiri yang selalu memberikan semangat dan motivasi selama di kampus. Banyak pengalaman dan pelajaran berharga yang penulis dapatkan dari kalian.
7. Kakak-kakak, teman-teman, dan adik-adik anggota **Keluarga Mahasiswa FMIPA Unhas** terkhusus anggota keluarga **Himatika FMIPA Unhas** dan **Himastat FMIPA Unhas**, terima kasih atas ilmu yang tidak didapatkan di bangku perkuliahan dan banyak belajar betapa pentingnya sebuah proses.
8. Teman-teman **Statistika 2016**, terkhusus spesial untuk **Sobat Minor**, yaitu **Ratmila**, **Ririn Arianti**, **Alimatun Najiha**, **Ainun Utari**, **Annisa AK**, **Asnidar**, **Nur Alfianingsih Raja**, **Nurazrawiyah Amin**, **Reza Ayu Lestari**, **Andi Tenri Riski Amalia**, **Risma Sari**, dan **Nurul Afdhaliah**. Terima kasih atas motivasi, segala cerita suka dan dukanya, serta selalu menemani penulis sehingga masa perkuliahan dapat dijalani lebih bermakna dan berwarna.
9. Spesial untuk sahabat-sahabat tercintaku **Nurul Azizah Mansyur, S.Ked**; **...wahidah Amir, A.Md**; **Nurqanaah M., S.Ked; Ayu Khumaera, S.Ak**; **...Dwi Sinta Saputri, S.Tr.T** dan **Nurhashunatil Mar'ah, S.KH** yang telah ...dengarkan segala curhatan, memberikan nasihat, dan memotivasi penulis ...gga penulis bisa mendapatkan lebih banyak pelajaran hidup.

10. Seluruh teman-teman **KKN Unhas Gelombang 102 Kecamatan Sinjai Timur**, terkhusus kepada teman posko **Desa Salohe** yang telah menjadi sahabat sekaligus keluarga selama di lokasi KKN hingga saat ini.
11. Serta kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih untuk semuanya. Semoga segala dukungan dan partisipasi yang diberikan kepada penulis bernilai ibadah di sisi **Allah SWT**.

Penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan tambahan pengetahuan baru bagi para pembelajar statistika. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga apa yang telah kita lakukan hari ini dapat membuat kita selangkah lebih maju dari hari-hari sebelumnya dan mudah-mudahan tugas akhir ini bermanfaat bagi orang-orang yang berkepentingan. Aamiin...

Makassar, 28 September 2020

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Andi Isna Yunita
NIM	: H12116310
Program Studi	: Statistika
Departemen	: Statistika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non-eksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Pemodelan Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson Untuk Mengatasi Overdispersi"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 28 September 2020

Yang menyatakan

Andi Isna Yunita

ABSTRAK

Regresi *Poisson* merupakan model regresi non-linier dengan variabel responnya berupa data diskrit dan berdistribusi *Poisson*. Salah satu asumsi yang harus dipenuhi dalam regresi *Poisson* adalah asumsi *equidispersi*, yaitu keadaan dengan mean dan variansi dari variabel responnya bernilai sama. Namun dalam aplikasinya asumsi tersebut kadang dilanggar karena nilai variansinya lebih besar daripada meannya yang disebut *overdispersi*. Salah satu penyebab terjadinya *overdispersi* adalah lebih banyaknya pengamatan bernilai nol sehingga dapat digunakan model regresi *Zero-Inflated Poisson* (ZIP). Sedangkan untuk memodelkan sepasang data diskrit yang saling berkorelasi dan *overdispersi*, maka dapat digunakan model regresi *Bivariate Zero-Inflated Poisson* (BZIP). Model regresi BZIP merupakan model dengan variabel respon yang berdistribusi campuran antara distribusi *Bivariate Poisson* dan probabilitas titik di (0,0). Parameter model regresi BZIP diestimasi menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dengan algoritma *expectation maximization* (EM). Penelitian ini diaplikasikan pada data jumlah kematian ibu dan bayi di Kota Makassar tahun 2017. Hasil yang diperoleh adalah nilai AIC dari model regresi BZIP, yaitu 170,976 lebih kecil dibandingkan dengan model regresi *Bivariate Poisson*, yaitu 198,120. Hal ini menunjukkan bahwa medel regresi BZIP lebih baik digunakan pada data yang mengalami *overdispersi*.

Kata Kunci: Kematian Ibu, Kematian Bayi, *Overdispersi*, Regresi BZIP, MLE

ABSTRACT

Poisson regression is a non-linear regression model with response variable in form of discrete data and Poisson distribution. One of assumptions that must be met in Poisson regression is assumption of equidispersion, which is a condition where mean and variance of response variable are the same. However in its application, this assumption is sometimes violated because the variance is greater than the mean which is called overdispersion. One of the causes overdispersion is more zero-value observations so the Zero-Inflated Poisson (ZIP) regression model can be used. As for modeling a pair of discrete data is correlated and overdispersi, it can be used the Bivariate Zero-Inflated Poisson (BZIP) regression model. The BZIP regression model is a model with response variables with mixed distributions between Bivariate Poisson distribution and a point probability at (0,0). Parameters of the BZIP regression model are estimated using maximum likelihood estimation (MLE) with expectation maximization (EM) algorithm. This research was applied to data on number of maternal and infant mortality in the city of Makassar in 2017. The result obtained is the AIC value of the BZIP regression model is 170,976 smaller than the Bivariate Poisson regression model is 198,120. This shows that the BZIP regression model is better used for data with overdispersion.

Keywords: Maternal Mortality, Infant Mortality, Overdispersion, BZIP Regression, MLE

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Angka kematian ibu dan bayi merupakan salah satu indikator yang paling menonjol untuk menilai derajat kesehatan masyarakat di suatu daerah. Namun, sampai saat ini angka kematian ibu dan bayi di Sulawesi Selatan masih tergolong tinggi. Bahkan Sulawesi Selatan termasuk provinsi dengan jumlah kematian ibu dan bayi terbanyak di Indonesia sehingga masalah Kesehatan Ibu dan Anak (KIA) masih menjadi masalah yang perlu diperhatikan. Dinas Kesehatan Sulawesi Selatan menyatakan bahwa setiap minggunya, 2 ibu dan 16 bayi baru lahir meninggal. Sepanjang tahun 2017, terdapat 115 kematian ibu dan 1.059 kematian bayi di Sulawesi Selatan. Kota Makassar menjadi salah satu dari 5 kabupaten/kota di Sulawesi Selatan dengan tingkat kematian ibu dan bayi terbanyak (Dinkes, 2018).

Menurut *World Health Organization* (WHO), kematian ibu dan bayi merupakan dua hal yang saling berkaitan karena selama masa kandungan, gizi yang diperoleh janin disalurkan dari tubuh ibu melalui plasenta sehingga kondisi ibu selama masa kehamilan akan berpengaruh pada janin dan bayi yang dilahirkannya kelak. Peran ibu juga sangat berpengaruh dalam merawat bayi mulai saat ia dilahirkan hingga berumur satu tahun (Arkandi & Winahju, 2015). Adapun upaya yang dilakukan oleh pemerintah dalam mengantisipasi angka kematian ibu dan bayi, antara lain melalui peningkatan pelayanan kesehatan ibu hamil, bersalin, dan nifas serta peningkatan pelayanan kesehatan bayi (Dinkes, 2018). Oleh karena itu, agar upaya tersebut tepat guna, maka diperlukan adanya penelitian tentang jumlah kematian ibu dan bayi dengan melibatkan faktor-faktor yang mempengaruhi keduanya secara bersamaan.

Jumlah kematian ibu dan bayi merupakan data hitung yang mengikuti distribusi *Poisson* dan mempunyai keterkaitan atau korelasi satu sama lain. Regresi *Poisson* merupakan metode regresi yang digunakan untuk memodelkan data hitung (diskrit) yang memiliki korelasi (Karlis & Ntzoufras, 2005). n sebelumnya dilakukan oleh Arkandi dan Winahju (2015) menggunakan model regresi *Bivariate Poisson* pada data kematian ibu dan bayi yang menghasilkan bahwa model tersebut baik untuk memodelkan sepasang data hitung (diskrit) yang saling berkorelasi. Namun, model yang dihasilkan memiliki nilai variansi yang lebih besar daripada nilai meannya atau data mengalami *overdispersi*. Dengan demikian, model yang diperoleh tidak memenuhi asumsi distribusi *Poisson* dengan nilai mean dan variansi yang sama.

Penelitian lainnya yang telah menggunakan model regresi *Bivariate Poisson* dilakukan oleh Ilmi (2015) pada data jumlah kasus malaria dan filariasis yang menghasilkan model regresi dengan tiga parameter, yaitu λ_1 sebagai kasus malaria, λ_2 sebagai kasus filariasis, dan λ_0 sebagai kasus malaria dan filariasis. Model regresi tersebut dibangun dengan tiga buah nilai λ_0 yang berbeda, yaitu λ_0 sama dengan nol, λ_0 adalah suatu konstanta, dan λ_0 adalah suatu persamaan. Selain itu, Armawati (2016) juga memodelkan data kasus HIV dan AIDS dengan tiga buah nilai λ_0 yang berbeda. Sedangkan penelitian yang dilakukan oleh Kurniawan (2018) hanya memodelkan data jumlah kematian ibu dan bayi dengan λ_0 adalah suatu konstanta. Penelitian-penelitian tersebut menghasilkan model yang baik untuk memodelkan data hitung yang berpasangan namun tidak dapat mengatasi masalah *overdispersi*. Oleh karena itu, model regresi *Bivariate Zero-Inflated Poisson* (BZIP) digunakan untuk mengatasi masalah respon bivariat yang bernilai nol lebih banyak dan sekaligus mengatasi *overdispersi* secara bersamaan.

Model regresi BZIP merupakan model dengan variabel respon yang berdistribusi campuran antara distribusi *Bivariate Poisson* dan probabilitas titik di (0,0) (Wang dkk., 2003). Untuk mengestimasi parameter, metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dapat digunakan pada model regresi yang datanya mengikuti distribusi tertentu. Metode MLE dilakukan dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Namun pada umumnya, maksimum suatu fungsi *likelihood* tidak bisa diselesaikan secara analitik. Oleh karena jika diperoleh bentuk implisit atau non-linier, maka dapat diselesaikan dengan algoritma *Newton-Raphson* (NR), [illegible] *coring*, atau *Expectation Maximization* (EM) untuk mendapatkan solusi [illegible]ya (Purba, 2018).

Banyaknya pengamatan bernilai nol merupakan salah satu penyebab terjadinya *overdispersi* pada data model regresi BZIP sehingga algoritma EM cocok digunakan untuk mengestimasi parameter yang menyertakan pengamatan yang bernilai nol (Kusuma dkk., 2013). Algoritma EM terdiri dari dua tahap, yaitu tahap *Expectation* (*E-Step*) untuk mencari nilai ekspektasi dari fungsi *likelihood* dan tahap *Maximization* (*M-Step*) untuk memaksimumkan fungsi yang telah didefinisikan pada tahap ekspektasi sehingga didapatkan estimator parameter yang konvergen. Algoritma EM juga lebih mudah diterapkan ketika masalah optimasi memiliki banyak parameter dibandingkan dengan metode iterasi yang lainnya (Purba, 2018).

Berdasarkan uraian tersebut, peneliti tertarik untuk membahas tentang pemodelan regresi BZIP untuk mengatasi *overdispersi* pada data kematian ibu dan bayi di Kota Makassar tahun 2017. Namun, peneliti membatasi model BZIP dengan λ_0 adalah suatu konstanta.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengestimasi parameter model regresi BZIP dengan menggunakan metode MLE?
2. Bagaimana memodelkan data jumlah kematian ibu dan kematian bayi di Kota Makassar tahun 2017 yang mengalami *overdispersi* dengan menggunakan model regresi BZIP?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada permasalahan sebagai berikut.

1. Model regresi yang digunakan adalah model regresi BZIP dengan λ_0 adalah suatu konstanta.
2. Metode estimasi parameter model BZIP yang digunakan adalah metode MLE dengan algoritma EM.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memperoleh estimasi parameter model regresi BZIP dengan menggunakan metode MLE.
2. Memodelkan data jumlah kematian ibu dan bayi di Kota Makassar tahun 2017 yang mengalami *overdispersi* dengan menggunakan model regresi BZIP.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dalam penelitian ini diharapkan dapat menambah pemahaman teoritis dan praktis bagi peneliti dan pembaca tentang model regresi BZIP menggunakan metode MLE dengan algoritma EM serta pemahaman menganalisis data jumlah kematian ibu dan bayi yang mengalami *overdispersi*. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat menjadi bahan referensi untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Analisis regresi merupakan analisis untuk memodelkan dan menjelaskan hubungan antara dua variabel, yaitu variabel respon dan variabel prediktor. Bentuk umum model regresi linier adalah sebagai berikut.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

dengan $i = 1,2,..n$; y_i adalah variabel respon, $x_{ij} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip})$ adalah variabel prediktor, $\beta_j = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ adalah parameter model regresi yang tidak diketahui, dan ε_i adalah galat yang diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ^2. Persamaan (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks seperti pada persamaan (2.2) berikut.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2)$$

dengan

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Menurut Harlan (2018), asumsi-asumsi yang harus dipenuhi pada model regresi linier, yaitu:

1. Asumsi linieritas, menyatakan bahwa hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor adalah linier.
2. Asumsi normalitas, menyatakan bahwa suku galat berdistribusi normal dengan mean nol, yaitu $E(\varepsilon_i) = 0$.
3. Asumsi homoskedastisitas, menyatakan bahwa suku galat memiliki variansi yang konstan, yaitu $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$.
4. Asumsi indenpendensi dan non-autokorelasi, menyatakan bahwa suku galat ...ng bebas dan tak saling berkorelasi, yaitu $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_{i*}) = 0$.
5. ...umsi non-multikolinieritas, menyatakan bahwa tidak boleh ada korelasi ...ar variabel prediktor, yaitu $cov(x_j, x_{j*}) = 0$.

2.2 Regresi Poisson

Regresi *Poisson* merupakan model regresi non-linier dengan variabel responnya berupa data hitung (diskrit) dan berdistribusi *Poisson*. Distribusi *Poisson* adalah suatu distribusi untuk peristiwa yang probabilitas kejadiannya kecil, dimana kejadian tersebut bergantung pada interval waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu. Jika variabel acak diskrit (Y) berdistribusi *Poisson* dengan parameter $\lambda > 0$, maka fungsi probabilitasnya dinyatakan sebagai berikut.

$$f(y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}, \quad y = 0{,}12, \ldots \tag{2.3}$$

Distribusi *Poisson* memiliki nilai mean dan variansi yang sama, yaitu $E(Y) = Var(Y) = \lambda$ (Arkandi & Winahju, 2015).

Regresi *Poisson* cocok digunakan jika variabel respon (Y) merupakan bilangan bulat non-negatif yang nilainya kecil sehingga model regresi *Poisson* dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y_i = \lambda_i + \varepsilon_i, \quad i = 1,2, \ldots, n \tag{2.4}$$

dengan y_i adalah jumlah kejadian yang terjadi, λ_i adalah rata-rata jumlah kejadian pada waktu tertentu, dan ε_i adalah galat yang diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ^2 (Cahyandari, 2014).

Regresi *Poisson* menggunakan *generalized linear model* (GLM) agar modelnya dapat digunakan dalam data pengamatan, dimana variabel responnya tidak mengharuskan berdistribusi normal. Dalam GLM, terdapat sebuah fungsi g linier yang menghubungkan rata-rata dari variabel respon dengan variabel prediktor, yaitu:

$$g(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip}$$

$$g(\lambda_i) = \boldsymbol{X_i \beta}$$

dengan

fungsi g menunjukkan fungsi penghubung

λ_i menunjukkan rata-rata dari variabel respon (y_i) yang berdistribusi *Poisson*.

$\boldsymbol{X}_i = [1 \quad x_{i1} \quad \cdots \quad x_{ip}]$ menunjukkan vektor yang berukuran $1 \times (p+1)$ dari [illegible] prediktor.

[illegible] $\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_p]^T$ menunjukkan vektor yang berukuran $(p+1) \times 1$ dari [illegible]r regresi yang tidak diketahui.

Oleh karena itu, hubungan antara rata-rata dari variabel respon dan variabel prediktor adalah sebagai berikut

$$\lambda_i = g^{-1}(\boldsymbol{X_i \beta})$$

(Cahyandari, 2014).

Regresi *Poisson* biasanya menggunakan fungsi penghubung logaritma natural, karena rata-rata dari variabel responnya akan berbentuk fungsi eksponensial dan menjamin nilai variabel yang diestimasi dari variabel responnya akan bernilai non-negatif. Fungsi penghubung tersebut berbentuk seperti berikut.

$$g(\lambda_i) = \ln \lambda_i$$

Rata-rata variabel respon dan variabel prediktor dihubungkan dengan menggunakan fungsi penghubung seperti berikut.

$$\ln \lambda_i = \boldsymbol{X_i \beta}$$

$$\lambda_i = \exp(\boldsymbol{X_i \beta}) \tag{2.5}$$

Oleh karena itu, fungsi probabilitas distribusi *Poisson* dapat dituliskan berikut.

$$f(y_i; \boldsymbol{\beta}) = \exp\{-[\lambda_i(\boldsymbol{X_i}; \boldsymbol{\beta})]\} \frac{[\lambda_i(\boldsymbol{X_i}; \boldsymbol{\beta})]^{y_i}}{y_i!}$$

dengan $\lambda(\boldsymbol{X_i}; \boldsymbol{\beta})$ adalah mean dari distribusi *Poisson* dan vektor $\boldsymbol{\beta}$ menunjukkan parameter regresi yang tidak diketahui. Oleh karena itu, model regresi *Poisson* dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y_i = \lambda_i + \varepsilon_i$$

$$y_i = \exp(\boldsymbol{X_i \beta}) + \varepsilon_i \tag{2.6}$$

dengan

$\boldsymbol{X_i} = [1 \quad x_{i1} \quad \cdots \quad x_{ip}]$ menunjukkan vektor yang berukuran $1 \times (p+1)$ dari variabel prediktor yang digunakan untuk memodelkan λ_i.

$\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_p]^T$ menunjukkan parameter regresi yang berukuran $(p+1) \times 1$

ε_i menunjukkan galat yang diasumsikan identik, independen, dan berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ^2.

(Cahyandari, 2014)

gresi *Poisson* mengasumsikan bahwa variabel respon (Y) merupakan diskrit dan harus memenuhi asumsi *equidispersi*. *Equidispersi* yaitu nilai na dengan nilai variansi, yaitu $E(Y) = Var(Y) = \lambda$ (Kurniawan, 2017).

2.3 Regresi Bivariate Poisson

Regresi *Bivariate Poisson* adalah sebuah metode yang digunakan untuk memodelkan sepasang data hitung (diskrit) yang berdistribusi *Poisson* dan saling berkorelasi (Karlis & Ntzoufras, 2005). Karena terdapat dua variabel respon yang saling berkorelasi, maka distribusinya akan mengikuti distribusi *Bivariate Poisson*.

Distribusi *Bivariate Poisson* terjadi saat variabel acak $Z_0, Z_1,$ dan Z_2 masing-masing berdistribusi *Poisson* dengan parameter $\lambda_0, \lambda_1,$ dan λ_2. Terdapat variabel acak Y_1 dan Y_2 yang terbentuk dari variabel $Z_0, Z_1,$ dan Z_2 yang saling bebas (independen) seperti berikut.

$$Y_1 = Z_1 + Z_0 \quad \text{dan} \quad Y_2 = Z_2 + Z_0$$

Oleh karena itu, variabel acak Y_1 dan Y_2 secara bersama-sama berdistribusi *Bivariate Poisson* dengan fungsi probabilitasnya berbentuk seperti berikut.

$$f_{BP}(y_1, y_2) = \exp(-\lambda) \sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{{\lambda_1}^{y_1-r}\, {\lambda_2}^{y_2-r} {\lambda_0}^{r}}{(y_1-r)!\,(y_2-r)!\,r!} \tag{2.7}$$

dengan $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_0$ (Wang Y. , 2017).

Menurut Kawamura (1973), nilai ekpektasi dan kovariansi dari variabel acak Y_1 dan Y_2 adalah sebagai berikut.

$$E(Y_1) = E(Z_1 + Z_0) = E(Z_1) + E(Z_0) = \lambda_1 + \lambda_0$$
$$E(Y_2) = E(Z_2 + Z_0) = E(Z_1) + E(Z_0) = \lambda_2 + \lambda_0$$

Setelah diketahui nilai ekpektasi dari masing-masing variabel acak Y_1 dan Y_2, maka dapat diketahui pula nilai $E(Y_1Y_2)$ sebagai berikut.

$$E(Y_1Y_2) = E[(Z_1 + Z_0)(Z_2 + Z_0)]$$
$$E(Y_1Y_2) = E(Z_1Z_0) + E(Z_1Z_2) + E(Z_0Z_2) + E\left({Z_0}^2\right)$$
$$E(Y_1Y_2) = (\lambda_1 + \lambda_0)(\lambda_2 + \lambda_0) + \lambda_0$$

Kemudian diperoleh nilai variansi, yaitu :

$$Var(Y_1) = Var(Z_1 + Z_0) = Var(Z_1) + Var(Z_0) = \lambda_1 + \lambda_0$$
$$Var(Y_2) = Var(Z_2 + Z_0) = Var(Z_2) + Var(Z_0) = \lambda_2 + \lambda_0$$

Sedangkan nilai kovariansinya, yaitu :

$$Cov(Y_1, Y_2) = E\big[\big(Y_1 - E(Y_1)\big)\big(Y_2 - E(Y_2)\big)\big]$$
$$Cov(Y_1, Y_2) = E[Y_1Y_2 - Y_1E(Y_2) - Y_2E(Y_1) + E(Y_1)E(Y_2)]$$
$$Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$$
$$Cov(Y_1, Y_2) = \big((\lambda_1 + \lambda_0)(\lambda_2 + \lambda_0) + \lambda_0\big) - \big((\lambda_1 + \lambda_0)(\lambda_2 + \lambda_0)\big)$$
$$Cov(Y_1, Y_2) = \lambda_0$$

Dengan demikian, koefisien korelasi untuk Y_1 dan Y_2, yaitu :

$$\rho_{Y_1Y_2} = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_2)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_0)(\lambda_2 + \lambda_0)}}$$

(Ilmi, 2015).

Regresi *Bivariate Poisson* mendapatkan model dari bentuk berikut.

$$(Y_1, Y_2) \sim BP(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0)$$
$$\lambda_{ik}^* = \lambda_{ik} + \lambda_0 = \exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}) \ , \ \ k = 1{,}2 \qquad (2.8)$$

dengan

λ_{ik}^* menunjukkan rata-rata dari variabel respon (y_{ik}) yang berdistribusi *Poisson*.

$\boldsymbol{X_i} = [1 \quad x_{i1} \quad \cdots \quad x_{ip}]$ menunjukkan vektor yang berukuran $1 \times (p+1)$ dari variabel prediktor yang digunakan untuk memodelkan λ_{ik}^*.

$\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{0k} \quad \beta_{1k} \quad \cdots \quad \beta_{pk}]^T$ menunjukkan vektor yang berukuran $(p+1) \times 1$ dari parameter regresi yang tidak diketahui.

(Kocherlakota & Kocherlakota, 2007)

Menurut Karlis dan Ntzoufras (2005), terdapat 3 model regresi *Bivariate Poisson* dengan nilai λ_0 yang berbeda, diantaranya:

1) Model dengan nilai λ_0 adalah suatu konstanta (tidak ada kovariat di dalam λ_0).
2) Model dengan nilai λ_0 merupakan fungsi dari variabel bebas (kovariat) sehingga membentuk suatu persamaan berikut

$$\lambda_0 = \exp(\beta_{00} + \beta_{10}x_1 + \beta_{20}x_2 + \cdots + \beta_{p0}x_p) = \exp(\boldsymbol{X\beta_0})$$

3) Model dengan nilai λ_0 adalah nol, dengan tidak ada kovariat dari kedua ...bel atau kedua variabel respon saling bebas, biasanya disebut model ...le *Poisson*.

...ti, 2018)

2.4 Equidispersi

Salah satu asumsi yang harus dipenuhi dalam regresi *Poisson* adalah asumsi *equidispersi*, yaitu keadaan dengan mean dan variansi dari variabel responnya bernilai sama. Namun dalam aplikasinya asumsi tersebut kadang dilanggar, dimana nilai variansinya lebih besar daripada nilai mean yang disebut *overdispersi* atau nilai variansinya lebih kecil daripada nilai mean yang disebut *underdispersi* (Cameron & Trivedi, 1998). *Overdispersi* pada regresi *Poisson* menghasilkan simpangan baku dari estimasi parameter jauh lebih kecil daripada nilai sebenarnya (*underestimate*) dan uji signifikansi dari variabel prediktor jauh lebih besar daripada nilai sebenarnya (*overestimate*), sehingga kesimpulan yang dihasilkan menjadi tidak valid (Ismail & Jemain, 2007).

Dalam beberapa kasus, yang ditemukan adalah variansi data yang diamati lebih besar daripada meannya atau disebut *overdispersi*. Ada beberapa hal yang dapat menyebabkan terjadinya *overdispersi*, antara lain: banyaknya pengamatan yang bernilai nol (*excess zero*), adanya sumber keragamaan antar individu yang tidak teramati (*unobserved heterogeneity*), adanya pengamatan yang hilang (*data missing*), adanya pencilan (*outlier*) pada data sehingga perlunya interaksi dalam model, atau kesalahan spesifikasi fungsi penghubung (Cahyandari, 2014).

2.5 Regresi Zero-Inflated Poisson

Salah satu penyebab terjadinya *overdispersi* adalah lebih banyak pengamatan bernilai nol daripada yang diharapkan untuk model regresi *Poisson*. Salah satu metode analisis yang diusulkan untuk lebih banyak pengamatan bernilai nol adalah model regresi *Zero-Inflated Poisson* (ZIP) (Jansakul & Hinde, 2002).

Jika Y adalah variabel acak yang berdistribusi ZIP, maka nilai nol pada pengamatan diestimasikan muncul dalam dua cara yang sesuai dengan keadaan (*state*) yang terpisah. Keadaan pertama disebut *zero state* terjadi dengan probabilitas π dan menghasilkan hanya pengamatan yang bernilai nol. Sedangkan [illegible] kedua disebut *Poisson state* terjadi dengan probabilitas $(1-\pi)$ dan [illegible]usi *Poisson* dengan mean λ. Proses dua keadaan ini memberikan distribusi [illegible] dua komponen dengan fungsi probabilitas seperti pada Persamaan (2.9) [illegible] & Hinde, 2002).

$$f_{ZIP}(y) = \begin{cases} \pi + (1-\pi)e^{-\lambda}, & untuk\ y = 0,\quad 0 \le \pi \le 1 \\ \dfrac{(1-\pi)e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, & untuk\ y \ne 0,\quad 0 \le \pi \le 1 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Lambert (1992) menyarankan model gabungan untuk λ_i dan π_i , yaitu:

$$\ln(\lambda_i) = \boldsymbol{X_i\beta} \text{ dan } \operatorname{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{X_i\gamma} \qquad (2.10)$$

dengan

λ_i menunjukkan rata-rata dari variabel respon (y_i).

π_i menunjukkan probabilitas pengamatan ke-i.

$\boldsymbol{X_i} = [1 \quad x_{i1} \quad \cdots \quad x_{ip}]$ menunjukkan vektor berukuran $1 \times (p+1)$ dari variabel prediktor yang digunakan untuk memodelkan λ_i.

$\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_p]^T$ dan $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_p]^T$ menunjukkan vektor yang berukuran $(p+1) \times 1$ dari parameter regresi yang tidak diketahui.

Nilai ekspektasi dan variansi dari Y sebagai berikut.

$$E(Y) = (1-\pi)\lambda = \mu \text{ dan } Var(Y) = \mu + \left(\frac{\pi}{\pi-1}\right)\mu^2 \qquad (2.11)$$

Overdispersi pada Y terjadi jika nilai $\pi > 0$ yang mengindikasikan bahwa terjadinya peningkatan nilai nol pada variabel respon Y. Persamaan (2.11) terlihat bahwa $Var(Y) > E(Y)$ yang mengindikasi bahwa regresi ZIP dapat mengatasi *overdispersi* (Eminita dkk., 2019). Oleh karena itu, regresi ZIP mendapatkan model dari bentuk berikut (Wang dkk., 2003).

$$Y \sim ZIP(\lambda, \pi)$$

$$\ln(\lambda_i) = \boldsymbol{X_i\beta}$$

$$\lambda_i = \exp(\boldsymbol{X_i\beta}) \qquad (2.12)$$

$$\operatorname{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{X_i\gamma}$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})$$

$$\pi_i + \pi_i \exp(\boldsymbol{X_i\gamma}) = \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})$$

$$\pi_i = \frac{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} \qquad (2.13)$$

2.6 Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson

Untuk data diskrit yang saling berkorelasi dan mengalami *overdispersi*, distribusi *Bivariate Zero-Inflated Poisson* (BZIP) dapat dibangun dari distribusi *Bivariate Poisson* dan probabilitas titik di (0,0) yang didefinisikan sebagai berikut.

$(Y_1, Y_2) \sim Degenerate(0,0)$ dengan probabilitas π disebut *zero state*

$\sim BP(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0)$ dengan probabilitas $(1-\pi)$ disebut *Poisson state*

Distribusi BZIP memiliki fungsi probabilitas seperti berikut.

$$f_{BZIP}(y_1, y_2) = \begin{cases} \pi + (1-\pi)e^{-\lambda}\ , & (y_1, y_2) = (0,0) \\ (1-\pi)e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{r=0}^{\min\{y_1, y_2\}} \frac{{\lambda_1}^{y_1-r}\,{\lambda_2}^{y_2-r}\,{\lambda_0}^{r}}{(y_1-r)!\,(y_2-r)!\,r!}, & (y_1, y_2) \neq (0,0) \end{cases} \tag{2.14}$$

dengan $0 < \pi < 1$ dan $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_0$ (Wang dkk., 2003).

Distribusi marginal dari BZIP adalah distribusi univariat ZIP sebagai berikut.

$$f_{Y_k}(y_k) = \begin{cases} \pi + (1-\pi)\exp(-\lambda_k - \lambda_0)\ , & untuk\ y_k = 0 \\ (1-\pi)\dfrac{(\lambda_k + \lambda_0)^{y_k}}{y_k!}\exp(-\lambda_k - \lambda_0)\ , & untuk\ y_k \neq 0 \end{cases}$$

Nilai ekspektasi dan variansi dari distribusi BZIP adalah sebagai berikut.

$$E(Y_k) = (1-\pi)(\lambda_k + \lambda_0) = \mu_k\ , \quad k = 1,2$$

$$Var(Y_k) = [1 + \pi(\lambda_k + \lambda_0)]\ \mu_k\ , \quad k = 1,2$$

$$E(Y_1 Y_2) = (1-\pi)[(\lambda_1 + \lambda_0)(\lambda_2 + \lambda_0) + \lambda_0]$$

$$Cov(Y_1, Y_2) = (1-\pi)[\lambda_0 + \pi(\lambda_1 + \lambda_0)(\lambda_2 + \lambda_0)]$$

Oleh karena itu, regresi BZIP mendapatkan model dari bentuk berikut.

$$(Y_1, Y_2) \sim BZIP(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \pi)$$

$$\ln({\lambda_{ik}}^{*}) = \ln(\lambda_{ik} + \lambda_0) = \boldsymbol{X_i \beta_k}\ , \quad k = 1,2 \tag{2.15}$$

$$\text{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{X_i \gamma} \tag{2.16}$$

dengan

λ_{ik} menunjukkan rata-rata dari variabel respon (y_{ik}).

π_i menunjukkan probabilitas pengamatan ke-i.

$\boldsymbol{X}_i$ me...njukkan vektor berukuran $1 \times (p+1)$ dari variabel prediktor yang ...n untuk memodelkan λ_{ik}.

... menunjukkan vektor yang berukuran $(p+1) \times 1$ dari parameter regresi ...k diketahui. (Wang dkk., 2003)

2.7 Metode Maximum Likelihood Estimation

Metode *maximum likelihood estimation* (MLE) dapat digunakan untuk menaksir parameter suatu model yang diketahui fungsi probabilitasnya. Misalkan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah sampel acak dari populasi dengan fungsi probabilitas $f(y|\boldsymbol{\theta})$ yang bergantung pada $\boldsymbol{\theta} = \lambda_0, \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\gamma}$ dengan $\boldsymbol{\theta}$ adalah parameter yang tidak diketahui. Karena $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ saling bebas, maka fungsi probabilitas bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n|\boldsymbol{\theta}) = f(y_1|\boldsymbol{\theta}) \cdot f(y_2|\boldsymbol{\theta}) \cdot \dots \cdot f(y_n|\boldsymbol{\theta})$$

Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai fungsi probabilitas bersama dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ yang dianggap sebagai fungsi dari $\boldsymbol{\theta}$ yang dituliskan sebagai $L(\boldsymbol{\theta}|y)$, yaitu:

$$L(\boldsymbol{\theta}|y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n|\boldsymbol{\theta})$$

$$L(\boldsymbol{\theta}|y) = f(y_1|\boldsymbol{\theta}) \cdot f(y_2|\boldsymbol{\theta}) \cdots f(y_n|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\boldsymbol{\theta}) \tag{2.17}$$

(Hogg, McKean, & Craig, 2013)

Estimator maksimum likelihood $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta}|y)$. Namun, lebih mudah bekerja dengan logaritma natural dari fungsi *likelihood*, yaitu $l(\boldsymbol{\theta}|y) = \ln L(\boldsymbol{\theta}|y)$. Karena fungsi logaritma natural adalah fungsi yang monoton naik, maka nilai yang mamaksimumkan fungsi $l(\boldsymbol{\theta}|y)$ sama dengan memaksimumkan fungsi $L(\boldsymbol{\theta}|y)$ sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$l(\boldsymbol{\theta}|y) = \ln L(\boldsymbol{\theta}|y)$$

$$l(\boldsymbol{\theta}|y) = \ln\left\{\prod_{i=1}^{n} f(y_i|\boldsymbol{\theta})\right\} = \sum_{i=1}^{n} \ln f(y_i|\boldsymbol{\theta}) \tag{2.18}$$

Untuk memperoleh nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi $l(\boldsymbol{\theta}|y)$, maka $l(\boldsymbol{\theta}|y)$ diturunkan terhadap $\boldsymbol{\theta}$ dan kemudian menyamakannya dengan nol seperti pada Persamaan (2.19) berikut.

$$l'(\boldsymbol{\theta}|y) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}|y)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0 \tag{2.19}$$

(Hogg, McKean, & Craig, 2013)

2.8 Algoritma Expectation Maximization

Algoritma *Expectation Maximization* (EM) pertama kali diperkenalkan oleh Dempster, Laird, dan Rubin pada tahun 1977. Algoritma EM digunakan untuk mengestimasi suatu parameter dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* yang mengandung data hilang atau tidak lengkap (*incomplete data*). Algoritma EM terdiri dari dua tahap, yaitu tahap ekspektasi dan maksimalisasi. Misalnya diasumsikan terdapat data pengamatan y berdistribusi tertentu yang mengandung data hilang z. Oleh karena itu, dibentuk distribusi gabungan antara y dan z, yaitu:

$$f(y,z\,\big|\,\boldsymbol{\theta}) = f(z)\cdot f(y|z) \tag{2.20}$$

Tahap ekspektasi (*E-Step*) pada algoritma EM dilakukan dengan menghitung ekspektasi dari fungsi *ln-likelihood* dari data hilang berdasarkan data pengamatan yang ada (tidak hilang), yang digunakan untuk mengganti keberadaan data yang dianggap hilang. Oleh karena itu, fungsi Q didefinisikan sebagai berikut:

$$Q\left(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(\mathbf{0})};y\right) = E[\ln L(\,\boldsymbol{\theta}^{(\mathbf{0})}|y,z)] \tag{2.21}$$

Pada tahap maksimalisasi (*M-Step*) dilakukan dengan mencari nilai estimator yang dapat memaksimumkan fungsi Q yang telah didefinisikan pada tahap ekspektasi. Metode yang dapat digunakan untuk memaksimumkan fungsi Q adalah metode *Newton-Raphson* yang dilakukan secara numerik. Langkah E dan M dilakukan secara iteratif sampai didapatkan estimator $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ yang konvergen, yaitu saat $\left\|\boldsymbol{\theta}^{(\boldsymbol{r}+\mathbf{1})} - \boldsymbol{\theta}^{(\boldsymbol{r})}\right\| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$, dengan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah nilai galat yang sangat kecil (Purba, 2018).

2.9 Uji Serentak Parameter Model

Uji serentak parameter model regresi digunakan untuk mengetahui bahwa seluruh variabel prediktor tidak berpengaruh terhadap variabel respon atau terdapat minimal salah satu variabel prediktor yang berpengaruh terhadap variabel respon. Untuk melakukan uji serentak parameter model dapat dilakukan dengan statistik uji rasio *likelihood*. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

H_0 : $\beta_{11} = \cdots = \beta_{p1} = \beta_{12} = \cdots = \beta_{p2} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0$ (variabel prediktor ara bersama-sama tidak mempunyai pengaruh terhadap variabel respon)

a $\beta_{j1} \neq 0$ atau $\beta_{j2} \neq 0$ atau $\gamma_j \neq 0$, dengan $j = 1,2,\ldots,p$ (variabel diktor secara bersama-sama mempunyai pengaruh terhadap variabel pon)

Statistik uji:

$$G = -2 \ln \left[\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} \right] = 2\left[\ln L(\widehat{\Omega}) - \ln L(\widehat{\omega}) \right]$$

dengan

$L(\widehat{\omega})$ adalah nilai fungsi *likelihood* tanpa variabel prediktor.

$L(\widehat{\Omega})$ adalah nilai fungsi *likelihood* dengan variabel prediktor.

Jika $G_{hitung} > \chi^2_{\alpha;dk}$ dengan dk adalah derajat kebebasan, maka H_0 ditolak yang artinya variabel prediktor secara bersama-sama memiliki pengaruh terhadap variabel respon (Kurniawan, 2017).

2.10 Uji Parsial Parameter Model

Uji parsial digunakan untuk mengetahui variabel-variabel prediktor yang berpengaruh terhadap variabel respon atau sebaliknya. Statistik uji yang digunakan untuk uji parsial, yaitu uji Wald (Kurniawan, 2017).

2.10.1 Uji Parsial Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Pengujian parsial parameter model $\ln(\lambda_{ik}{}^{*}) = \ln(\lambda_{ik} + \lambda_0) = \boldsymbol{X_i \beta_k}$ dengan $k = 1,2$ menggunakan hipotesis sebagai berikut.

H_0 : $\beta_{jk} = 0,\ j = 1,2 \ldots, p,\ \ k = 1,2$ (variabel prediktor tidak mempunyai pengaruh terhadap variabel respon)

H_1 : Ada $\beta_{jk} \neq 0$, $j = 1,2 \ldots, p,\ \ k = 1,2$ (variabel prediktor mempunyai pengaruh terhadap variabel respon)

Statistik uji:

$$W(\hat{\beta}_{jk}) = \left(\frac{\hat{\beta}_{jk}}{SE(\hat{\beta}_{jk})} \right)^2$$

dengan

$\hat{\beta}_{jk}$ adalah estimasi parameter β_{jk}

$SE(\hat{\beta}_{jk})$ adalah standar error dari $\hat{\beta}_{jk}$

$\hat{\beta}_{jk}) > \chi^2_{\alpha;dk}$, maka H_0 ditolak artinya variabel prediktor memiliki

yang signifikan terhadap variabel respon Y_j (Kurniawan, 2017).

2.10.2 Uji Parsial Parameter $\boldsymbol{\gamma}$

Pengujian parsial parameter model $\text{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\gamma}$ dengan menggunakan hipotesis sebagai berikut.

H_0 : $\gamma_j = 0,\ \ j = 1,2 \dots, p$ (variabel prediktor tidak mempunyai pengaruh terhadap variabel respon)

H_1 : Ada $\gamma_j \neq 0\ ,\ \ j = 1,2 \dots, p$ (variabel prediktor mempunyai pengaruh terhadap variabel respon)

Statistik uji:

$$W(\hat{\gamma}_j) = \left(\frac{\hat{\gamma}_j}{SE(\hat{\gamma}_j)}\right)^2$$

dengan

$\hat{\gamma}_j$ adalah estimasi parameter γ_j

$SE(\hat{\gamma}_j)$ adalah standar error dari $\hat{\gamma}_j$

Jika $W(\hat{\gamma}_j) > \chi^2_{\alpha;dk}$, maka H_0 ditolak artinya variabel prediktor memiliki pengaruh yang signifikan terhadap variabel respon Y_1 dan Y_2 (Kurniawan, 2017).

2.11 Pemilihan Model Terbaik

Salah satu kriteria untuk menentukan model terbaik adalah *Akaike Information Criterion* (AIC). Dengan kriteria AIC, model terbaik dipilih dengan mempertimbangkan jumlah parameter dalam model. Kriteria AIC mampu menunjukkan seberapa tepat model tersebut dengan data yang dimiliki secara mutlak. Kriteria AIC didefinisikan sebagai berikut.

$$AIC = 2p - 2\ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

dengan $L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah nilai fungsi *likelihood* dan p adalah banyaknya parameter.

Besarnya nilai AIC sejalan dengan nilai devians dari model. Nilai devians akan semakin kecil apabila rasio antara fungsi *likelihood* di bawah H_0 dengan f[illegible]*kelihood* di bawah populasi semakin besar. Hal ini mengindikasi bahwa [illegible]r yang diuji semakin mendekati nilai parameter populasi yang sebenarnya [illegible] estimasi model semakin baik. Oleh karena itu, model terbaik adalah [illegible]IC terkecil sekaligus dengan devians terkecil pula (Ilmi, 2015).

2.12 Kematian Ibu dan Bayi

Kematian ibu adalah kematian perempuan pada saat hamil atau kematian dalam kurun waktu 42 hari sejak terminasi kehamilan tanpa memandang lamanya kehamilan, yaitu kematian yang disebabkan karena kehamilannya atau penanganannya, tetapi bukan karena sebab-sebab lain seperti kecelakaan dan terjatuh. Angka Kematian Ibu (AKI) dihitung per 100.000 kelahiran hidup pada tahun tertentu. AKI berguna untuk menggambarkan tingkat kesadaran perilaku hidup sehat, status gizi dan kesehatan ibu, kondisi kesehatan lingkungan, tingkat pelayanan kesehatan terutama untuk ibu hamil, serta pelayanan kesehatan waktu ibu melahirkan dan masa nifas (Dinkes, 2018).

Menurut Dinkes (2018), berbagai pelayanan kesehatan dasar dilakukan dalam upaya penurunan AKI, diantaranya sebagai berikut :

1. Pelayanan Kesehatan Ibu Hamil

   Pelayanan kesehatan ibu hamil terdiri dari kunjungan pertama (K1) dan kunjungan keempat (K4). Cakupan K1 adalah jumlah ibu hamil yang telah memperoleh pelayanan kesehatan pertama kali oleh tenaga kesehatan sesuai standar. Sedangkan cakupan K4 adalah jumlah ibu hamil yang telah mendapatkan pelayanan kesehatan sesuai standar, minimal empat kali kunjungan selama masa kehamilannya.

2. Pelayanan Kesehatan Ibu Bersalin

   Pelayanan kesehatan ibu bersalin yang sesuai standar adalah persalinan yang dilakukan oleh bidan dan atau dokter spesialis kebidanan yang bekerja di fasilitas pelayanan kesehatan pemerintah maupun swasta yang memiliki Surat Tanda Register (STR) baik persalinan normal dan atau persalinan dengan komplikasi. Pencapaian upaya kesehatan ibu bersalin diukur melalui indikator persentase persalinan yang ditolong tenaga kesehatan.

3. Pelayanan Kesehatan Ibu Nifas

   Pelayanan kesehatan ibu nifas adalah pelayanan kesehatan pada ibu ...as sesuai standar yang dilakukan sekurang-kurangnya tiga kali sesuai ...wal yang dianjurkan pasca persalinan. Upaya untuk meningkatkan ...upan pelayanan kesehatan ibu nifas yaitu dengan melakukan kunjungan rumah pada semua ibu bersalin selama masa nifas sebanyak 3 kali yang dibantu oleh kader kesehatan di setiap Puskesmas dan pemberian kapsul vitamin A untuk penanggulangan kekurangan vitamin A pada periode sebelum 40 hari setelah melahirkan.

4. Penanganan Komplikasi Kebidanan

   Komplikasi kebidanan adalah kesakitan pada ibu hamil, ibu bersalin, ibu nifas dan atau janin dalam kandungan, baik langsung maupun tidak langsung termasuk penyakit menular dan tidak menular yang dapat mengancam jiwa ibu dan atau janin, yang tidak disebabkan oleh trauma/kecelakaan. Adapun penanganan komplikasi itu sendiri adalah penanganan terhadap komplikasi/ kegawatdaruratan yang mendapat pelayanan kesehatan sampai selesai.

5. Pelayanan Kontrasepsi

   Menurut *World Health Organisation* (WHO), keluarga berencana (KB) adalah tindakan yang membantu individu atau pasangan suami istri untuk menghindari kelahiran yang tidak diinginkan, mendapatkan kelahiran yang diinginkan, mengatur interval di antara kelahiran, mengontrol waktu saat kelahiran dalam hubungan dengan umur suami dan istri, dan menentukan jumlah anak dalam keluarga. Program KB tidak hanya berfungsi untuk menurunkan laju pertumbuhan penduduk, tetapi juga mengatasi permasalahan kesehatan reproduksi di Indonesia sehingga dapat menunjang kelancaran pembangunan.

Kematian bayi adalah kematian yang terjadi saat setelah bayi lahir sampai bayi belum berusia tepat satu tahun. Angka Kematian Bayi (AKB) dihitung per 1.000 kelahiran hidup pada tahun tertentu. Adapun faktor yang menjadi penyebab kematian bayi, yaitu kematian bayi endogen atau kematian neonatal dan kematian bayi eksogen atau kematian post neo-natal (Dinkes, 2018).

Kematian neonatal adalah banyaknya kematian bayi yang terjadi pada bulan [illegible] setelah dilahirkan dan umumnya disebabkan oleh faktor yang dibawa anak [illegible]r yang diperoleh dari orang tua pada saat konsepsi atau selama kehamilan. [illegible] neonatal dapat disebabkan oleh dua faktor, yaitu faktor ibu antara lain pelayanan kesehatan ibu hamil, infeksi ibu hamil, gizi ibu hamil, dan karakteristik dari ibu hamil (umur, paritas, dan jarak kehamilan) serta faktor janin antara lain bayi berat badan lahir rendah (BBLR), asfiksia, dan pneumonia (Dinkes, 2018).

Salah satu upaya penurunan AKB adalah meningkatkan cakupan dan kualitas pelayanan kesehatan bayi. Pelayanan kesehatan bayi bertujuan untuk meningkatkan akses bayi terhadap pelayanan kesehatan dasar, mengetahui sedini mungkin jika terdapat kelainan pada bayi sehingga cepat mendapat pertolongan, pemeliharaan kesehatan dan pencegahan penyakit. Pelayanan kesehatan bayi terdiri dari pemantauan pertumbuhan, imunisasi dasar lengkap, serta peningkatan kualitas hidup bayi dengan stimulasi tumbuh kembang (Dinkes, 2018).

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diperoleh dari buku Profil Dinas Kesehatan Kota Makassar tahun 2017 yang dipublikasikan oleh Dinas Kesehatan Makassar. Jumlah pengamatannya terdiri dari 46 puskesmas yang tersebar di 14 kecamatan di Kota Makassar. Data dapat dilihat pada Lampiran 1 dan Lampiran 2.

3.2 Identifikasi Variabel

Variabel dalam penelitian ini terdiri dari variabel respon (Y) dan variabel prediktor (X). Adapun variabel tersebut adalah sebagai berikut.

1. Variabel Respon

Variabel respon (Y) dalam penelitian ini, yaitu: jumlah kematian ibu (Y_1) dan jumlah kematian bayi (Y_2). Menurut *World Health Organization* (WHO), kematian ibu dan bayi merupakan dua hal yang saling berkaitan karena selama masa kandungan, gizi yang diperoleh janin disalurkan dari tubuh ibu melalui plasenta sehingga kondisi ibu selama masa kehamilan akan berpengaruh pada janin dan bayi yang akan dilahirkannya. Peran ibu juga sangat berpengaruh dalam merawat bayi mulai saat dilahirkan hingga berumur satu tahun.

2. Variabel Prediktor

Variabel prediktor (X) yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari lima variabel upaya pemerintah yang diambil sebagai faktor-faktor yang dapat mempengaruhi kematian ibu dan bayi. Menurut Dinas Kesehatan Kota Makassar, faktor-faktor tersebut antara lain :

a. Persentase ibu hamil melaksanakan program K4 (X_1)
b. Persentase pelayanan kesehatan ibu nifas (X_2)
c. Persentase penanganan komplikasi kebidanan (X_3)
d. Persentase jumlah peserta KB aktif (X_4)
e. Persentase pelayanan kesehatan bayi (X_5)

3.3 Metode Analisis Data

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menganalis data adalah seperti berikut.

1. Menguji kecocokan distribusi *Poisson* dari masing-masing variabel respon Y_1 dan Y_2 dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* (Ruliana, 2015).

   a. Hipotesis

   H_0 : variabel respon berdistribusi *Poisson*

   H_1 : variabel respon tidak berdistribusi *Poisson*

   b. Statistik Uji

   $$D_{hitung} = maks\ |F_n(Y) - F_0(Y)| \text{ dengan } F_n(Y) = \frac{m}{n} \text{ dan } 1 \leq m \leq n$$

   dengan

   $F_0(Y)$ adalah fungsi distribusi kumulatif yang dihipotesiskan

   $F_n(Y)$ adalah fungsi distribusi kumulatif yang diamati

   m adalah banyaknya pengamatan yang sama atau kurang dari Y

   n adalah banyaknya seluruh pengamatan

   c. Kriteria Pengujian

   H_0 ditolak jika $D_{hitung} > D_{tabel}(\alpha)$ atau $P - value < \alpha$

2. Menguji *overdispersi* dari masing-masing variabel respon Y_1 dan Y_2 dengan uji *Pearson Chi Square* (Kusuma dkk., 2013)

   a. Hipotesis

   $H_0 : \phi = 1$ (variabel respon tidak mengalami *overdispersi*)

   $H_1 : \phi > 1$ (variabel respon mengalami *overdispersi*)

   b. Statistik Uji

   $$\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{db} \text{ dengan } \chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\hat{\sigma}_i}$$

   dengan

   $\hat{\mu}_i$ adalah taksiran rata-rata dari variabel respon ke-i.

   $\hat{\sigma}_i$ adalah taksiran variansi dari variabel respon ke-i.

   $db = n - p - 1$ dengan p adalah jumlah parameter termasuk konstanta dan n merupakan banyaknya seluruh pengamatan.

   Kriteria Pengujian

   H_0 ditolak jika $\hat{\phi} > 1$

3. Menguji korelasi antar variabel respon Y_1 dan Y_2 dengan uji korelasi *Pearson* (Ilmi, 2015).
   a. Hipotesis

   $H_0 : \rho_{y_1 y_2} = 0$ (tidak ada hubungan antara Y_1 dan Y_2)

   $H_1 : \rho_{y_1 y_2} \neq 0$ (terdapat hubungan antara Y_1 dan Y_2)

   b. Statistik Uji

   $$t_{hitung} = \frac{\hat{\rho}_{Y_1Y_2}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}_{Y_1Y_2}{}^2}}$$

   dengan

   $$\hat{\rho}_{Y_1Y_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)(Y_{2i}-\bar{Y}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\bar{Y}_2)^2}}$$

   c. Kriteria Pengujian

   H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| > t_{\left(\frac{\alpha}{2};n-2\right)}$ atau $P-value < \alpha$

4. Melakukan estimasi parameter model regresi BZIP menggunakan metode MLE dengan algoritma EM.
   a. Menentukan fungsi probabilitas variabel respon dari model regresi BZIP sebagai berikut.

   $$f_{BZIP}(y_1,y_2) = \begin{cases} \pi + (1-\pi)e^{-\lambda}, & (y_1,y_2) = (0,0) \\ (1-\pi)e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\lambda_1{}^{y_1-r}\,\lambda_2{}^{y_2-r}\lambda_0{}^{r}}{(y_1-r)!\,(y_2-r)!\,r!}, & (y_1,y_2) \neq (0,0) \end{cases}$$

   b. Melakukan transformasi ke bentuk persamaan $\ln(\lambda_{ik}+\lambda_0) = \boldsymbol{X_i\beta_k}$ dan $\text{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\gamma}$ dengan $i = 1,2,\dots,n;$ $k = 1,2$ sehingga fungsi *likelihood*-nya menjadi sebagai berikut.

   $$L_1(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y) = \prod_{(y_1,y_2)=(0,0)}\left\{\frac{\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\gamma}\right)+\exp\left[\lambda_0-\sum_{k=1}^{2}\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta_k}\right)\right]}{1+\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\gamma}\right)}\right\}$$

   $L_2(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y)$

   $$= \prod_{(y_1,y_2)\neq(0,0)}\left\{\frac{\exp\left[\lambda_0-\sum_{k=1}^{2}\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta_k}\right)\right]}{1+\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\gamma}\right)}\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{\lambda_0{}^{r}}{r!}\prod_{k=1}^{2}\frac{\left[\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta_k}\right)-\lambda_0\right]^{y_{ik}-r}}{(y_{ik}-r)!}\right\}$$

   $$L_T(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y) = L_1(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y)\cdot L_2(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y)$$

c. Membentuk distribusi dari variabel data hilang z, yaitu :

$$z \sim \begin{cases} \text{Bernoulli}(p), & jika\ (y_{i1}\ ; y_{i2})\ berasal\ dari\ zero\ state \\ \text{Degenerate}(0), & jika\ (y_{i1}; y_{i2})\ berasal\ dari\ Poisson\ state \end{cases}$$

dengan $p = \frac{\pi}{\pi+(1-\pi)\exp(-\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2)}$

d. Membentuk distribusi gabungan antara y dan z serta fungsi *likelihood*-nya.

$$f(y,z) = \begin{cases} \pi^z\left\{(1-\pi)e^{-\lambda}\right\}^{1-z}, & (y_1, y_2) = (0{,}0) \\ \left\{(1-\pi)e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\lambda_1{}^{y_1-r}\,\lambda_2{}^{y_2-k}\lambda_0{}^{r}}{(y_1-r)!\,(y_2-r)!\,r!}\right\}^{1-z} & ,(y_1, y_2) \neq (0{,}0) \end{cases}$$

e. Menentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi *likelihood* distribusi gabungan antara y dan z.

f. Melakukan tahap ekpektasi (*E-Step*) dari algoritma EM.

$$z_i{}^{(m)} = E\left[z_i|(y_{i1}; y_{i2}); \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{1}}{}^{(\mathbf{0})}; \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{2}}{}^{(\mathbf{0})}; \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\mathbf{0})}\right]$$

g. Melakukan tahap maksimalisasi (*M-Step*) dari algoritma EM dengan iterasi *Newton-Raphson* sampai parameter konvergen.

5. Mendapatkan model regresi BZIP dari data kematian ibu dan bayi di Kota Makassar tahun 2017 yang mengalami *overdispersi* berdasarkan hasil estimasi parameter yang telah didapatkan.

6. Melakukan uji signifikansi parameter secara serentak dengan uji *rasio likelihood* (Kurniawan, 2017).

a. Hipotesis

$H_0:\ \beta_{11} = \cdots = \beta_{p1} = \beta_{12} = \cdots = \beta_{p2} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0$

$H_1:$ Ada $\beta_{j1} \neq 0$ atau $\beta_{j2} \neq 0$ atau $\gamma_j \neq 0$, dengan $j = 1,2,\dots,p$

b. Statistik Uji

$$G = -2\ln\left[\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right] = 2\left[\ln L(\widehat{\Omega}) - \ln L(\widehat{\omega})\right]$$

dengan

$L(\widehat{\omega})$ adalah nilai *likelihood* tanpa variabel prediktor

$L(\widehat{\Omega})$ adalah nilai *likelihood* dengan variabel prediktor

Kriteria Pengujian

H_0 ditolak jika $G_{hitung} > \chi^2_{\alpha;dk}$

7. Melakukan uji signifikansi parameter secara parsial untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ dengan uji *Wald* (Kurniawan, 2017).
   a. Hipotesis
      $H_0 :\ \beta_{jk} = 0\ ,\ \ j = 1,2 \ldots, p;\ \ k = 1,2$
      $H_1 :\ \text{Ada } \beta_{jk} \neq 0\ ,\ \ j = 1,2 \ldots, p;\ \ k = 1,2$
   b. Statistik Uji
      $$W(\hat{\beta}_{jk}) = \left(\frac{\hat{\beta}_{jk}}{SE(\hat{\beta}_{jk})}\right)^2$$
      dengan $SE(\hat{\beta}_{jk})$ adalah standar error dari $\hat{\beta}_{jk}$.
   c. Kriteria Pengujian
      H_0 ditolak jika $W(\hat{\beta}_{jk}) > \chi^2_{\alpha;dk}$

8. Melakukan uji signifikansi parameter secara parsial untuk parameter $\boldsymbol{\gamma}$ dengan uji *Wald* (Kurniawan, 2017).
   a. Hipotesis
      $H_0 :\ \gamma_j = 0\ ,\ \ j = 1,2 \ldots, p$
      $H_1 :\ \text{Ada } \gamma_j \neq 0\ ,\ \ j = 1,2 \ldots, p$
   b. Statistik Uji
      $$W(\hat{\gamma}_j) = \left(\frac{\hat{\gamma}_j}{SE(\hat{\gamma}_j)}\right)^2$$
      dengan $SE(\hat{\gamma}_j)$ adalah standar error dari $\hat{\gamma}_j$.
   c. Kriteria Pengujian
      H_0 ditolak jika $W(\hat{\gamma}_j) > \chi^2_{\alpha;dk}$

9. Menentukan model terbaik, yaitu antara model *Bivariate Poisson* dan model BZIP dengan menggunakan kriteria AIC.
   $AIC = 2p - 2\ln L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$
   dengan $L(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah nilai fungsi *likelihood* dengan parameter $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ dan p adalah jumlah parameter.

lakukan interpretasi model BZIP yang telah didapatkan.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Uji Asumsi Model Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson

Sebelum melakukan pemodelan regresi *Bivariate Zero-Inflated Poisson* (BZIP), terdapat asumsi yang harus dipenuhi, yaitu masing-masing variabel respon berdistribusi *Poisson*, *overdispersi*, dan saling berkorelasi. Oleh karena itu, perlu dilakukan uji asumsi model regresi BZIP, yaitu uji kecocokan distribusi *Poisson*, uji *overdispersi*, dan uji korelasi.

4.1.1 Uji Kecocokan Distribusi Poisson

Uji kecocokan distribusi bertujuan untuk mengambil kesimpulan tentang distribusi populasi tertentu. Suatu sampel acak dipilih dari populasi, kemudian sampel tersebut digunakan untuk menguji kebenaran distribusi tersebut. Salah satu uji kecocokan distribusi untuk mengetahui data berdistribusi *Poisson* atau tidak, dapat digunakan uji *Kolmogorov-Smirnov*. Hasil uji kecocokan distribusi *Poisson* berdasarkan output SPSS pada Lampiran 3 ditunjukkan pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1 Uji Kecocokan Distribusi Poisson

Variabel Respon	Statistik Uji	$P-value$
Kematian Ibu (Y_1)	0,014	1,000
Kematian Bayi (Y_2)	0,046	1,000

Sumber: Data diolah, 2020

Tabel 4.1 menunjukkan nilai statistik uji $D_{hitung} = 0{,}014 < D_{tabel} = 0{,}200$ untuk variabel respon Y_1 dan dapat juga diliat nilai $p-value$ sebesar 1,000 lebih besar dari nilai $\alpha = 0{,}05$ yang berarti H_0 diterima. Artinya, variabel jumlah kematian ibu mengikuti distribusi *Poisson*. Sedangkan, variabel respon Y_2 memiliki nilai statistik uji $D_{hitung} = 0{,}046 < D_{tabel} = 0{,}200$ dan nilai $p-value$ sebesar [illegible]ih besar dari nilai $\alpha = 0{,}05$ yang berarti H_0 diterima. Artinya, variabel [illegible]ematian bayi mengikuti distribusi *Poisson*. Karena variabel jumlah [illegible] ibu dan bayi mengikuti distribusi *Poisson*, maka dapat dilakukan analisis [illegible]*oisson*.

4.1.2 Uji Overdispersi

Regresi *Poisson* memiliki asumsi khusus yang harus dipenuhi, yaitu asumsi *equidispersi* dengan nilai mean dan variansi dari data bernilai sama. Namun untuk banyak kasus, asumsi tersebut kadang dilanggar karena nilai variansi dari data lebih besar daripada nilai meannya atau disebut *overdispersi*. Uji *overdispersi* dilakukan dengan menggunakan uji *Pearson Chi Square*. Hasil uji *overdispersi* berdasarkan output SPSS pada Lampiran 4 ditunjukkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Uji Overdispersi

Variabel Respon	Statistik Uji
Kematian Ibu (Y_1)	1,383
Kematian Bayi (Y_2)	1,303

Sumber: Data diolah, 2020

Tabel 4.2 menunjukkan bahwa nilai statistik uji $\hat{\phi}_{Y_1} = 1{,}383 > 1$ untuk variabel Y_1 yang artinya variabel jumlah kematian ibu mengalami *overdispersi*. Sedangkan untuk variabel Y_2 memiliki nilai statistik uji $\hat{\phi}_{Y_2} = 1{,}303 > 1$ yang artinya variabel jumlah kematian ibu mengalami *overdispersi*. Berdasarkan Lampiran 1, dapat dilihat juga bahwa data dari kedua variabel respon memiliki banyak pengamatan yang bernilai nol sehingga mengindikasikan bahwa data mengalami *overdispersi*. Karena kedua variabel mengalami *overdispersi* dan berdistribusi *Poisson*, maka dapat dilakukan analisis regresi *Zero-Inflated Poisson.*

4.1.3 Uji Korelasi

Uji korelasi antara variabel respon kematian ibu (Y_1) dan kematian bayi (Y_2) digunakan untuk mengetahui apakah kedua variabel tersebut memiliki hubungan yang linier. Uji korelasi dapat digunakan uji Korelasi *Pearson*. Hasil uji korelasi berdasarkan output SPSS pada Lampiran 5 ditunjukkan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Uji Korelasi Pearson

	Kematian Ibu	Kematian Bayi	$P - value$
tian Ibu	1	$-0{,}292$	0,049
tian Bayi	$-0{,}292$	1	

: Data diolah, 2020

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa nilai koefisien korelasi antar variabel respon Y_1 dan Y_2 adalah sebesar $-0{,}292$. Terlihat bahwa hubungan antara jumlah kematian ibu dan bayi berkorelasi secara negatif, yang berarti jika jumlah kematian ibu mengalami kenaikan, maka jumlah kematian bayi akan mengalami penurunan. Sedangkan berdasarkan nilai $p-value$ sebesar 0,049 lebih kecil dari $\alpha = 0{,}05$ yang berarti H_0 ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat hubungan yang signifikan antara variabel respon jumlah kematian ibu dan bayi. Karena kedua variabel saling berkorelasi, maka dapat digunakan model analisis regresi bivariat.

4.2 Estimasi Parameter Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson

Estimasi parameter regresi BZIP dilakukan dengan metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Metode ini biasanya digunakan untuk menaksir parameter suatu model yang diketahui fungsi probabilitasnya. Distribusi BZIP dibangun dari distribusi *Bivariate Poisson* dan probabilitas titik di (0,0) yang didefinisikan seperti berikut.

$(Y_1, Y_2) \sim Degenerate(0{,}0)$ dengan probabilitas π disebut *zero state*

$\sim BP(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0)$ dengan probabilitas $1-\pi$ disebut *Poisson state*

Sehingga distribusi BZIP memiliki fungsi probabilitas seperti pada Persamaan (4.1)

$$f_{BZIP}(y_1,y_2) = \begin{cases} \pi + (1-\pi)e^{-\lambda}, & (y_1,y_2) = (0,0) \\ (1-\pi)e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\lambda_1^{\,y_1-r}\,\lambda_2^{\,y_2-r}\,\lambda_0^{\,r}}{(y_1-r)!\,(y_2-r)!\,r!}, & (y_1,y_2) \neq (0,0) \end{cases} \tag{4.1}$$

dengan $0 < \pi < 1$ dan $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_0$.

Dari model gabungan untuk λ dan π pada Persamaan (2.15) dan Persamaan (2.16), maka didapatkan nilai λ_{ik} dan π_i sebagai berikut.

$$\ln(\lambda_{ik}^{*}) = \ln(\lambda_{ik} + \lambda_0) = \boldsymbol{X_i\beta_k}, \quad k = 1{,}2$$

$$\lambda_{ik}^{*} = \lambda_{ik} + \lambda_0 = \exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}), \quad k = 1{,}2$$

$$\lambda_{ik} = \exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}) - \lambda_0, \quad k = 1{,}2 \tag{4.2}$$

$$\text{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{X_i\gamma}$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})$$

$$\pi_i = \frac{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} \tag{4.3}$$

Hasil dari Persamaan (4.2) dan Persamaan (4.3) disubtitusi ke Persamaan (4.1) didapatkan Persamaan (4.4) berikut.

$$f_{BZIP}(y_1, y_2|\lambda_0, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} + \dfrac{\exp[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})]}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}, & (y_1, y_2) = (0{,}0) \\ \dfrac{\exp[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})]}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} \displaystyle\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\lambda_0{}^r}{r!} \prod_{k=1}^{2} \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}) - \lambda_0]^{y_k - r}}{(y_k - r)!}, & (y_1, y_2) \neq (0{,}0) \end{cases} \tag{4.4}$$

Jika $n_1 + n_2 = n$ adalah seluruh pengamatan yang diasumsikan saling bebas, maka fungsi *likelihood* diperoleh dari mengalikan semua fungsi probabilitasnya, yaitu:

Untuk $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$

$$L_1(\lambda_0; \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\gamma}|y) = \prod_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma}) + \exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right]}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} \right\} \tag{4.5}$$

dengan n_1 adalah jumlah pengamatan jika $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$.

Untuk $y_1 > 0$ atau $y_2 > 0$

$$L_2(\lambda_0; \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\gamma}|y)$$
$$= \prod_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\exp[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})]}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} \sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\lambda_0{}^r}{r!} \prod_{k=1}^{2} \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}) - \lambda_0]^{y_{ik} - r}}{(y_{ik} - r)!} \right\} \tag{4.6}$$

dengan n_2 adalah jumlah pengamatan jika $y_1 > 0$ atau $y_2 > 0$

Dengan demikian, bentuk fungsi *ln-likelihood* adalah sebagai berikut.

Untuk $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$

$$l_1(\lambda_0; \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\gamma}|y) = \ln L_1(\lambda_0; \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\gamma}|y)$$
$$= \sum_{i=1}^{n_1} \ln\left\{ \exp(\boldsymbol{X_i\gamma}) + \exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] \right\} - \sum_{i=1}^{n_1} \ln\{1 + \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} \tag{4.7}$$

Untuk $y_1 > 0$ atau $y_2 > 0$

$$l_2(\lambda_0; \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\gamma}|y) = \ln L_2(\lambda_0; \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\gamma}|y)$$
$$= \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}) \right\} - \sum_{i=1}^{n_2} \ln\{1 + \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n_2} \ln\left\{ \sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\lambda_0{}^r}{r!} \prod_{k=1}^{2} \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}) - \lambda_0]^{y_{ik} - r}}{(y_{ik} - r)!} \right\} \tag{4.8}$$

Total fungsi *ln-likelihood* didapatkan dari penjumlahan Persamaan (4.7) dan (4.8) :

$$l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y) = l_1(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y) + l_2(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y)$$

$$\begin{aligned} l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y) = &\sum_{i=1}^{n_1} \ln\left\{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma}) + \exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right]\right\} - \sum_{i=1}^{n_1}\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right\} - \sum_{i=1}^{n_2}\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n_2}\ln\left\{\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{{\lambda_0}^r}{r!}\prod_{k=1}^{2}\frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k}) - \lambda_0]^{y_{ik}-r}}{(y_{ik}-r)!}\right\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Persamaan (4.9) tidak diketahui nilai nol yang mana berasal dari *zero state* dan yang mana berasal dari *Poisson state* sehingga menyulitkan perhitungan dan fungsi *ln-likelihood* ini tidak dapat diselesaikan dengan metode numerik biasa. Oleh karena itu, Persamaan (4.9) biasa disebut juga *incomplete data likelihood*. Untuk memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* digunakan algoritma *Expectation Maximation* (EM) yang merupakan salah satu metode optimalisasi yang digunakan dalam memaksimumkan fungsi *ln-likelihood* yang mengandung data hilang.

Misalkan untuk setiap $(y_1; y_2)$ berkaitan dengan variabel indikator z sehingga terdapat dua jenis distribusi yang berbeda yang dapat diberikan, yaitu ketika $(y_1; y_2) = (0,0)$ akan membuat z berdistribusi Bernoulli dengan peluang p dan ketika $(y_1; y_2) \neq (0,0)$ akan membuat z berdistribusi Degenerate di 0.

$$z \sim \begin{cases} Bernoulli(p), & jika\ (y_{1i}\,; y_{2i})\ berasal\ dari\ zero\ state \\ Degenerate(0), & jika\ (y_{1i}; y_{2i})\ berasal\ dari\ Poisson\ state \end{cases}$$

dengan $p = \dfrac{\pi}{\pi + (1-\pi)\exp(-\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2)}$

Jika nilai variabel respon $(y_1; y_2) \neq (0,0)$ maka nilai $z = 0$. Sedangkan jika nilai variabel respon $(y_1; y_2) = (0,0)$ maka nilai z belum bisa ditentukan atau nilai $(y_1; y_2)$ dianggap hilang sebagian. Oleh karena itu, dibentuk distribusi gabungan antara y_1, y_2 dan z adalah sebagai berikut.

$$f(y_1, y_2, z) = f(z)\cdot f(y_1, y_2|z)$$

$$f(y_1, y_2, z) = \begin{cases} \pi^z\{(1-\pi)e^{-\lambda}\}^{1-z}\,, & (y_1, y_2) = (0,0) \\ \left\{(1-\pi)e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_1}^{y_1-r}\,{\lambda_2}^{y_2-r}{\lambda_0}^r}{(y_1-r)!\,(y_2-r)!\,r!}\right\}^{1-z}, & (y_1, y_2) = (0,0) \end{cases} \tag{4.10}$$

Subtitusi kembali Persamaan (4.2) dan Persamaan (4.3) ke Persamaan (4.10) sehingga diperoleh sebagai berikut.

Untuk $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$

$$f(y;z|\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}) = \left\{\frac{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}\right\}^{z_i}\left\{\frac{\exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right]}{1+\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\gamma}\right)}\right\}^{1-z_i}$$

$$f(y;z|\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\}^{z_i}}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}\left\{\exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right]\right\}^{1-z_i} \quad (4.11)$$

Untuk $y_1 > 0$ atau $y_2 > 0$

$$f(y;z|\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma})$$

$$= \left\{\frac{\exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right]}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{\lambda_0{}^r}{r!}\prod_{k=1}^{2}\frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})-\lambda_0]^{y_{ik}-r}}{(y_{ik}-r)!}\right\}^{1-z_i} \quad (4.12)$$

Sedangkan bentuk fungsi *likelihood*-nya adalah sebagai berikut.

Untuk $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$

$$L_1(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z) = \prod_{i=1}^{n_1}\frac{\{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\}^{z_i}}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}\left\{\exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right]\right\}^{1-z_i} \quad (4.13)$$

Untuk $y_1 > 0$ atau $y_2 > 0$

$$L_2(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z)$$

$$= \prod_{i=1}^{n_2}\left\{\frac{\exp\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right]}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{\lambda_0{}^r}{r!}\prod_{k=1}^{2}\frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})-\lambda_0]^{y_{ik}-r}}{(y_{ik}-r)!}\right\}^{1-z_i} \quad (4.14)$$

Dengan demikian, bentuk fungsi *ln-likelihood* adalah sebagai berikut.

Untuk $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$

$$l_1(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z) = \ln L_1(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} z_i(\boldsymbol{X_i\gamma}) + \sum_{i=1}^{n_1}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] - \sum_{i=1}^{n_1}\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} \quad (4.15)$$

Untuk $y_1 > 0$ atau $y_2 > 0$

$$l_2(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z) = \ln L_2(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] - \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\ln\left\{\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{\lambda_0{}^r}{r!}\prod_{k=1}^{2}\frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})-\lambda_0]^{y_{ik}-r}}{(y_{ik}-r)!}\right\} \quad (4.16)$$

Total fungsi *ln-likelihood* didapatkan dari penjumlahan Persamaan (4.15) dan (4.16):

$$l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z) = l_1(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z) + l_2(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z)$$

$$\begin{aligned} l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z) = {} & \sum_{i=1}^{n_1} z_i(\boldsymbol{X_i\gamma}) + \sum_{i=1}^{n_1}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] - \sum_{i=1}^{n_1}\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] - \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\ln\left\{\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_0}^r}{r!}\prod_{k=1}^{2}\frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})-\lambda_0]^{y_{ik}-r}}{(y_{ik}-r)!}\right\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Persamaan (4.17) disebut *complete data likelihood*. Persamaan ini yang akan dimaksimumkan menggunakan algoritma EM dengan parameter λ_0, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2})$, dan $\boldsymbol{\gamma}$ yang dapat diestimasi secara terpisah sehingga dapat ditulis sebagai berikut.

$$l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}|y;z) = l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z) + l(\boldsymbol{\gamma}|y;z)$$

dengan

$$\begin{aligned} l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta};|y;z) = {} & \sum_{i=1}^{n_1}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] + \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\ln\left\{\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_0}^r}{r!}\prod_{k=1}^{2}\frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})-\lambda_0]^{y_{ik}-r}}{(y_{ik}-r)!}\right\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$l(\boldsymbol{\gamma}|y;z) = \sum_{i=1}^{n_1} z_i(\boldsymbol{X_i\gamma}) - \sum_{i=1}^{n_1}\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} - \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\} \tag{4.19}$$

Untuk mendapatkan nilai maksimum fungsi *likelihood*, dilakukan turunan fungsi *ln-likelihood* terhadap masing-masing $\lambda_0, \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}$ dan $\boldsymbol{\gamma}$ seperti berikut.

$$\begin{aligned} l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z) = {} & \sum_{i=1}^{n_1}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] + \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\left[\lambda_0 - \sum_{k=1}^{2}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})\right] \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\ln A_i \end{aligned}$$

dengan

$$\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_0}^r}{r!}A_{1i}A_{2i}$$

$$\frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})-\lambda_0]^{y_{i1}-r}}{(y_{i1}-r)!} \quad \text{dan} \quad A_{i2} = \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})-\lambda_0]^{y_{2i}-r}}{(y_{i2}-r)!}$$

Turunan pertama dari fungsi *ln-likelihood* terhadap λ_0 :

$$\frac{\partial l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial \lambda_0}=\sum_{i=1}^{n_1}(1-z_i)+\sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)+\sum_{i=1}^{n_2}\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0} \tag{4.20}$$

dengan

$$\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0}=\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\left\{\frac{r{\lambda_0}^{r-1}}{r!}A_{i1}A_{i2}+\frac{{\lambda_0}^{r}}{r!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial \lambda_0}A_{i2}+\frac{{\lambda_0}^{r}}{r!}A_{i1}\frac{\partial A_{i2}}{\partial \lambda_0}\right\}$$

$$\frac{\partial A_{i1}}{\partial \lambda_0}=-\frac{(y_{i1}-r)[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})-\lambda_0]^{y_{i1}-r-1}}{(y_{i1}-r)!}$$

$$\frac{\partial A_{i2}}{\partial \lambda_0}=-\frac{(y_{i2}-r)[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})-\lambda_0]^{y_{i2}-r-1}}{(y_{i2}-r)!}$$

Turunan pertama dari fungsi *ln-likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta_k}$:

$$\frac{\partial l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial \boldsymbol{\beta_k}}=\sum_{i=1}^{n_1}(z_i-1)\,[\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})]+\sum_{i=1}^{n_2}(z_i-1)\,[\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})]$$
$$+\sum_{i=1}^{n_2}\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta_k}} \tag{4.21}$$

Turunan pertama A_i terhadap $\boldsymbol{\beta_1}$:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta_1}}=\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_0}^{r}}{r!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta_1}}A_{i2}$$

$$\frac{\partial A_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta_1}}=\frac{(y_{i1}-r)[\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})-\lambda_0]^{y_{i1}-r-1}}{(y_{i1}-r)!}$$

Turunan pertama A_i terhadap $\boldsymbol{\beta_2}$:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta_2}}=\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_0}^{r}}{r!}A_{i1}\frac{\partial A_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta_2}}$$

$$\frac{\partial A_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta_2}}=\frac{(y_{i2}-r)[\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})-\lambda_0]^{y_{i2}-r-1}}{(y_{i2}-r)!}$$

Turunan pertama dari fungsi *ln-likelihood* terhadap $\boldsymbol{\gamma}$:

$$l(\boldsymbol{\gamma}|y;z)=\sum_{i=1}^{n_1}z_i(\boldsymbol{X_i\gamma})-\sum_{i=1}^{n_1}\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\}+\sum_{i=1}^{n_2}(z_i-1)\ln\{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\}$$

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\gamma}|y;z)}{\partial \boldsymbol{\gamma}}=\sum_{i=1}^{n_1}z_i\cdot\boldsymbol{X_i}-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}+\sum_{i=1}^{n_2}(z_i-1)\left[\frac{\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}\right] \tag{4.22}$$

Selanjutnya, turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* adalah sebagai berikut.

Turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap ${\lambda_0}^2$:

$$\frac{\partial^2 l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial {\lambda_0}^2} = \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial {\lambda_0}^2}\right] - \left[\frac{(1-z_i)}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0}\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0}\right]\right\} \tag{4.23}$$

dengan

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial {\lambda_0}^2} = \sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\left\{\frac{r(r-1){\lambda_0}^{r-2}}{r!}A_{i1}A_{i2} + 2\frac{r{\lambda_0}^{r-1}}{r!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial \lambda_0}A_{i2} + 2\frac{r{\lambda_0}^{r-1}}{r!}A_{i1}\frac{\partial A_{i2}}{\partial \lambda_0} + 2\frac{{\lambda_0}^r}{r!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial \lambda_0}\frac{\partial A_{i2}}{\partial \lambda_0} + \frac{{\lambda_0}^r}{r!}\frac{\partial^2 A_{i1}}{\partial {\lambda_0}^2}A_{i2} + \frac{{\lambda_0}^r}{r!}A_{i2}\frac{\partial^2 A_{i2}}{\partial {\lambda_0}^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 A_{i1}}{\partial {\lambda_0}^2} = \frac{(y_{i1}-r)(y_{i1}-r-1)[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})-\lambda_0]^{y_{i1}-r-2}}{(y_{i1}-r)!}$$

$$\frac{\partial^2 A_{i2}}{\partial {\lambda_0}^2} = \frac{(y_{i2}-r)(y_{i2}-r-1)[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})-\lambda_0]^{y_{i2}-r-2}}{(y_{i2}-r)!}$$

Turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap λ_0 dan $\boldsymbol{\beta_1}$ **:**

$$\frac{\partial^2 l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_1}} = \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_1}}\right] - \left[\frac{(1-z_i)}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0}\frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta_1}}\right]\right\} \tag{4.24}$$

dengan

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_1}} = \sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\left\{\frac{r{\lambda_0}^{r-1}}{r!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta_1}}A_{i2} + \frac{{\lambda_0}^r}{r!}\frac{\partial^2 A_{i1}}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_1}}A_{i2} + \frac{{\lambda_0}^r}{r!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial \boldsymbol{\beta_1}}\frac{\partial A_{i2}}{\partial \lambda_0}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 A_{i1}}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_1}} = -\frac{(y_{i1}-r)(y_{i1}-r-1)[\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})-\lambda_0]^{y_{i1}-r-2}}{(y_{i1}-r)!}$$

Turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap λ_0 dan $\boldsymbol{\beta_2}$:

$$\frac{\partial^2 l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_2}} = \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_2}}\right] - \left[\frac{(1-z_i)}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_0}\frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\beta_2}}\right]\right\} \tag{4.25}$$

dengan

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_2}} = \sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\left\{\frac{r{\lambda_0}^{r-1}}{r!}A_{i1}\frac{\partial A_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta_2}} + \frac{{\lambda_0}^r}{r!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial \lambda_0}\frac{\partial A_{i2}}{\partial \boldsymbol{\beta_2}} + \frac{{\lambda_0}^r}{r!}A_{i1}\frac{\partial^2 A_{i2}}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_2}}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 A_{i2}}{\partial \lambda_0\,\partial \boldsymbol{\beta_2}} = -\frac{(y_{i1}-r)(y_{i1}-r-1)[\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})-\lambda_0]^{y_{i1}-r-2}}{(y_{i1}-r)!}$$

Turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta_1}$:

$$\frac{\partial^2 l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_1}^{\boldsymbol{T}}}=\sum_{i=1}^{n_1}(z_i-1)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})]+\sum_{i=1}^{n_2}(z_i-1)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})]$$
$$+\sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_1}^{\boldsymbol{T}}}\right]-\left[\frac{(1-z_i)}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}^{\boldsymbol{T}}}\right]\right\} \tag{4.26}$$

dengan

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_1}^{\boldsymbol{T}}}=\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_0}^r}{r!}\frac{\partial^2 A_{i1}}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_1}^{\boldsymbol{T}}}A_{i2}$$

$$\frac{\partial^2 A_{i1}}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_1}^{\boldsymbol{T}}}=\frac{(y_{i1}-r)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})-\lambda_0]^{y_{i1}-r-1}}{(y_{i1}-r)!}$$
$$+\frac{(y_{i1}-r)(y_{i1}-r-1)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})]^2[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})-\lambda_0]^{y_{i1}-r-2}}{(y_{i1}-r)!}$$

Turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta_2}$:

$$\frac{\partial^2 l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\beta_2}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}=\sum_{i=1}^{n_1}(z_i-1)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})]+\sum_{i=1}^{n_2}(z_i-1)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})]$$
$$+\sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}\right]-\left[\frac{(1-z_i)}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}\right]\right\} \tag{4.27}$$

dengan

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}=\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\frac{{\lambda_0}^r}{r!}A_{i1}\frac{\partial^2 A_{i2}}{\partial\boldsymbol{\beta_2}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}$$

$$\frac{\partial^2 A_{i2}}{\partial\boldsymbol{\beta_2}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}=\frac{(y_{i2}-r)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})-\lambda_0]^{y_{i2}-r-1}}{(y_{i2}-r)!}$$
$$+\frac{(y_{i2}-r)(y_{i2}-r-1)\left[\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})]^2[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})-\lambda_0]^{y_{i2}-r-2}}{(y_{i2}-r)!}$$

Turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap $\boldsymbol{\beta_1}$ dan $\boldsymbol{\beta_2}$:

$$\frac{\partial^2 l(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}=-\sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{(1-z_i)}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}}\right]-\left[\frac{(1-z_i)}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}}\right]\right\} \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}^{\boldsymbol{T}}}=\sum_{k=0}^{\min\{y_1,y_2\}}\left\{\frac{{\lambda_0}^k}{k!}\frac{\partial A_{i1}}{\partial\boldsymbol{\beta_1}}\frac{\partial A_{i2}}{\partial\boldsymbol{\beta_2}}\right\}$$

Turunan kedua dari fungsi *ln-likelihood* terhadap $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\gamma}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\gamma}\,\partial\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{T}}} = \sum_{i=1}^{n_1}\left\{\frac{[\boldsymbol{X_i}\,\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}][\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]^2}{[1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]^2} - \frac{[\boldsymbol{X_i}\,\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}][\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]}{[1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]}\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{n_2}(1-z_i)\left\{\frac{[\boldsymbol{X_i}\,\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}][\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]^2}{[1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]^2} - \frac{[\boldsymbol{X_i}\,\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}][\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]}{[1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]}\right\} \qquad (4.29)$$

Selanjutnya, melakukan algoritma EM yang terdiri dari dua tahap, yaitu tahap ekspektasi (*E-Step)* dan tahap maksimalisasi (*M-Step*) sebagai berikut.

Tahap Ekspektasi (*E-Step*)

Mengganti variabel z_i dengan $z_i^{(m)}$ dengan $m = 0,1,2,\ldots$ yang merupakan ekspektasi dari z_i seperti berikut.

$$z_i^{(m)} = E\left[z_i|(y_{1i};y_{2i});\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{0})},\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{0})}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{0})}\right]$$

$$z_i^{(m)} = P\left(z_i\middle|(y_{1i};y_{2i});\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{0})},\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{0})}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{0})}\right)$$

Untuk $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$

$$z_i^{(m)} = \frac{\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\gamma}\right)}{\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\gamma}\right)+\exp\left\{\lambda_0-\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta_1}\right)-\exp\left(\boldsymbol{X_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta_2}\right)\right\}}$$

Untuk $y_1 > 0$ atau $y_2 > 0$

$$z_i^{(m)} = 0$$

Oleh karena itu, turunan dari fungsi *ln-likelihood* $l\left(\lambda_0;\boldsymbol{\beta_j};\boldsymbol{\gamma}|y_{ji};z_i\right)$ menjadi :

$$\frac{\partial l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\lambda_0} = \sum_{i=1}^{n_1}[1-E(z_i)] + n_2 + \sum_{i=1}^{n_2}\frac{1}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial\lambda_0}$$

$$\frac{\partial l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\beta_j}} = \sum_{i=1}^{n_1}[E(z_i)-1]\left[\boldsymbol{X_i}\exp\left(\boldsymbol{X_i\beta_j}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n_2}\boldsymbol{X_i}\exp\left(\boldsymbol{X_i\beta_j}\right) + \sum_{i=1}^{n_2}\frac{1}{A_i}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_j}}$$

$$\frac{\partial l^*(\boldsymbol{\gamma}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{i=1}^{n_1}E(z_i)\cdot\boldsymbol{X_i} - \sum_{i=1}^{n_1+n_2}\frac{\boldsymbol{X_i}\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}$$

$$\frac{\partial^2 l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial{\lambda_0}^2} = \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial{\lambda_0}^2}\right] - \left[\frac{1}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\lambda_0}\frac{\partial A_i}{\partial\lambda_0}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\lambda_0\,\partial\boldsymbol{\beta_1}} = \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\lambda_0\,\partial\boldsymbol{\beta_1}}\right] - \left[\frac{1}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\lambda_0}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\lambda_0\,\partial\boldsymbol{\beta_2}} = \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\lambda_0\,\partial\boldsymbol{\beta_2}}\right] - \left[\frac{1}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\lambda_0}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial{\boldsymbol{\beta_1}}^{\boldsymbol{T}}} = \sum_{i=1}^{n_1}[E(z_i)-1]\left[\boldsymbol{X_i}\,{\boldsymbol{X_i}}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})] - \sum_{i=1}^{n_2}\left[\boldsymbol{X_i}\,{\boldsymbol{X_i}}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})]$$
$$+\sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial{\boldsymbol{\beta_1}}^{\boldsymbol{T}}}\right] - \left[\frac{1}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}}\frac{\partial A_i}{\partial{\boldsymbol{\beta_1}}^{\boldsymbol{T}}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\beta_2}\,\partial{\boldsymbol{\beta_2}}^{\boldsymbol{T}}} = \sum_{i=1}^{n_1}[E(z_i)-1]\left[\boldsymbol{X_i}\,{\boldsymbol{X_i}}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})] - \sum_{i=1}^{n_2}\left[\boldsymbol{X_i}\,{\boldsymbol{X_i}}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})]$$
$$+\sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}\,\partial{\boldsymbol{\beta_2}}^{\boldsymbol{T}}}\right] - \left[\frac{1}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}}\frac{\partial A_i}{\partial{\boldsymbol{\beta_2}}^{\boldsymbol{T}}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}} = \sum_{i=1}^{n_2}\left\{\left[\frac{1}{{A_i}^2}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}}\frac{\partial A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_2}}\right] - \left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial^2 A_i}{\partial\boldsymbol{\beta_1}\,\partial\boldsymbol{\beta_2}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\gamma}|y;z)}{\partial\boldsymbol{\gamma}\,\partial\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{T}}} = \sum_{i=1}^{n_1+n_2}\left\{\frac{\left[\boldsymbol{X_i}\,{\boldsymbol{X_i}}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]^2}{[1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]^2} - \frac{\left[\boldsymbol{X_i}\,{\boldsymbol{X_i}}^{\boldsymbol{T}}\right][\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]}{[1+\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})]}\right\}$$

Tahap Maksimalisasi (*M-Step*)

Untuk mencari taksiran maksimum *likelihood* dari masing-masing parameter digunakan metode *Newton-Raphson* dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{0})}$ dengan $\boldsymbol{\theta} = \left(\lambda_0 \quad {\boldsymbol{\beta_1}}^{\boldsymbol{T}} \quad {\boldsymbol{\beta_2}}^{\boldsymbol{T}}\right)^T$ dan taksiran awal parameter $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\mathbf{0})}$. Nilai taksiran awal $\hat{\lambda}_0^{(0)}$ dapat digunakan $cov(Y_1,Y_2) = \lambda_0$. Nilai taksiran awal $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{j}}^{(\mathbf{0})}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\mathbf{0})}$ diperoleh dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS), yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{j}}^{(\mathbf{0})} = [\boldsymbol{X^TX}]^{-\mathbf{1}}[\boldsymbol{X^TY_j}]$ dengan $j = 1,2$ dan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\mathbf{0})} = [\boldsymbol{X^TX}]^{-\mathbf{1}}[\boldsymbol{X^T\phi}]$ dengan $\phi_i = \frac{\pi_i}{1-\pi_i}$ dan $i = 1,2,\dots n$.

2. Membentuk vektor gradien $\boldsymbol{g}$ yang merupakan vektor turunan pertama dari $l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z) = l^*(\boldsymbol{\theta})$ dan $l^*(\boldsymbol{\gamma}|y;z)$ sebagai berikut.

$$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\theta}^{(\boldsymbol{m})}\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda_0}\\ \dfrac{\partial l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta_1}}\\ \dfrac{\partial l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta_2}}\end{bmatrix}^{(m)} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\gamma}^{(\boldsymbol{m})}\right) = \left[\frac{\partial l^*(\boldsymbol{\gamma})}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\right]^{(m)}$$

3. Membentuk matriks Hessian **H**, yaitu matriks turunan kedua dari fungsi $l^*(\lambda_0;\boldsymbol{\beta}|y;z) = l^*(\boldsymbol{\theta})$ dan $l^*(\boldsymbol{\gamma}|y;z) = \partial^2 l^*(\boldsymbol{\gamma})$.

$$\boldsymbol{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial {\lambda_0}^2} & \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_0\, \partial {\boldsymbol{\beta}_1}^{\boldsymbol{T}}} & \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_0\, \partial {\boldsymbol{\beta}_2}^{\boldsymbol{T}}} \\ \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_0\, \partial \boldsymbol{\beta}_1} & \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1\, \partial {\boldsymbol{\beta}_1}^{\boldsymbol{T}}} & \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1\, \partial \boldsymbol{\beta}_2} \\ \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_0\, \partial \boldsymbol{\beta}_2} & \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1\, \partial \boldsymbol{\beta}_2} & \dfrac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2\, \partial {\boldsymbol{\beta}_2}^{\boldsymbol{T}}} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(r)}\right) = \left[\frac{\partial^2 l^*(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}\, \partial \boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{T}}}\right]$$

4. Melakukan iterasi mulai dari $m = 0$ dengan memasukkan $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\mathbf{0})}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\mathbf{0})}$ ke masing-masing vektor gradien $\boldsymbol{g}$ dan matriks Hessian $\boldsymbol{H}$. Kemudian melakukan iterasi dengan menggunakan persamaan berikut.

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{m})} - \left[\boldsymbol{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{m})}\right)\right]^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{g}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{m})}\right)$$

dan

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})} = \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{m})} - \left[\boldsymbol{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{m})}\right)\right]^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{g}\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{m})}\right)$$

5. Melakukan tahap ke-2, tahap ke-3, dan tahap ke-4 secara berulang-ulang. Iterasi akan berhenti apabila parameter telah konvergen, yaitu ketika $\left\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{m})}\right\| \leq 10^{-3}$ dan $\left\|\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})} - \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{m})}\right\| \leq 10^{-3}$. Kemudian, mengambil $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})}$ sebagai taksiran dari $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})}$ sebagai taksiran dari $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$.

4.3 Pemodelan Regresi Bivariate Zero-Inflated Poisson pada Data Kematian Ibu dan Kematian Bayi di Kota Makassar Tahun 2017

Pemodelan data jumlah kematian ibu dan bayi di Kota Makassar dilakukan menggunakan model regresi BZIP dengan nilai kovariansi antar variabel responnya adalah suatu konstanta. Berdasarkan output sintaks MATLAB pada Lampiran 6, diperoleh hasil estimasi parameter seperti pada Tabel 4.4 dan Tabel 4.5 berikut.

Tabel 4.4 Estimasi Parameter λ_0

Parameter	**Estimasi**
λ_0	- 0,404

Sumber: Data diolah, 2020

Tabel 4.5 Estimasi Parameter $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}$, dan $\boldsymbol{\gamma}$

Kematian Ibu (Y1)		**Kematian Bayi (Y2)**		**Kematian Ibu dan Bayi**	
Parameter	**Estimasi**	**Parameter**	**Estimasi**	**Parameter**	**Estimasi**
β_{01}	2,067	β_{02}	2,863	γ_0	-21,818
β_{11}	0,202	β_{12}	-0,055	γ_1	0,183
β_{21}	-0,240	β_{22}	0,059	γ_2	0,020
β_{31}	0,144	β_{32}	-0,098	γ_3	-0,081
β_{41}	-0,140	β_{42}	0,044	γ_4	-0,063
β_{51}	-0,048	β_{52}	0,035	γ_5	0,141

Sumber: Data diolah, 2020

Model regresi BZIP dibentuk dari hasil estimasi parameter pada Tabel 4.4 dan Tabel 4.5 sehingga diperoleh model berikut.

$$\hat{\lambda}_0 = -0{,}404$$

$$\ln\left(\hat{\lambda}_{i,1}{}^{*}\right) = 2{,}067 + 0{,}202x_{i1} - 0{,}240x_{i2} + 0{,}144x_{i3} - 0{,}140x_{i4} - 0{,}048x_{i5}$$

$$\ln\left(\hat{\lambda}_{i,2}{}^{*}\right) = 2{,}863 - 0{,}055x_{i1} + 0{,}059x_{i2} - 0{,}098x_{i3} + 0{,}044x_{i4} + 0{,}035x_{5i}$$

$$\text{logit}(\hat{\pi}_i) = -21{,}818 + 0{,}183x_{i1} + 0{,}020x_{i2} - 0{,}081x_{i3} - 0{,}063x_{i4} + 0{,}141x_{i5}$$

dengan $\hat{\lambda}_{i,k}{}^{*} = \hat{\lambda}_{i,k} + \hat{\lambda}_0$, $k = 1{,}2$.

Dari model di atas, dilakukan uji serentak untuk mengetahui apa seluruh variabel prediktor berpengaruh terhadap variabel respon dan uji parsial parameter untuk mengetahui variabel prediktor apa saja yang berpengaruh terhadap variabel respon.

4.3.1 Uji Serentak Parameter Model

Untuk menentukan nilai statistik uji serentak parameter model, terlebih dahulu ditentukan dua fungsi *likelihood* yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi *likelihood* yang dimaksud adalah $L(\hat{\Omega})$ yaitu nilai maksimum fungsi *likelihood* untuk model yang lebih lengkap dengan melibatkan variabel prediktor dan $L(\hat{\omega})$ yaitu nilai maksimum fungsi *likelihood* untuk model tanpa melibatkan variabel prediktor. Uji serentak dilakukan dengan menggunakan *likelihood*. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$= \cdots = \beta_{51} = \beta_{12} = \cdots = \beta_{52} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_5 = 0$$

a $\beta_{j1} \neq 0$ atau $\beta_{j2} \neq 0$ atau $\gamma_j \neq 0$ dengan $j = 1,2,\ldots,5$

Himpunan parameter di bawah H_0 adalah $\omega = \{\beta_{01}, \beta_{02}, \gamma_0\}$, dengan fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_1, y_2; \beta_{01}, \beta_{02}, \gamma_0)$$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\{\exp(\boldsymbol{\gamma_0})\}^{z_i} \{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\boldsymbol{\beta_{0k}})]\}^{1-z_i}}{1 + \exp(\boldsymbol{\gamma_0})} \right\} \prod_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\boldsymbol{\beta_{0k}})]}{1 + \exp(\boldsymbol{\gamma_0})} A_i^* \right\}^{1-z_i}$$

dengan

$$A_i^* = \sum_{r=0}^{\min\{y_1, y_2\}} \left\{ \frac{[\exp(\boldsymbol{\beta_{01}})]^{y_{i1}-r}}{(y_{i1}-r)!} \frac{[\exp(\boldsymbol{\beta_{02}})]^{y_{i2}-r}}{(y_{i2}-r)!} \right\}$$

$$L(\widehat{\omega}) = \max L(\omega)$$

$$L(\widehat{\omega}) = \prod_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\{\exp(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{0}})\}^{z_i} \{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{0k}})]\}^{1-z_i}}{1 + \exp(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{0}})} \right\} \prod_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{0k}})]}{1 + \exp(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{0}})} A_i^* \right\}^{1-z_i}$$

dengan

$$A_i^* = \sum_{r=0}^{\min\{y_1, y_2\}} \left\{ \frac{[\exp(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{01}})]^{y_{i1}-r}}{(y_{i1}-r)!} \frac{[\exp(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{02}})]^{y_{i2}-r}}{(y_{i2}-r)!} \right\}$$

Himpunan parameter di bawah populasi adalah $\Omega = \{\beta_{11}, \dots, \beta_{51}, \beta_{12}, \dots, \beta_{52}, \gamma_1, \dots, \gamma_5\}$ sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_1, y_2; \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\gamma})$$

$$= \prod_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})\}^{z_i} \{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})]\}^{1-z_i}}{1 + \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} \right\} \prod_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\boldsymbol{X_i\beta_k})]}{1 + \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})} A_i^* \right\}^{1-z_i}$$

dengan

$$A_i^* = \sum_{r=0}^{\min\{y_1, y_2\}} \left\{ \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_1})]^{y_{i1}-r}}{(y_{i1}-r)!} \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i\beta_2})]^{y_{i2}-r}}{(y_{i2}-r)!} \right\}$$

$$L(\widehat{\Omega}) = \max L(\omega)$$

$$= \prod_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\{\exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})\}^{z_i} \{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}})]\}^{1-z_i}}{1 + \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})} \right\} \prod_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\exp[-\sum_{k=1}^{2} \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}})]}{1 + \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})} A_i^* \right\}^{1-z_i}$$

$$= \sum_{r=0}^{\min\{y_1, y_2\}} \left\{ \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{1}})]^{y_{1i}-r}}{(y_{i1}-r)!} \frac{[\exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{2}})]^{y_{2i}-r}}{(y_{i2}-r)!} \right\}$$

Statistik uji:

$$G = -2\ln\left[\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right] = 2\left[\ln L(\widehat{\Omega}) - \ln L(\widehat{\omega})\right]$$

dengan

$$\begin{aligned}\ln L(\widehat{\omega}) = {} & \sum_{i=1}^{n_1} z_i \cdot \hat{\gamma}_0 + \sum_{i=1}^{n_1}(z_i - 1)\left[\exp(\hat{\beta}_{01}) + \exp(\hat{\beta}_{02})\right] - \sum_{i=1}^{n_1}\ln\{1 + \exp(\hat{\gamma}_0)\} \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(z_i - 1)\left[\exp(\hat{\beta}_{01}) + \exp(\hat{\beta}_{02})\right] + \sum_{i=1}^{n_2}(z_i - 1)\ln\{1 + \exp(\hat{\gamma}_0)\} \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(1 - z_i)\ln\left\{\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\left[\exp(\hat{\beta}_{01})\right]^{y_{i1}-r}}{(y_{i1} - r)!}\frac{\left[\exp(\hat{\beta}_{02})\right]^{y_{i2}-r}}{(y_{i2} - r)!}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln L(\widehat{\Omega}) = {} & \sum_{i=1}^{n_1} z_i(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}) + \sum_{i=1}^{n_1}(z_i - 1)\left[\exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}}) + \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{2}})\right] - \sum_{i=1}^{n_1}\ln\{1 + \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})\} \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(z_i - 1)\left[\exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}}) + \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{2}})\right] + \sum_{i=1}^{n_2}(z_i - 1)\ln\{1 + \exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})\} \\ & + \sum_{i=1}^{n_2}(1 - z_i)\ln\left\{\sum_{r=0}^{\min\{y_1,y_2\}} \frac{\left[\exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}})\right]^{y_{i1}-r}}{(y_{i1} - r)!}\frac{\left[\exp(\boldsymbol{X_i}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{2}})\right]^{y_{i2}-r}}{(y_{2i} - r)!}\right\}\end{aligned}$$

Hasil pemodelan regresi BZIP dengan λ_0 adalah suatu konstanta didapatkan nilai statistik uji G sebesar 1823,432 berdasarkan output sintaks MATLAB pada Lampiran 7. Dengan tingkat signifikan $\alpha = 0{,}1$ diperoleh $\chi^2_{(0{,}1;15)} = 22{,}307 < 1823{,}432$ maka H_0 ditolak yang artinya paling sedikit ada satu variabel prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon jumlah kematian ibu dan bayi. Oleh karena itu, diperlukan pengujian parsial untuk mengetahui variabel apa yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

4.3.2 Uji Parsial Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Pengujian parsial parameter β dapat dilakukan dengan menggunakan uji Wald. Pengujian parsial parameter model $\ln({\lambda_{ik}}^*) = \ln(\lambda_{ik} + \lambda_0) = \boldsymbol{X_i\beta_k}$

$= 1{,}2$ menggunakan hipotesis sebagai berikut.

$= 0, \;\; j = 1{,}2 \ldots{,}5; \;\;\; k = 1{,}2$;

a $\beta_{jk} \neq 0$, $\; j = 1{,}2 \ldots{,}5; \;\;\; k = 1{,}2$

Hasil dari uji parsial parameter $\boldsymbol{\beta_1}$ dan $\boldsymbol{\beta_2}$ untuk jumlah kematian ibu dan bayi di Kota Makassar berdasarkan hasil output sintaks MATLAB pada Lampiran 8 seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.6 berikut.

Tabel 4.6 Uji Parsial Parameter $\boldsymbol{\beta_1}$ dan $\boldsymbol{\beta_2}$

Parameter $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{jk})$	**Kematian Ibu** (Y_1)			**Kematian Bayi** (Y_2)		
	$\boldsymbol{SE(\hat{\beta}_{j1})}$	$\boldsymbol{W(\hat{\beta}_{j1})}$	**Keterangan**	$\boldsymbol{SE(\hat{\beta}_{j2})}$	$\boldsymbol{W(\hat{\beta}_{j2})}$	**Keterangan**
$\hat{\beta}_{1k}$	0,136	2,207	Tidak Signifikan	0,037	2,157	Tidak Signifikan
$\hat{\beta}_{2k}$	0,121	3,910	Signifikan	0,040	2,172	Tidak Signifikan
$\hat{\beta}_{3k}$	0,223	0,418	Tidak Signifikan	0,053	3,413	Signifikan
$\hat{\beta}_{4k}$	0,075	3,501	Signifikan	0,029	2,238	Tidak Signifikan
$\hat{\beta}_{5k}$	0,197	0,059	Tidak Signifikan	0,048	0,523	Tidak Signifikan

Sumber: Data diolah, 2020

Tabel 4.6 menunjukkan bahwa dengan tingkat signifikan sebesar $\alpha = 0{,}1$ dan nilai $\chi^2_{(0,1;1)} = 2{,}706$ maka pada model persamaan kematian ibu terdapat dua variabel yang signifikan dan kematian bayi terdapat satu variabel yang signifikan. Variabel yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kematian ibu adalah persentase pelayanan kesehatan ibu nifas (X_2) dan persentase jumlah peserta KB aktif (X_4). Variabel yang signifikan terhadap jumlah kematian bayi adalah persentase penanganan komplikasi kebidanan (X_3).

4.3.3 Uji Parsial Parameter γ

Pengujian parsial parameter $\boldsymbol{\gamma}$ dapat dilakukan dengan menggunakan uji Wald. Pengujian parsial parameter model $\text{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \boldsymbol{X_i\gamma}$ dengan

akan hipotesis sebagai berikut.

$= 0, \quad j = 1,2,\dots,5$

a $\gamma_j \neq 0\,, \quad j = 1,2 \dots,5$

Hasil dari uji parsial parameter $\boldsymbol{\gamma}$ untuk jumlah kematian ibu dan bayi di Kota Makassar berdasarkan hasil output sintaks MATLAB pada Lampiran 8 seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.7 berikut.

Tabel 4.7 Uji Parsial Parameter $\boldsymbol{\gamma}$

Parameter ($\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j$)	$\boldsymbol{SE(\hat{\gamma}_j)}$	$\boldsymbol{W(\hat{\gamma}_j)}$	**Keterangan**
$\hat{\gamma}_1$	0,105	3,053	Signifikan
$\hat{\gamma}_2$	0,086	0,052	Tidak Signifikan
$\hat{\gamma}_3$	0,190	0,180	Tidak Signifikan
$\hat{\gamma}_4$	0,040	2,467	Tidak Signifikan
$\hat{\gamma}_5$	0,152	0,862	Tidak Signifikan

Sumber: Data diolah, 2020

Tabel 4.7 menunjukkan bahwa dengan tingkat signifikan sebesar $\alpha = 0{,}1$ dan nilai $\chi^2_{(0{,}1;1)} = 2{,}706$ maka variabel yang signifikan terhadap jumlah kematian ibu dan bayi adalah persentase ibu hamil yang melaksanakan program K4 (X_1).

Dengan tidak mengikutsertakan variabel prediktor yang tidak signifikan ke dalam model, maka didapatkan model sebagai berikut.

$$\hat{\lambda}_0 = -0{,}404$$

$$\ln\left(\hat{\lambda}_{1,i}{}^{*}\right) = 2{,}067 - 0{,}240x_{2i} - 0{,}140x_{4i}$$

$$\ln\left(\hat{\lambda}_{2,i}{}^{*}\right) = 2{,}863 - 0{,}098x_{3i}$$

$$\text{logit}(\hat{\pi}_i) = -21{,}818 + 0{,}183x_{1i}$$

dengan $\hat{\lambda}_{j,i}{}^{*} = \hat{\lambda}_{j,i} + \hat{\lambda}_0\,,\ \ j = 1{,}2.$

Pada kasus jumlah kematian ibu, setiap penambahan 1% jumlah pelayanan kesehatan ibu nifas (X_2), maka rata-rata jumlah kasus kematian ibu akan menurun sebesar $\exp(-0{,}240) = 0{,}787$ dari rata-rata jumlah kematian ibu semula apabila variabel lain tidak dilibatkan dalam model. Setiap penambahan 1% jumlah peserta (X_4) maka rata-rata jumlah kasus kematian ibu akan menurun sebesar 140) $= 0{,}869$ dari rata-rata jumlah kematian ibu semula apabila variabel dilibatkan dalam model.

Pada kasus jumlah kematian bayi, setiap penambahan 1% jumlah penanganan komplikasi kebidanan (X_3) maka rata-rata jumlah kasus kematian bayi akan menurun sebesar $\exp(-0{,}098) = 0{,}907$ dari rata-rata jumlah kematian bayi semula apabila variabel lain tidak dilibatkan dalam model. Pada model logit dari kematian ibu dan bayi, setiap penambahan 1% jumlah ibu hamil yang melaksanakan program K4 (X_1) maka rata-rata jumlah kematian ibu dan bayi secara bersama-sama akan menurun sebesar $\frac{\exp(0{,}183)}{1+\exp(0{,}183)} = 0{,}546$ apabila variabel lain tidak dilibatkan dalam model.

4.4 Pemilihan Model Terbaik

Salah satu kriteria yang digunakan untuk menentukan model terbaik dalam mengestimasi model secara statistik adalah dengan menggunakan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC). Semakin kecil nilai AIC, maka semakin baik model tersebut. Untuk memilih model terbaik, nilai AIC untuk model regresi *Bivariate Poisson* dibandingkan dengan nilai AIC untuk model regresi BZIP. Sebelum itu, pemodelan regresi juga dilakukan untuk model *Bivariate Poisson* pada data kematian ibu dan bayi dengan menggunakan metode MLE sehingga diperoleh nilai AIC seperti pada Tabel 4.8. Nilai AIC untuk model regresi *Bivariate Poisson* dan BZIP berdasarkan hasil output sintaks MATLAB pada Lampiran 9 dapat ditunjukkan pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4.8 Nilai AIC model regresi *Bivariate Poisson* dan BZIP

Model Regresi	AIC
Bivariate Poisson	198,120
Bivariate Zero-Inflated Poisson	170,976

Sumber: Data diolah, 2020

Tabel 4.8 menunjukkan bahwa model regresi BZIP mempunyai nilai AIC yang lebih kecil daripada model regresi *Bivariate Poisson* sehingga model regresi [illegible]ih baik daripada model regresi *Bivariate Poisson*. Artinya, model regresi [illegible]ih baik dalam mengatasi *overdispersi* pada data jumlah kematian ibu dan [illegible]ra bersama-sama dibandingkan dengan model regresi *Bivariate Poisson*.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan hasil penelitian yamg telah dilakukan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Estimasi parameter model regresi *Bivariate Zero-Inflated Poisson* dengan λ_0 adalah suatu konstanta diperoleh model gabungan untuk λ_{i1}; λ_{i2}; dan π_i sebagai berikut.

   $$\lambda_{i1} = \exp(\boldsymbol{X_i\beta_1}) - \lambda_0$$
   $$\lambda_{i2} = \exp(\boldsymbol{X_i\beta_2}) - \lambda_0$$
   $$\pi_i = \frac{\exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}{1 + \exp(\boldsymbol{X_i\gamma})}$$

   Metode *maximum likelihood estimation* dengan algoritma *Expectation-Maximization* digunakan untuk memperoleh estimasi parameternya, yaitu $\hat{\lambda}_0$; $\boldsymbol{\hat{\beta}_1} = \hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11}, \dots, \hat{\beta}_{p1}$; $\boldsymbol{\hat{\beta}_2} = \hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12}, \dots, \hat{\beta}_{p2}$; dan $\boldsymbol{\hat{\gamma}} = \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p$.

2. Model regresi *Bivariate Zero-Inflated Poisson* pada data jumlah kematian ibu dan bayi di Kota Makassar tahun 2017 adalah sebagai berikut.

   $$\hat{\lambda}_0 = -0{,}404$$
   $$\ln(\hat{\lambda}_{i1}{}^*) = 2{,}067 + 0{,}202x_{i1} - 0{,}240x_{i2} + 0{,}144x_{i3} - 0{,}140x_{i4} - 0{,}048x_{i5}$$
   $$\ln(\hat{\lambda}_{i2}{}^*) = 2{,}863 - 0{,}055x_{i1} + 0{,}059x_{i2} - 0{,}098x_{i3} + 0{,}044x_{i4} + 0{,}035x_{i5}$$
   $$\text{logit}(\hat{\pi}_i) = -21{,}818 + 0{,}183x_{i1} + 0{,}020x_{i2} - 0{,}081x_{i3} - 0{,}063x_{i4} + 0{,}141x_{i5}$$

   dengan $\hat{\lambda}_{ik}{}^* = \hat{\lambda}_{ik} + \hat{\lambda}_0$, $k = 1{,}2$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, maka saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. M nggunakan model regresi *Bivariate Zero-Inflated Poisson* dengan λ_0 lah fungsi dari variabel bebas (kovariat) atau λ_0 adalah nol.
2. nggunakan variabel respon yang lebih dari dua sehingga dapat digunakan del regresi *Multivariate Zero-Inflated Poisson* (MZIP).

DAFTAR PUSTAKA

Arkandi, I., & Winahju, W. S. (2015). Analisis Faktor Risiko Kematian Ibu dan Kematian Bayi dengan Pendekatan Regresi Poisson Bivariat di Provinsi Jawa Timur Tahun 2013. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 2337-3520.

Armawati, W. N. (2018). *Metode Regresi Poisson Bivariat dalam Pemodelan Jumlah Kasus HIV dan AIDS di Jawa Tengah Tahun 2016.* Yogyakarta: Universitas Islam Indonesia.

Cahyandari, R. (2014). Pengujian Overdispersi pada Model Regresi Poisson. *Jurnal Statistika UIN Sunan Gunung Djati, Vol. 14 No.2*, 69-76.

Cameron, A. C., & Trivedi, P. K. (1998). *Regression Analysis of Count Data.* New York: Cambridge University Press.

Dinkes. (2018). *Profil Kesehatan Kota Makassar Tahun 2017.* Makassar: Dinas Kesehatan Kota Makassar.

Eminita, V., Kurnia, A., & Sadik, K. (2019). Penanganan Overdispersi pada Pemodelan Data Cacah dengan Respon Nol Berlebih (Zero-Inflated). *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 71-80.

Harlan, J. (2018). *Analisis Regresi Linear.* Depok: Gunadarma.

Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2013). *Introduction to Mathematical Statistics, Seventh Edition.* United States of America: Pearson Education, Inc.

Ilmi, F. M. (2015). *Pemodelan Kasus Malaria dan Filariasis di Jawa Timur Menggunakan Regresi Poisson Bivariat.* Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Ismail, N., & Jemain, A. A. (2007). Handling Overdispersion with Negative Binomial and Generalized Poisson Regression Models. *Journal of Casualty Actuarial Society Forum*, 103-158.

N., & Hinde, J. P. (2002). Score Tests for Zero-Infated Poisson Models. *rnal of Computational Statistics & Data Analysis*, 75-96.

Karlis, D., & Ntzoufras, I. (2005). Bivariate Poisson and Diagonal Inflated Bivariate Poisson Regression Models in R. *Journal of Statistical Software*.

Kocherlakota, S., & Kocherlakota, K. (2007). Regression in The Bivariate Poisson Distribution. *Journal of Communications in Statistics - Theory and Methods*, 815-825.

Kurniawan, I. (2017). *Model Regresi Poisson Terbaik Menggunakan Zero-Inflated Poisson (ZIP) dan Zero-Inflated Negative Binomial (ZINB).* Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Kusuma, W., Komalasari, D., & Hadijati, M. (2013). Model Regresi Zero Inflated Poisson pada Data Overdispersion. *Jurnal Matematika Vol. 3 No.2*, 71-85.

Purba, S. A. (2018). *Maksimum Likelihood Berdasarkan Algoritma Newton Raphson, Fisher Scoring dan Expectation Maximization.* Medan: Universitas Sumatera Utara.

Ruliana. (2015). *Pemodelan Generalized Poisson Regression (GPR) Untuk Mengatasi Pelanggaran Equidispersi pada Regresi Poisson Kasus Campak di Kota Semarang.* Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Wang, K., Lee, A. H., Yau, K. K., & Carrivick, P. J. (2003). A Bivariate Zero-Inflated Poisson Regression Model to Analyze Occupational Injuries. *Journal of Accident Analysis & Prevention*, 625-629.

Wang, Y. (2017). *Multivariate Zero-Inflated Poisson Regression.* Minneapolis and St. Paul: University of Minnesota.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Variabel Respon, Jumlah Kematian Ibu dan Bayi di Puskesmas Kota Makassar Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2017

No.	Kecamatan	Puskesmas	Jumlah Kematian	
			Ibu (Y_1)	Bayi (Y_2)
1.	Ujung Tanah	Pattingalloang	0	2
2.		Tabaringan	0	2
3.		P. Barrang Lompo	0	0
4.		P. Kodingareng	0	0
5.	Tallo	Jumpandang Baru	0	1
6.		Rappokalling	0	0
7.		Kaluku Bodoa	0	1
8.	Bontoala	Layang	2	0
9.		Malimongan Baru	0	0
10.	Wajo	Tarakan	0	0
11.		Andalas	1	0
12.	Ujung Pandang	Makkasau	0	1
13.	Makassar	Bara-baraya	0	1
14.		Maccini Sawah	1	0
15.		Maradekaya	0	3
16.	Mamajang	Mamajang	0	2
17.		Cendrawasih	0	0
18.	Mariso	Dahlia	0	2
19.		Pertiwi	1	0
20.		Panambungan	0	0
21.	Tamalate	Tamalate	0	0
22.		Jongaya	0	1
23.		Barombong	0	0
24.		Maccini Sombala	0	1
25.	Rappocini	Kassi-kassi	0	1
[illegible]		Mangasa	0	1
[illegible]		Minasa Upa	0	0
[illegible]		Ballaparang	0	0

Lampiran 2. Data Variabel Respon, Jumlah Kematian Ibu dan Bayi di Puskesmas Kota Makassar Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2017 (Lanjutan)

No.	Kecamatan	Puskesmas	Jumlah Kematian	
			Ibu (Y_1)	Bayi (Y_2)
29.	Panakkukang	Batua	0	3
30		Toddopuli	0	0
31.		Pampang	0	1
32.		Tamamaung	0	0
33.	Biringkanaya	Karuwisi	0	2
39.		Bulurokeng	0	1
40.		Sudiang Raya	0	1
41.		Paccerakkang	0	2
42.	Tamalanrea	Tamalanrea	0	0
43.		Tamalanrea Jaya	0	1
44.		Bira	0	2
45.		Antara	0	1
46.		Kapasa	0	0

Lampiran 3. Data Variabel Prediktor, Faktor-faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kematian Ibu dan Bayi dalam Persen (%)

No.	Puskesmas	Program K4 (X_1)	Yankes Ibu Nifas (X_2)	Komplikasi Kebidanan (X_3)	KB Aktif (X_4)	Yankes Bayi (X_5)
1.	Pattingalloang	93,75	92,24	96,25	69,01	94,78
2.	Tabaringan	85,96	85,25	95,89	68,79	96,23
3.	P. Barrang Lompo	96,30	97,71	100,00	70,17	98,83
4.	P. Kodingareng	97,87	100,00	95,74	68,40	97,67
5.	Jumpandang Baru	95,58	94,75	97,89	60,84	96,06
6.	Rappokalling	94,85	96,85	96,93	67,94	96,62
7.	Kaluku Bodoa	96,45	93,49	97,20	72,03	100,00
8.	Layang	96,05	94,69	97,12	66,52	95,99
9.	Malimongan Baru	100,00	93,53	96,74	70,41	95,69
10.	Tarakan	96,37	86,45	97,36	71,26	96,74
11.	Andalas	92,56	91,22	97,09	71,84	96,09
12.	Makkasau	98,05	97,84	96,63	66,00	95,91
13.	Bara-baraya	90,90	95,92	97,53	73,32	96,14
14.	Maccini Sawah	95,29	96,43	98,50	64,44	96,47
15.	Maradekaya	95,93	97,27	96,15	72,42	99,25
16.	Mamajang	95,25	99,18	96, 20	73,25	96,08
17.	Cendrawasih	95,30	99,57	96,57	72,85	96,92
18.	Dahlia	99,01	98,93	97,53	72,84	97,28
19.	Pertiwi	95,11	97,02	97,70	62,94	94,64
20.	Panambungan	93,81	96,70	96,43	74,18	96,86
21.	Tamalate	94,97	99,61	96,73	41,36	96,77
22.	Jongaya	95,01	98,68	97,62	71,33	96,13
23.	Barombong	95,74	99,55	96,90	71,92	96,15
24.	Maccini Sombala	95,31	100,00	97,58	69,04	95,83
25.	Kassi-kassi	94,97	100,00	100,00	80,54	100,00
[illegible]	[illegible]angasa	90,40	92,37	93,13	64,29	95,66
[illegible]	[illegible]inasa Upa	94,66	96,99	100,00	67,50	96,09
[illegible]	[illegible]allaparang	97,24	97,65	96,55	68,40	96,36

Lampiran 4. Data Variabel Prediktor, Faktor-faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kematian Ibu dan Bayi dalam Persen (%) (Lanjutan)

No.	Puskesmas	Program K4 (X_1)	Yankes Ibu Nifas (X_2)	Komplikasi Kebidanan (X_3)	KB Aktif (X_4)	Yankes Bayi (X_5)
29.	Batua	95,43	97,05	96,89	65,57	96,48
30	Toddopuli	94,82	98,23	97,56	77,10	96,31
31.	Pampang	96,19	97,69	96,41	69,78	95,56
32.	Tamamaung	95,20	96,17	96,96	72,68	98,28
33.	Karuwisi	91,76	98,49	98,70	71,09	95,47
34.	Antang	95,09	97,63	96,52	63,79	95,65
35.	Antang Perumnas	95,92	94,18	95,92	70,53	95,78
36.	Tamangapa	100,00	96,28	100,00	70,05	96,31
37.	Bangkala	91,82	98,02	97,10	73,76	96,44
38.	Sudiang	96,18	96,34	98,97	68,20	96,15
39.	Bulurokeng	100,00	98,64	95,96	71,26	94,44
40.	Sudiang Raya	95,20	97,38	97,11	72,08	99,16
41.	Paccerakkang	95,00	99,70	97,28	76,62	93,26
42.	Tamalanrea	95,54	98,71	98,19	65,62	93,72
43.	Tamalanrea Jaya	90,75	98,28	97,50	67,08	93,41
44.	Bira	95,92	96,91	97,83	71,22	94,03
45.	Antara	83,99	89,93	96,91	72,70	94,43
46.	Kapasa	95,50	95,50	97,88	72,64	92,44

Lampiran 5. Output SPSS untuk Uji Kecocokan Distribusi Poisson

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Kematian_Ibu	Kematian_Bayi
N		46	46
Poisson Parameter[a,b]	Mean	,13	,89
Most Extreme Differences	Absolute	,014	,046
	Positive	,014	,046
	Negative	-,014	-,037
Kolmogorov-Smirnov Z		,095	,315
Asymp. Sig. (2-tailed)		1,000	1,000

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

Lampiran 4. Output SPSS untuk Uji Overdispersi

Goodness of Fit[a]

	Value	df	Value/df
Deviance	27,215	40	,680
Scaled Deviance	27,215	40	
Pearson Chi-Square	55,333	40	1,383
Scaled Pearson Chi-Square	55,333	40	

Dependent Variable: Kematian_Ibu

Goodness of Fit[a]

	Value	df	Value/df
Deviance	58,663	40	1,467
Scaled Deviance	58,663	40	
Pearson Chi-Square	52,122	40	1,303
Scaled Pearson Chi-Square	52,122	40	

Dependent Variable: Kamatian_Bayi

Lampiran 5. Output SPSS untuk Uji Korelasi Pearson

Correlations

		Kematian_Ibu	Kematian_Bayi
Kematian_Ibu	Pearson Correlation	1	-,292*
	Sig. (2-tailed)		,049
	N	46	46
Kematian_Bayi	Pearson Correlation	-,292*	1
	Sig. (2-tailed)	,049	
	N	46	46

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Lampiran 6. Sintaks MATLAB untuk Estimasi Parameter

```
%% Ambil dataset
dataset   = xlsread('D:\Document\Universitas Hasanuddin
            (Statistika)\Semester 7\Skripsi\Data\Data.xlsx');
[n0,p0]   = size(dataset);
datafull = dataset(:,1:9);

%% Definisi X dan Y
Y1     = datafull(:,1);
Y2     = datafull(:,2);
X      = datafull(:,3:7);
[n,p] = size(X);

%% Matrix X baru
Xbaru    = [ones(n,1),X];
X1       = Xbaru(:,1);
phi      = datafull(:,8);
logit    = datafull(:,9);
[nb,kb] = size(Xbaru);

%% Lambda, Beta dan Gamma
B1 = inv(Xbaru'*Xbaru)*(Xbaru'*Y1);
B2 = inv(Xbaru'*Xbaru)*(Xbaru'*Y2);
GM = inv(Xbaru'*Xbaru)*(Xbaru'*logit);
LM = -0.1188406;
T0 = [LM,B1',B2',GM'];

%% Estimasi L0, B1, dan B2
iterasi1 = 0;
iterasi2 = 0;
selisih1 = 0.1;
selisih2 = 0.1;

while selisih1 >= 0.001
 while selisih2 >= 0.001
  XB1 = Xbaru*B1;
  XB2 = Xbaru*B2;
      = Xbaru*GM;
      = LM*X1;
      = exp(XB1) - L0;
      = exp(XB2) - L0;
```

```
% E-Step
  for j=1:kb
   for i=17:n
    A1(i) = L1(i)^Y1(i)/factorial(Y1(i));
    A2(i) = L2(i)^Y2(i)/factorial(Y2(i));

    % Turunan Pertama L0
       dLA1(i)  = -Y1(i)*L1(i)^(Y1(i)-1)/factorial(Y1(i));
      dLA2(i)  = -Y2(i)*L2(i)^(Y2(i)-1)/factorial(Y2(i));
      dLA(i)   = dLA1(i)*A2(i) + dLA2(i)*A1(i);
      dL0(i)   = dLA(i)/A1(i)/A2(i);
    % Turunan Pertama B1 dan B2
      dB1A1(i,j) = Y1(i)*Xbaru(i,j)*exp(XB1(i))*L1(i)^
                   (Y1(i)-1)/factorial(Y1(i));
      dB2A2(i,j) = Y2(i)*Xbaru(i,j)*exp(XB2(i))*L2(i)^
                   (Y2(i)-1)/factorial(Y2(i));
      dBA1(i,j)  = dB1A1(i,j)*A2(i);
      dBA2(i,j)  = dB2A2(i,j)*A1(i);
      dB1(i,j)   = dBA1(i,j)/A1(i)/A2(i)-
                   Xbaru(i,j)*exp(XB1(i));
      dB2(i,j)   = dBA2(i,j)/A1(i)/A2(i)-
                   Xbaru(i,j)*exp(XB2(i));
   end

   for ii=1:16
    L(ii)       = L0(ii) + L1(ii) + L2(ii);
    Z(ii)       = exp(XG(ii))/(exp(XG(ii))+exp(-L(ii)));
    dL00(ii)    = 1 - Z(ii);
    dBB1(ii,j)  = (Z(ii)-1)*Xbaru(ii,j)*exp(XB1(ii));
    dBB2(ii,j)  = (Z(ii)-1)*Xbaru(ii,j)*exp(XB2(ii));
    dGG(ii,j)   = Z(ii)*Xbaru(ii,j);
   end

   for iii=1:n
    dG(iii,j) = -Xbaru(iii,j)*exp(XG(iii))/(1+exp(XG(iii)));
   end

   d1L0     = 30 + sum(dL00) + sum(dL0);
       (j)  = sum(dBB1(:,j)) + sum(dB1(:,j));
       (j)  = sum(dBB2(:,j)) + sum(dB2(:,j));
       j)   = sum(dGG(:,j))  + sum(dG(:,j));
```

```
for k=1:kb
 for i=17:n
  A1(i)        = L1(i)^Y1(i)/factorial(Y1(i));
  A2(i)        = L2(i)^Y2(i)/factorial(Y2(i));
  XY1(i,j,k)  = Xbaru(i,j)*Xbaru(i,k)*exp(XB1(i))*
               L1(i)^(Y1(i)-1)/factorial(Y1(i));
  XY2(i,j,k)  = Xbaru(i,j)*Xbaru(i,k)*exp(XB2(i))*
               L2(i)^(Y2(i)-1)/factorial(Y2(i));

% Turunan Kedua L0^2
  d2LA1(i)  = L1(i)^(Y1(i)-2)*Y1(i)*(Y1(i)-1)/
             factorial(Y1(i));
  d2LA2(i)  = L2(i)^(Y2(i)-2)*Y2(i)*(Y2(i)-1)/
             factorial(Y2(i));
  d2LA(i)   = 2*dLA1(i)*dLA2(i) + d2LA1(i)*A2(i) +
             A1(i)*d2LA2(i);
  d2L(i)    = d2LA(i)/A1(i)/A2(i)-dLA(i)^2/A1(i)^2/A2(i)^2;

% Turunan Kedua B1^2 dan B2^2
  d2B1A1(i,j,k)  = Y1(i)*XY1(i,j,k) + Y1(i)*(Y1(i)-1)*
                  XY1(i)*exp(XB1(i))/L1(i);
  d2B2A2(i,j,k)  = Y2(i)*XY2(i,j,k) + Y2(i)*(Y2(i)-1)*
                  XY2(i)*exp(XB2(i))/L2(i);
  d2BA1(i,j,k)  = d2B1A1(i,j,k)*A2(i);
  d2BA2(i,j,k)  = d2B2A2(i,j,k)*A1(i);
  d2B1(i,j,k)   = d2BA1(i)/A1(i)/A2(i)-dBA1(i,j)*dBA1(i,j)*
                 Xbaru(i,k)/Xbaru(i,j)/A1(i)^2/A2(i)^2 -
                 Xbaru(i,j)*Xbaru(i,k)*exp(XB1(i));
  d2B2(i,j,k)   = d2BA2(i)/A1(i)/A2(i)-dBA2(i,j)*dBA2(i,j)*
                 Xbaru(i,k)/Xbaru(i,j)/A1(i)^2/A2(i)^2 -
                 Xbaru(i,j)*Xbaru(i,k)*exp(XB2(i));

% Turunan Kedua L0,B1 dan L0,B2
  d2LB1A1(i,j)  = (1-Y1(i))*dB1A1(i,j)/L1(i);
  d2LB2A2(i,j)  = (1-Y2(i))*dB2A2(i,j)/L2(i);
  d2LBA1(i,j)   = d2LB1A1(i,j)*A2(i) + dB1A1(i,j)*dLA2(i);
  d2LBA2(i,j)   = d2LB2A2(i,j)*A1(i) + dB2A2(i,j)*dLA1(i);
  d2LB1(i,j)    = d2LBA1(i,j)/A1(i)/A2(i) -
                 dLA(i)*dBA1(i,j)/A1(i)^2/A2(i)^2;
  d2LB2(i,j)    = d2LBA2(i,j)/A1(i)/A2(i) -
                 dLA(i)*dBA2(i,j)/A1(i)^2/A2(i)^2;
```

```
% Turunan Kedua B1,B2
  d2B12(i,j) = dBA1(i,j)*dBA2(i,j)/A1(i)^2/A2(i)^2 -
               dB1A1(i,j)*dB2A2(i,j)/A1(i)/A2(i);
 end

 for ii=1:16
  L(ii) = L0(ii) + L1(ii) + L2(ii);
  Z(ii) = exp(XG(ii))/(exp(XG(ii))+exp(-L(ii)));
  d2BB1(ii,j,k) = (Z(ii)-1)*Xbaru(ii,j)*Xbaru(ii,k)*
                  exp(XB1(ii));
  d2BB2(ii,j,k) = (Z(ii)-1)*Xbaru(ii,j)*Xbaru(ii,k)*
                  exp(XB2(ii));
 end

 for iii=1:n
  EG(iii)       = exp(XG(iii))/(1+exp(XG(iii)));
  d2G(iii,j,k) = Xbaru(iii,j)*Xbaru(iii,k)*(EG(iii)^2 -
                 EG(iii));
 end

 d2L0         = sum(d2L);
 d2L0B1(j,1) = sum(d2LB1(:,j));
 d2L0B2(j,1) = sum(d2LB2(:,j));
 d2B1B2(j,k) = sum(d2B12(:,j));
 d2B1B1(j,k) = sum(d2BB1(:,j,k)) + sum(d2B1(:,j,k));
 d2B2B2(j,k) = sum(d2BB2(:,j,k)) + sum(d2B2(:,j,k));
 d2GG(j,k)    = sum(d2G(:,j,k));
end
end

T  = [LM,B1',B2'];
G  = [d1L0,d1B1,d1B2];
H1 = [d2L0,d2L0B1',d2L0B2'];
H2 = [d2L0B1,d2B1B1,d2B1B2];
H3 = [d2L0B2,d2B1B2,d2B2B2];
H  = [H1',H2',H3'];

% M-Step (Newton Raphson)
             = T';
      si1 = iterasi1 + 1;
             = Tlama - inv(H)*G';
      ih1 = norm(Theta - Tlama);
```

```
    disp([iterasi1' Theta' Selisih1'])
    Glama     = GM;
    iterasi2 = iterasi2 + 1;
    Gamma     = Glama - inv(d2GG)*d1G';
    Selisih2 = norm(Gamma - Glama);
    disp([iterasi2' Gamma' Selisih2'])

    LM = Theta(1,:);
    B1 = Theta(2:7,:);
    B2 = Theta(8:13,:);
    GM = Gamma;

  end
end
```

Lampiran 7. Sintaks MATLAB untuk Uji Serentak Parameter Model

```
%% Uji Serentak Parameter Model
XB1 = Xbaru*B1;
XB2 = Xbaru*B2;
XG  = Xbaru*GM;

for i=1:16
  ZW(i)  = exp(GM(1,:))/(exp(GM(1,:)) + exp(-exp(B1(1,:))-
             exp(B2(1,:))));
  ZO(i)  = exp(XG(i))/(exp(XG(i)) + exp(-exp(XB1(i))-
             exp(XB2(i))));
  LW1(i) = ZW(i)*GM(1,:) + (ZW(i)-1)*(exp(B1(1,:))+
             exp(B2(1,:))) - log(1+exp(GM(1,:)));
  LO1(i) = ZO(i)*XG(i) + (ZO(i)-1)*(exp(XB1(i))+
             exp(XB2(i))) - log(1+exp(XG(i)));
end

for ii=17:n
  AW1(ii) = exp(B1(1,:))^Y1(ii)/factorial(Y1(ii));
  AW2(ii) = exp(B2(1,:))^Y2(ii)/factorial(Y2(ii));
  AO1(ii) = exp(XB1(ii))^Y1(ii)/factorial(Y1(ii));
  AO2(ii) = exp(XB2(ii))^Y2(ii)/factorial(Y2(ii));
  LW2(ii) = - exp(B1(1,:)) - exp(B2(1,:)) -
              log(1+exp(GM(1,:))) + log(AW1(ii)*AW2(ii));
  LO2(ii) = - exp(XB1(ii)) - exp(XB2(ii)) -
              log(1+exp(XG(ii))) + log(AO1(ii)*AO2(ii));
end

LW = sum(LW1) + sum(LW2);
LO = sum(LO1) + sum(LO2);
G2 = 2*(LO - LW);
```

Lampiran 8. Sintaks MATLAB untuk Uji Parsial Parameter Model

```
%% Uji Parsial Parameter Model
VB12 = -(inv(H));
VGM  = -(inv(d2GG));

% Uji Parsial Parameter Beta
for w=1:13
  SEB12(w)  = sqrt(VB12(w,w));
  WB12(w)   = (Theta(w)/SEB12(w))^2;
End

% Uji Parsial Parameter Gamma
for j=1:kb
  SEGM(j)  = sqrt(VGM(j,j));
  WGM(j)   = (Gamma(j,:)/SEGM(:,j))^2;
end
```

Lampiran 9. Sintaks MATLAB untuk Nilai AIC Model Regresi *Bivariate* Poisson dan BZIP

```
%% Nilai AIC Model Regresi Bivariate Poisson
XB1 = Xbaru*B1;
XB2 = Xbaru*B2;
for iii=1:n
  A1T(iii) = Y1(iii)*log(exp(XB1(iii))-LM) -
               log(factorial(Y1(iii)));
  A2T(iii) = Y2(iii)*log(exp(XB2(iii))-LM) -
               log(factorial(Y2(iii)));
  LT(iii)  = LM - exp(XB1(iii)) - exp(XB2(iii)) + A1T(iii)
               + A2T(iii);
end
AIC_BP = 2*3 - 2*(sum(LT));


%% Nilai AIC Model Regresi BZIP
XB1 = Xbaru*B1;
XB2 = Xbaru*B2;
XG  = Xbaru*GM;
for i=1:16
  ZT(i)  = exp(XG(i))/(exp(XG(i)) + exp(LM-exp(XB1(i))-
             exp(XB2(i))));
  LT1(i) = ZT(i)*XG(i) + (ZT(i)-1)*(exp(XB1(i))+exp(XB2(i))-
             LM) - log(1+exp(XG(i)));
end
for ii=17:n
  A1T(ii) = Y1(ii)*log(exp(XB1(ii))-LM) -
             log(factorial(Y1(ii)));
  A2T(ii) = Y2(ii)*log(exp(XB2(ii))-LM) -
             log(factorial(Y2(ii)));
  LT2(ii) = LM - exp(XB1(ii)) - exp(XB2(ii)) -
             log(1+exp(XG(ii))) + A1T(ii) + A2T(ii);
end
AIC_BZIP = 2*4 - 2*(sum(LT1) + sum(LT2));
```