

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Transformasi Fourier adalah teknik analisis sinyal yang sangat mendasar, yang mengubah sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi. Teknik ini memungkinkan identifikasi komponen frekuensi dari sinyal, namun memiliki keterbatasan dalam resolusi waktu. Artinya, informasi tentang kapan komponen frekuensi terjadi dalam sinyal tidak dapat diperoleh dengan baik. Dalam bidang matematika terapan, transformasi Fourier telah berkembang menjadi teknik matematika yang penting, terutama sebagai metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial Rim (J. Heisenberg's and Hardy's).

Prinsip ketidakpastian Heisenberg dikemukakan pada tahun 1927 oleh Werner Heisenberg. Prinsip ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa posisi dan momentum suatu elektron tidak bisa ditentukan dalam waktu yang bersamaan. Artinya, jika kedua hal tersebut diukur secara bersamaan maka tidak akan diperoleh nilai dari besaran tersebut. Jika dikaitkan dengan aktivitas, maka prinsip dari hukum ini menjelaskan bahwa dalam suatu waktu kita mengerjakan dua atau lebih pekerjaan maka kita tidak akan mendapatkan hasil yang optimal. Misalnya, seorang dosen sedang mengajar mata kuliah di kelas, pada saat mengajar dosen tersebut mengerjakan laporan penelitiannya, maka kedua pekerjaan tersebut tidak akan meraih hasil yang optimal.

Prinsip ketidakpastian merupakan salah satu hasil utama yang sangat penting pada transformasi kanonik linier. Prinsip ketidakpastian Heisenberg ditemukan oleh fisikawan Werner Heisenberg pada tahun 1927. Asas ketidakpastian menyatakan, bahwa posisi dan kecepatan elektron tidak bisa ditentukan pada saat yang bersamaan, karena semakin akurat kecepatannya ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan a, demikian sebaliknya (Heisenberg, 1927).

anyak peneliti yang tertarik untuk mempelajari lebih jauh angan dari formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg. Debnath 1) telah memodifikasi prinsip ketidakpastian Heisenberg dengan



cara melakukan peninjauan terhadap standar deviasi posisi dan standar deviasi momentum dari operasi kesalahan pengukuran posisi dan operator gangguan pada momentum. Debnath (L. Shah) mendefinisikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier quaternion. Bahri (M. Adji) membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier. J. Ebling (and G. Scheuermann.) membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional *coupled* dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional *coupled*.

Banyak penelitian yang mengkaji tentang transformasi kanonik linier (TKL). Salah satu penelitian yang diperkenalkan oleh Wei dkk. (2012) mengenai teorema konvolusi dan korelasi pada TKL dan aplikasinya. Dalam penelitian tersebut, Wei dkk memperkenalkan struktur konvolusi terbaru pada TKL yang dinyatakan dengan integral satu dimensi dan mudah diterapkan dalam desain filter. Sebelumnya Wei dkk. melakukan penelitian terkait dengan memperkenalkan struktur konvolusi terbaru pada TKL yang mempertahankan properti invarians translasi yang diperoleh dengan memodifikasi definisi sebelumnya dan dengan memperkenalkan operator translasi TKL. Hennelly dan Sheridan (2005) menggunakan transformasi kanonik linier untuk menjelaskan operasi sistem optik fase kuadrat untuk melacak lokasi energi sinyal dalam fungsi distribusi Wigner. Selanjutnya penelitian terkait turunan teorema konvolusi pada TKL dan eksplorasi teorema sampling dan filter perkalian untuk pita sinyal terbatas dalam domain kanonik linier yang diperkenalkan oleh Bing dkk. (2006).

Penelitian ini mengkaji tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi kuaternion fourier berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya oleh Bahri dkk (2008) mengenai prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier quaternion. Dalam penelitiannya tersebut, Bahri dkk menggunakan sifat-sifat transformasi Fourier quaternion untuk membuktikan prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier quaternion khususnya sisi kanan. Setelahnya, Bahri dan Ashino (2010) melakukan penelitian mengenai prinsip ketidakpastian pada transformasi kanonik linier quaternion dengan menggunakan hubungan transformasi Fourier quaternion dan transformasi kanonik linier on.



Berdasarkan uraian di atas, akan dikaji pengembangan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi kanonik linier space-time yang bertujuan untuk menggabungkan teori ketidakpastian dengan analisis transformasi kanonik space-time. Transformasi kanonik sering digunakan di banyak cabang fisika teoretis untuk menyederhanakan sistem dinamik kompleks baik dalam domain ruang maupun waktu. Dalam konteks ini, penelitian ini menyelidiki bagaimana menggunakan atau memodifikasi prinsip ketidakpastian dalam kerangka transformasi linier space-time, dengan mengetahui terlebih dahulu terkait prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier. Hasil-hasil ini digeneralisasi dalam linear kanonik space-time.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan relasi antara Transformasi Fourier Space-time dengan Transformasi Linear Kanonik Space-time.
2. Bagaimana menentukan Prinsip Ketidakpastian Heisenberg dan Hausdoff Young pada Transformasi Linear Kanonik Space-time.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Menentukan relasi antara Transformasi Fourier Space-time dengan Transformasi Linear Kanonik Space-time.
2. Menentukan prinsip Ketidakpastian Heisenberg dan Hausdoff Young pada Transformasi Linear Kanonik Space-time.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan memberikan sumbangan ilmu pengetahuan bagi penulis dan a dalam kajian Transformasi Linear Kanonik Space-time modifikasi ya pada prinsip ketidakpastian Heisenberg.



1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah Transformasi Linear Kanonik Space-time.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah-istilah sebagai teori pendukung atau landasan dalam penulisan tugas akhir ini. Sebelum membahas tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Linear Kanonik, terlebih dahulu akan dibahas tentang ruang $L^p(Cl_{(3,1)})$ untuk transformasi Fourier. Selanjutnya, akan dibahas teori pendukung yaitu transformasi Linear kanonik Space-time.

2.1 Ruang $L^p(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$

Pada subbab ini, didefinisikan ruang $L^p(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$ dengan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 2.1.1 (Ruang $L^p(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$). *Misalkan $f : \mathbb{R}^{(3,1)} \rightarrow Cl_{(3,1)}$ adalah fungsi terukur yang terintegralkan p pada $\mathbb{R}^{(3,1)}$ dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai*

$$L^p(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^{(3,1)}} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (2.1)$$

maka norma dari f dalam $L^p(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^{(3,1)}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (2.2)$$

Contoh 1. Misalkan fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Maka norma L^1 dari f adalah:

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2.$$



Karena $\|f\|_1 < \infty$, maka $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2. Misalkan fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jika } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Maka norma L^2 dari f adalah:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-1}^1 x^2 dx \right)^{1/2} = \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2}.$$

Sehingga:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Karena $\|f\|_2 < \infty$, maka $f \in L^2(\mathbb{R})$.

2.2 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier merupakan operasi matematik yang mengubah sinyal dari domain waktu menjadi domain frekuensi. Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pengolahan sinyal digital maupun bidang pengolahan citra digital. Joseph Fourier, seorang matematikawan dari Perancis menunjukkan bahwa setiap fungsi sinyal dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari fungsi sinus dan cosinus.

2.2.1 Definisi

Definisi 2.2.1 (Transformasi Fourier). Misalkan diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ terdefinisi pada $\mathbb{R}$, transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ dan didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix(\omega)} dx. \quad (2.3)$$



alam hal ini, $i^2 = -1$ merupakan satuan imajiner dan faktor ω dari fungsi eksponensial $e^{-ix\omega}$ disebut kernel dari transformasi

Fourier. Karena

$$e^{ixw} = \cos wx + i \sin wx, \quad (2.4)$$

maka persamaan (2.3) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(w) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)(\cos wx - i \sin wx) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos wx dx - i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin wx dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ berada di $L^2(\mathbb{R})$ sehingga transformasi Fourier dapat diperluas ke $L^2(\mathbb{R})$.

Definisi 2.2.2 (Invers Transformasi Fourier). Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(w) e^{ixw} dw. \quad (2.6)$$

2.2.2 Sifat-sifat transformasi Fourier

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat transformasi Fourier diantaranya sebagai berikut:

Teorema 2.2.1 (Sifat penjumlahan). Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, maka berlaku

$$\mathcal{F}\{f + g\}(w) = \mathcal{F}\{f\}(w) + \mathcal{F}\{g\}(w). \quad (2.7)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f + g\}(w) &= \int_{\mathbb{R}} [f(x) + g(x)] e^{-ixw} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix(w)} + \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix(w)} dx \\ &= \mathcal{F}\{f\}(w) + \mathcal{F}\{g\}(w). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f + g\}(w) = \mathcal{F}\{f\}(w) + \mathcal{F}\{g\}(w)$. □

a 2.2.2 (Sifat linear). Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan α, β adalah dua konstanta, maka

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\xi) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(w) + \beta \mathcal{F}\{g\}(w). \quad (2.9)$$



Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-ix(\omega)} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(x) e^{-ix(\omega)} dx + \int_{\mathbb{R}} \beta g(x) e^{-ix(\omega)} dx \\
 &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix(\omega)} dx + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\omega x} dx \\
 &= \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega).
 \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega)$. □

Teorema 2.2.3 (Sifat translasi). Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang digeser oleh $x_0 \in \mathbb{R}$ yaitu $f_0(x) = f(x - x_0)$, maka

$$\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}\{f\}(\omega). \quad (2.10)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f_0(x) e^{-ix\omega} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x - x_0) e^{-ix\omega} dx.
 \end{aligned}$$

Misalkan $u = x - x_0, x = u + x_0, dx = du$. Sehingga, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega(u+x_0)} du \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega u} e^{-i\omega x_0} du \\
 &= e^{-i\omega x_0} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega u} du \\
 &= e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}\{f\}(\omega).
 \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}\{f\}(\omega)$. □



2.2.4 (Sifat modulasi). Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $w_0 \in \mathbb{R}$. Jika $v) = e^{iw_0 x} f(x)$, maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{w_0}f\}(\mathbf{w}) = \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{w} - w_0). \quad (2.11)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbb{M}_{w_0}f\}(\mathbf{w}) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{M}_{w_0}f) e^{-i\mathbf{w}x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iw_0x} f(x) e^{-i\mathbf{w}x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(\mathbf{w}-w_0)x} dx \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{w} - w_0). \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{w_0}f\}(\mathbf{w}) = \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{w} - w_0)$. □

Teorema 2.2.5 (Sifat konjugasi). Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\mathbf{w} \in \mathbb{R}$, maka

$$\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\mathbf{w}) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\mathbf{w})}. \quad (2.12)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\bar{f}\}(\mathbf{w}) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-i\mathbf{w}x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-i\mathbf{w}x} dx. \end{aligned}$$

Dengan perubahan variabel $x = -u$, integral tersebut menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\bar{f}\}(\mathbf{w}) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-u)} e^{-i\mathbf{w}(-u)} (-du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-u)} e^{i\mathbf{w}u} du. \end{aligned}$$

Transformasi Fourier dari f pada $-\mathbf{w}$ adalah

$$\mathcal{F}\{f\}(-\mathbf{w}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\mathbf{w}x} dx.$$



Dengan mengambil konjugat kompleks dari hasil ini, diperoleh

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}\{f\}(-w)} &= \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixw} dx\right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)e^{ixw}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-ixw} dx.\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\overline{f}\}(w) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-w)}$. □

2.3 Transformasi Linear Kanonik

Transformasi kanonik linear space-time adalah bentuk umum dari transformasi Fourier space-time. Pertama, akan dijelaskan apa itu transformasi Fourier space-time dan beberapa sifat-sifatnya. Dengan menggabungkan sifat-sifat transformasi Fourier space-time dan transformasi kanonik linear space-time, maka dapat menghasilkan beberapa versi dari ketidakpastian yang berhubungan dengan transformasi Fourier space-time. Berikut ini akan didefinisikan transformasi Linear dan beberapa sifat-sifatnya.

Pertama, kami akan mengulas kembali konsep dasar dari transformasi kanonik linier (LCT) dan kemudian menjelaskan hal-hal penting yang menjadi dasar hasil utama dalam penelitian ini.

Definisi 2.3.1. Misalkan $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Nyatakan parameter matriks di mana determinannya $\det(B) = ad - bc = 1$. Transformasi kanonik linier dari fungsi tersebut $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ dijelaskan melalui

$$L_B\{f(x)\}(w) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x)K_B(w, x)dx & b \neq 0 \\ \sqrt{d}e^{\frac{i}{2}cdw^2}f(dw) & b = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

dimana,

$$K_B(w, x) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi b}} e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}x^2 - \frac{2}{b}xw + \frac{d}{b}w^2\right)}, \quad (2.14)$$



Transformasi kanonik linier dari fungsi tersebut dijelaskan melalui fungsi dari LCT.

Berhubungan dengan (2.13) perhatikan bahwa $b \neq 0$ Sepanjang artikel ini. Selanjutnya, bentuk dari f Hal tersebut dapat dibentuk menggunakan rumus inversi untuk LCT sebagai berikut.

Definisi 2.3.2. Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ sehingga $L_B f \in L^1(\mathbb{R})$. Invers dari LCT dijelaskan melalui

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} L_B\{f(x)\}(w) \overline{K_B(w, x)} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2i\pi b}} \int_{\mathbb{R}} L_B\{f(x)\}(w) e^{-\frac{i}{2}(\frac{a}{b}x^2 - \frac{2}{b}xw + \frac{d}{b}w^2)} dw, \end{aligned} \quad (2.15)$$

dimana $\overline{K_B(w, x)}$ menunjukkan konjugat kompleks dari $K_B(w, x)$.

Lemma berikut mengumpulkan sifat-sifat dasar dari LCT yang didefinisikan di atas. Sifat-sifat ini adalah perbaikan dari sifat-sifat yang sesuai dengan transformasi Fourier biasa. Untuk deskripsi lebih rinci mengenai LCT, lihat (2.15).

Lemma 1. Berikut sifat-sifat dari LCT :

1. Linearitas

Misalkan f, g berada dalam $L^2(\mathbb{R})$ dengan k_1, k_2 merupakan bilangan konstan, kemudian

$$L_B\{k_1 f(x) + k_2 g(x)\}(w) = k_1 L_B\{f\}(w) + k_2 L_B\{g\}(w). \quad (2.16)$$

2. Geseran waktu

Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan operator yang digeser didefinisikan oleh $t_k f(x) = f(x - k)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} L_B\{t_k f(x)\}(w) &= L_B\{f(x - k)\}(w) \\ &= e^{-\frac{1}{2}aick^2 + ickw} L_B f(w - ak). \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Modulasi

Untuk setiap fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ dengan $w_0 \in \mathbb{R}$. Jika $M_{w_0} f(x) = e^{iw_0 x} f(x)$, maka didapat

$$L_B\{M_{w_0} f(x)\}(w) = L_B\{e^{iw_0 x} f(x)\}(w)$$



$$= e^{-\frac{1}{2}bdw_0^2 + idw_0w} L_B\{f\}(w - bw_0). \quad (2.18)$$

4. Sifat geseran dan modulasi

Untuk setiap fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ dengan $w_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{w_0} t_k f(x) = e^{iw_0x} f(x - k)$, diperoleh

$$\begin{aligned} L_B\{\mathbb{M}_{w_0} t_k f(x)\}(w) &= L_B\{e^{iw_0x} f(x - k)\}(w) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(aick^2 + bdw_0^2) + i(ck + dw_0)w - ibckw_0} L_B\{f\}(w - ak - bw_0). \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.4 Definisi Transformasi Linear Kanonik Space-time

Transformasi Linear Kanonik Space-time $f \in L^1(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$ dengan menggunakan parameter matrix $A = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}_{SFT}^A\{f\}(\underline{w}) = \hat{f}^A(\underline{w}) = \int_{\mathbb{R}^{(3,1)}} e^{-e_t w_t t} f(\underline{x}) K_{i_3}^A(\underline{x}, \underline{w}) d^4x \quad (2.20)$$

dimana kernel faktor $K_{i_3}^A$ adalah

$$K_{i_3}^A(\underline{x}, \underline{w}) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2 b \sqrt{b}} e^{i_3 \left(\frac{a}{2b} |\underline{x}|^2 + \frac{d}{2b} |\underline{w}|^2 - \frac{\underline{x} \cdot \underline{w}}{b} - \frac{\pi}{4} \right)}, & b \neq 0 \\ \sqrt{de}^{i_3 \left(\frac{cd}{2} \underline{w}^2 \right)} \delta(\underline{x} - d\underline{w}), & b = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

dalam hal ini,

1. Vektor ruang-waktu (Space-time Vectors) $\underline{x} = te_t + \underline{x} \in \mathbb{R}^{(3,1)}$, $\underline{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$.
2. Vektor frekuensi ruang-waktu (Space-time frequency vectors) $\underline{w} = w_te_t + \underline{w} \in \mathbb{R}^{(3,1)}$, $\underline{w} = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3 \in \mathbb{R}^3$.
3. Volume ruang-waktu $d^4x = dt dx_1 dx_2 dx_3$
4. $\underline{x} \cdot \underline{w}$ adalah hasil kali titik kanonik (hasil kali skalar) dari $\underline{x}$ dan $\underline{w}$.
 $\underline{x} \cdot \underline{w} = x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3$, dan $\underline{w} \cdot \underline{w} = tw_t + \underline{x} \cdot \underline{w}$



2.4.1 (Invers Space-time LCT). Misalkan $f\} \in L^1(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$, Invers dari space-time LCT didefinisikan

sebagai berikut

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{(3,1)}} \exp e_t w_t t \mathcal{L}_{SFT}^A \{f\}(\underline{\mathbf{w}}) \mathcal{K}_{-i_3}^M(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}) d^4 \underline{\mathbf{w}}, \quad (2.22)$$

Dimana volume frekuensi dari $d^4 \underline{\mathbf{w}} = dw_t dw_1 dw_2 dw_3$.

2.4.1 Sifat-sifat Transformasi Linear Kanonik Space-time

Lemma 2. Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$, dengan $\mathbf{x}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{(3,1)}$, konstanta $\xi = \xi_t e_t + \vec{\xi}$, $\mathbf{k} = k_t e_t + \vec{k} \in \mathbb{R}^{(3,1)}$ dan $\alpha, \beta \in Cl_{(3,1)}$. hasilnya adalah :

1. Sifat linier dari sebelah kiri

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(e_t, i_3)} \alpha f + \beta g(\mathbf{w}) &= \alpha_{+e_t} \mathcal{F}^{e_t, i_3} f(\mathbf{w}) + \alpha_{-e_t} \mathcal{F}^{-e_t, i_3} f(\mathbf{w}) \\ &+ \beta_{+e_t} \mathcal{F}^{e_t, i_3} g(\mathbf{w}) + \beta_{-e_t} \mathcal{F}^{e_t, i_3} g(\mathbf{w}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

dengan $A_{\pm e_t} = \frac{1}{2}(A \pm e_t^{-1} A e_t)$, $\forall A$ konstanta pada $Cl_{3,1}$. Secara khusus, jika α, β ada pada $\mathbb{R}$, atau $\alpha = \alpha_{+e_t}, \beta = \beta_{+e_t}$ menghasilkan $\mathbb{R}$ -linear

$$\mathcal{F}^{e_t, i_3} \alpha f + \beta g(\mathbf{w}) = \alpha \mathcal{F}^{e_t, i_3} f(\mathbf{w}) + \beta \mathcal{F}^{e_t, i_3} g(\mathbf{w}). \quad (2.24)$$

2. Sifat pergeseran

$$\mathcal{F}^{e_t, i_3} f(\mathbf{x} - \mathbf{k})(\mathbf{w}) = e^{k_t w_t e_t} \mathcal{F}^{e_t, i_3} f(\mathbf{w}) e^{-\vec{k} \cdot \vec{w} i_3}. \quad (2.25)$$

3. Sifat modulasi

$$\mathcal{F}^{e_t, i_3} e^{-t \xi_t e_t} f(\mathbf{x}) e^{-\vec{x} \cdot \vec{\xi} i_3}(\mathbf{w}) = \mathcal{F}^{e_t, i_3} f(\mathbf{w} + \xi). \quad (2.26)$$

Lemma berikutnya menjelaskan sifat skala anisotropik dari keempat komponen dari x .

Lemma 3 (Sifat skala anisotropik). Untuk $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0, f \in L^1(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(3,1)}, f_p(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} f(\alpha t, \beta x, \delta y, \gamma z)$, $\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ maka didapat

$$\mathcal{F}^{e_t, i_3} \{f_p\}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\alpha \beta \delta \gamma} \mathcal{F}^{e_t, i_3} \{f\} \left(\frac{w_t}{\alpha}, \frac{w_1}{\beta}, \frac{w_2}{\delta}, \frac{w_3}{\gamma} \right). \quad (2.27)$$



Lemma 4 (Turunan parsial). Untuk $\mathbf{x} = (t, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)), \mathbf{w} = (w_t, \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)) \in \mathbb{R}^{(3,1)}$, diasumsikan $f, \frac{\partial}{\partial x_k} f \in L^1(\mathbb{R}^{(3,1)}, Cl_{(3,1)}), k = 0, 1, 2, 3, x_0 = t$. kemudian

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{e_t, i_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}) \right\}(\mathbf{w}) &= w_t e_t \mathcal{F}^{e_t, i_3} \{f\}(\mathbf{w}) \\ \mathcal{F}^{e_t, i_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}) \right\}(\mathbf{w}) &= w_k \mathcal{F}^{e_t, i_3} \{f\}(\mathbf{w}) i_3, k = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (2.28)$$

2.5 Prinsip ketidakpastian Heisenberg

Werner Heisenberg (1927) mengemukakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti dan tidak dapat ditentukan dalam waktu yang bersamaan, karena semakin akurat momentum ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya. Sebaliknya, semakin akurat penentuan posisinya, maka semakin tidak akurat penentuan momentumnya. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg adalah nama yang diberikan untuk prinsip yang memberikan batas bawah (bukan nol) untuk dua keadaan yang mencirikan suatu keadaan sistem. Berikut diberikan bentuk umum persamaan prinsip ketidakpastian heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (2.29)$$

dengan keterangan:

Δx ; ketidakpastian posisi

Δp ; ketidakpastian momentum

h ; konstanta Planck ($6,625 \times 10^{-34}$) Js

Dari persamaan (2.29) diketahui bahwa hasil kali ketidakpastian posisi (Δx) suatu benda dan ketidakpastian momentum (Δp) dalam arah x akan lebih besar atau sama dengan hasil bagi konstanta Planck oleh 4π . Bentuk lain dari prinsip ketidakpastian Heisenberg juga tidak kalah penting. Salah satunya adalah modifikasi prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier. Dalam keadaan ini, Δx merupakan suatu fungsi dan Δp merupakan suatu transformasi Fourier.



Teorema 2.5.1. Misalkan $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, maka berlaku pertidaksamaan berikut

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} w^2 |\hat{f}(w)|^2 dw \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2. \quad (2.30)$$

Dari prinsip ketidakpastian diatas akan di generalisasi ke transformasi linear kanonik space-time (TLKS-T).

