

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan khususnya aljabar yang memainkan peran penting dalam memahami struktur dan simetri yang mendasari berbagai fenomena, baik dalam sains maupun teknologi. Salah satu cabang aljabar yang menarik perhatian adalah teori gelanggang, yang mempelajari struktur aljabar dengan dua operasi: penjumlahan dan perkalian. Gelanggang, seperti bilangan bulat ($\mathbb{Z}$) atau bilangan bulat modulo n ($\mathbb{Z}_n$), memberikan kerangka kerja untuk menganalisis sifat-sifat aritmatika dan hubungan antar elemen. Dalam perkembangannya, konsep gelanggang diperluas ke dalam struktur yang lebih umum, yaitu gelanggang hyper, yang menggantikan operasi perkalian dengan operasi hyper yang menghasilkan himpunan, bukan elemen tunggal. Penelitian tentang gelanggang hyper multiplicative, yang menggabungkan sifat grup abelian pada penjumlahan dan semihypergrup pada operasi hyper, membuka peluang baru untuk mengeksplorasi struktur aljabar yang lebih fleksibel dan aplikatif (Marty, 1934; Davvaz & Leoreanu-Fotea, 2007).

Ideal, sebagai subhimpunan khusus dari gelanggang yang tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dengan elemen gelanggang, menjadi alat penting dalam membentuk gelanggang hyper multiplicative. Dengan mendefinisikan operasi hiper seperti $a * b = a \cdot b + I$, di mana I adalah ideal dari gelanggang $(R, +, \cdot)$, kita dapat menghasilkan struktur hiperring $(R, +, *)$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu, seperti distributivitas dan asosiativitas (Davvaz, 2013). Struktur ini memungkinkan generalisasi dari gelanggang klasik ke gelanggang hyper, yang memiliki aplikasi potensial dalam teori bilangan, kriptografi, dan analisis kombinatorial. Misalnya, gelanggang hyper multiplicative berbasis ideal $p\mathbb{Z}$ pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$ memungkinkan untuk mempelajari sifat-sifat aritmatika modulo bilangan prima p . Penelitian ini menjadi relevan karena memberikan wawasan tentang bagaimana ideal dapat digunakan untuk membangun struktur aljabar baru yang lebih kaya dan kompleks.

Homomorfisma, sebagai pemetaan yang mempertahankan operasi aljabar, memainkan peran kunci dalam memahami hubungan antarstruktur gelanggang hyper. Dalam konteks gelanggang hyper multiplicative, homomorfisma memetakan elemen dari satu gelanggang hyper ke gelanggang hyper lain sambil menjaga sifat penjumlahan dan operasi hyper, seperti yang didefinisikan dalam $f(x * y) \subseteq f(x) * f(y)$ (Naumak et al., 2019). Penelitian tentang homomorfisma pada gelanggang hyper, seperti $(\mathbb{Z}, +, p\mathbb{Z})$ atau $(\mathbb{Z}_n, +, p\mathbb{Z}_n)$, memberikan pemahaman tentang simetri dan transformasi dalam struktur hiper. Studi ini relevan karena homomorfisma dapat digunakan untuk menganalisis sifat-sifat invariant dan mengklasifikasikan struktur gelanggang hyper, yang memiliki implikasi teori kode dan sistem komputasi berbasis aljabar.



Salah satu latar belakang yang melatarbelakangi penelitian ini adalah bagaimana ideal aljabar sistematis untuk membentuk gelanggang hyper multiplicative. Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi pembentukan gelanggang hyper multiplicative dengan menggunakan ideal dan mengkarakterisasi homomorfisma pada beberapa gelanggang hyper tertentu, termasuk $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}[\omega]$, dan $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Secara teoritis,

penelitian ini akan memperkaya literatur aljabar hyper dengan menyediakan teorema dan bukti baru yang menggeneralisasi konsep homomorfisma ke struktur aljabar yang lebih kompleks. Secara praktis, hasil penelitian ini dapat mendukung aplikasi dalam teori bilangan, seperti analisis sifat bilangan Eisenstein untuk kriptografi, atau dalam pengembangan algoritma berbasis struktur modulo. Dengan demikian, skripsi ini diharapkan dapat memberikan kontribusi signifikan bagi pemahaman teoretis tentang gelanggang hyper dan membuka jalan bagi penelitian lanjutan dalam aljabar hyper dan aplikasinya.

1.1.1 Rumusan Masalah

1. Bagaimana ideal I dari gelanggang $(R, +, \cdot)$ dapat digunakan untuk membentuk gelanggang hyper multiplicative $(R, +, *)$ dengan operasi hyper $a * b = a \cdot b + I$?
2. Bagaimana homomorfisma pada gelanggang hyper multiplicative seperti $(\mathbb{Z}, +p\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}_n, +, \mathbb{Z}_n)$, $(\mathbb{Z}[\omega], +, p\mathbb{Z}[\omega])$ dan $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +, p_1\mathbb{Z}_m \times p_2\mathbb{Z}_n)$ dapat dikarakterisasi, termasuk kondisi yang harus dipenuhi oleh pemetaan $f(t) = at$?

1.1.2 Tujuan Penelitian

1. Membuktikan bahwa ideal I dari gelanggang $(R, +, \cdot)$ dapat digunakan untuk membentuk gelanggang hyper multiplicative $(R, +, *)$ dengan operasi hyper $a * b = a \cdot b + I$
2. Mengkarakteristik homomorfisma pada gelanggang hyper multiplicative seperti $(\mathbb{Z}, +p\mathbb{Z})$, $(\mathbb{Z}_n, +, \mathbb{Z}_n)$, $(\mathbb{Z}[\omega], +, p\mathbb{Z}[\omega])$ dan $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +, p_1\mathbb{Z}_m \times p_2\mathbb{Z}_n)$ dengan menentukan kondisi untuk pemetaan $f(t) = at$.

1.1.3 Batasan Penelitian

Penelitian hanya membahas ideal dan homomorfisma dalam gelanggang hyper-multiplicative secara teoretis.

1.1.4 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini membantu memperluas pemahaman konsep aljabar abstrak dengan memperkenalkan struktur baru melalui ideal dan homomorfisma dalam konteks hyper multiplicative.
2. Kajian ini menjadi bahan acuan baru dalam studi gelanggang dan homomorfisma, khususnya bagi mahasiswa matematika murni atau terapan.
3. Penelitian ini menghubungkan konsep ideal dan homomorfisma dengan kemungkinan penerapannya dalam sistem informasi, komputer, atau sistem logika kompleks.



1.2 Landasan Teori

1.2.1 Gelanggang

Definisi 1.1

Suatu himpunan tak kosong R dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) ditulis $\langle R, +, \cdot \rangle$ disebut gelanggang jika dipenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup abelian (komutatif)
 - a. R tertutup terhadap penjumlahan yaitu $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$
 - b. Penjumlahan di R bersifat asosiatif yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - c. R memuat elemen identitas (e) terhadap penjumlahan yaitu $\forall a \in R$ berlaku $a + e = e + a = a$
 - d. Setiap elemen R memiliki invers penjumlahan yaitu $\forall a \in R, \exists (-a) \in R$ sedemikian hingga $a + (-a) = e$ dan $(-a) + a = e$
 - e. Penjumlahan di R bersifat komutatif yaitu $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$
2. $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup
 - a. R tertutup terhadap perkalian yaitu $\forall a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$
 - b. Perkalian di R bersifat asosiatif yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Dua hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan di R dipenuhi
 - a. Distributif kanan yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 - b. Distributif kiri, yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Selanjutnya, notasi $a \cdot b$ akan ditulis ab saja.

Catatan:

1. Elemen identitas terhadap penjumlahan disebut elemen nol dan diberi simbol dengan z atau 0 , tetapi dalam modul ini digunakan simbol e .
2. Invers penjumlahan dari $a \in R$ ditulis $-a$, dibaca lawan dari a atau negatif a .
3. Jika tidak ada keterangan tentang operasi-operasi biner $+$ dan $\cdot$ dari gelanggang, Maka $\langle R, +, \cdot \rangle$ disingkat R saja. (Apriyanti, 2024).

Contoh 1.1

Himpunan bilangan bulat, yang dinotasikan dengan Z adalah gelanggang atas operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat.



1 postulat-postulat penjumlahan dipenuhi kondisi sebagai

penjumlahan pada Z bersifat tertutup

ahan di Z bersifat asosiatif

at elemen identitas untuk penjumlahan yaitu 0

- d. Untuk setiap $x \in Z$, terdapat suatu invers penjumlahan dari x di Z dinotasikan dengan $-x$, sedemikian hingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$
 - e. Penjumlahan di Z bersifat komutatif.
2. Berdasarkan postulat-postulat perkalian dipenuhi kondisi sebagai berikut:
 - a. Operasi perkalian pada Z bersifat tertutup
 - b. Perkalian di Z bersifat asosiatif
 3. Kedua hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan di Z dipenuhi. Jadi $(Z, +, \cdot)$ adalah gelanggang (Apriyanti, 2024).

1.2.2 Gelanggang $\mathbb{Z}[\omega]$ (Bilangan Bulat Eisenstein)

Bilangan bulat Eisenstein adalah bilangan kompleks $a + b\omega$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ adalah akar kesatuan pangkat tiga sedemikian sehingga $\omega^3 = 1$ dan $\omega^2 = -\omega - 1$. Dengan notasi : $R = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

Didefinisikan operasi $+$ sebagai operasi penjumlahan dan operasi $\cdot$ sebagai operasi perkalian pada bilangan bulat Eisenstein, maka $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang (Anggreni, 2022).

Contoh 1.3

Misalkan Himpunan $R = \mathbb{Z}[\omega]$ dengan elemen seperti $0, 1, -1, \omega, -\omega, 1 + \omega, 1 - \omega, 2 + 3\omega, -5 + 2\omega, \dots$ adalah gelanggang dengan operasi :

- Penjumlahan: $z_1 = a + b\omega$ dan $z_2 = c + d\omega$, maka:

$$z_1 + z_2 = (a + b\omega) + (c + d\omega) = (a + b) + (c + d)\omega$$

Contoh:

$$(1 + \omega) + (3 - \omega) = (1 + 3) + (2 - 1)\omega = 4 + \omega$$

- Perkalian: $z_1 = a + b\omega$ dan $z_2 = c + d\omega$, digunakan sifat $\omega^2 = -\omega - 1$. Maka:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b\omega)(c + d\omega) = (ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega$$

Contoh:

$$\begin{aligned} (1 + \omega) \cdot (2 - \omega) &= 2 - \omega + 2\omega - \omega^2 \\ &= 2 + \omega - (-1 - \omega) \\ &= 2 + \omega + 1 + \omega \\ &= 3 + 2\omega \end{aligned}$$

1.2.3 Homomorfisma Gelanggang

Dalam matematika, fungsi digunakan untuk menghubungkan elemen dari satu sistem ke sistem lain serta menyederhanakan struktur suatu sistem. Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ yang mempertahankan operasi pada kedua sistem memiliki sifat penting, yaitu informasi tentang X dapat diperoleh dari analisis terhadap f , dan sebaliknya.



mpaikan definisi formal mengenai fungsi yang mempertahankan anhan dan perkalian dalam gelanggang.

B gelanggang.

fungsi $f : A \rightarrow B$ dinamakan homomorfisma gelanggang jika :

$$f(a) + f(b)$$

$$2. f(ab) = f(a)f(b)$$

untuk semua a dan b dalam A . (Adi Setiawan, 2014)

Contoh 1.2

Diketahui A gelanggang dan definisikan fungsi identitas $f : A \rightarrow A$ dengan $f(a) = 0$ untuk semua a dalam A . Fungsi f merupakan homomorfisma gelanggang karena :

$$f(a+b) = 0 = 0+0 = f(a) + f(b) \text{ dan } f(ab) = 0 = 0 \cdot 0 = f(a)f(b)$$

1.2.4 Gelanggang Hyper Multiplicative

Definisi 1.3

Sebuah struktur $(R, +, \cdot)$ disebut sebagai *Gelanggang Hyper Multiplicative* jika:

1. $(R, +)$ adalah grup abelian;
2. $(R, \cdot)$ adalah semihypergrup;
3. Untuk semua $a, b, c \in R$, berlaku:
 $(b+c) \subseteq a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b+c) \cdot a \subseteq b \cdot a + c \cdot a$;
4. Untuk semua $a, b \in R$, berlaku: $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Catatan:

- Jika pada poin (iii) inklusi tersebut merupakan kesetaraan (yaitu, tanda " $\subseteq$ " diganti menjadi tanda " $=$ ") maka gelanggang hyper multiplicative tersebut disebut **distributif kuat** (*strongly distributive*).
- Suatu elemen $e \in R$ disebut **identitas lemah** (*weak identity*) dari R , jika untuk semua $a \in R$ berlaku:

$$a \in a \cdot e \cap e \cdot a$$

Contoh 1.3

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu gelanggang tak nol. Untuk semua $a, b \in R$, didefinisikan suatu hiperoperasi $*$: $a * b = \{a \cdot b, 2a \cdot b, 3a \cdot b, \dots\}$. Dengan kata lain, hasil dari hiperoperasi adalah himpunan dari semua bentuk $na \cdot b$ untuk $n \in \mathbb{N}$ (bilangan asli). Maka, $(R, +, *)$ merupakan suatu gelanggang hyper multiplicative. Perhatikan bahwa untuk semua $a \in R$, berlaku: $a * 0 = 0 * a = \{0\}$. (Davvaz dan Fotea, 2007)

Penyelesaian:

- $(R, +, \cdot)$ Merupakan gelanggang tak nol, maka $(R, +)$ adalah grup abelian dan $(R, \cdot)$ adalah semigroup dengan sifat distribusi
- Hiperoperasi di definisikan $a * b = \{na \cdot b | n \in \mathbb{N}\}$ untuk semua $a, b \in R$, dimana $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Khususnya, $a * 0 = \{n \cdot 0 | n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ dan $0 * a = \{0\}$, karena $a \cdot 0 = 0$ di



syarat gelanggang hyper multiplicative:

ipakan grup abelian

i: Karena $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang tak nol, maka $(R, +)$ sudah i grup abelian. Ini berarti operasi $+$ memenuhi sifat-sifat berikut:

ip: Untuk semua $a, b \in R$, $a + b \in R$

tif: Untuk semua $a, b, c \in R$, $(a + b) + c = a + (b + c)$

- Elemen Identitas: Terdapat elemen $0 \in R$ sehingga $a + 0 = a$ untuk semua $a \in R$.
- Invers : Untuk setiap, $a \in R$, terdapat $-a \in R$ sehingga $a + (-a) = 0$
- Komutatif: Untuk semua, $a, b \in R$, $a + b = b + a$

Jadi, $(R, +)$ merupakan grup abelian

2) $(R, *)$ adalah semihypergrup

Definisi semihypergrup: $(R, *)$ adalah semihypergrup jika operasi hyper $*$ bersifat asosiatif, Untuk semua $a, b, c \in R$, $(a * b) * c = a * (b * c)$ yaitu di mana hasil operasi $*$ adalah himpunan, dan kesamaan di sini berarti kesamaan himpunan.

Bukti Asosiatif:

- Langkah 1: Hitung $(a * b) * c$
Dari definisi $a * b = \{na \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\}$. Maka,

$$(a * b) * c = \bigcup_{x \in a * b} x * c = \bigcup_{x = na \cdot b, n \in \mathbb{N}} (na \cdot b) * c$$

Untuk setiap $x = na \cdot b$ di hitung:

$$(na \cdot b) * c = \{m(na \cdot b) \cdot c \mid m \in \mathbb{N}\} = \{mn(a \cdot b \cdot c) \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Karena, $m, n \in \mathbb{N}$ maka $mn \in \mathbb{N}$ (karena bilangan asli tertutup terhadap perkalian). Jadi,

$$(a * b) * c = \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} \{mn(a \cdot b \cdot c)\} = \{k(a \cdot b \cdot c) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

karena $k \in \mathbb{N}$ setiap dapat ditulis sebagai $k = mn$ untuk beberapa $m, n \in \mathbb{N}$ (misalnya, $k = k \cdot 1$).

- Langkah 2: Hitung $a * (b * c)$
Sama seperti sebelumnya, $b * c = \{nb \cdot c \mid n \in \mathbb{N}\}$ Maka,

$$a * (b * c) = \bigcup_{y \in b * c} a * y = \bigcup_{y = nb \cdot c, n \in \mathbb{N}} a * (nb \cdot c).$$

Untuk setiap $y = nb \cdot c$ di hitung:

$$a * (nb \cdot c) = \{ma \cdot (nb \cdot c) \mid m \in \mathbb{N}\} = \{mn(a \cdot b \cdot c) \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Karena $(R, \cdot)$ asosiatif (dari sifat gelanggang), $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Jadi,

$$a * (b * c) = \{k(a \cdot b \cdot c) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

- Kesimpulan: Karena $(a * b) * c = \{k(a \cdot b \cdot c) \mid k \in \mathbb{N}\} = a * (b * c)$ operasi $*$ bersifat asosiatif, sehingga $(R, *)$ adalah semihypergrup.

3) Sifat Distributif

Syarat: Untuk semua $a, b, c \in R$, berlaku:

- $(a * b) + c \subseteq a * b + a * c$,
- $(b + c) * a \subseteq b * a + c * a$.



butif kiri $(a * b) + c \subseteq a * b + a * c$:

tung $(a * b) + c$:

$$* b) + c = \{na \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\} = \{n(a \cdot b + a \cdot c) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

rena $(R, \cdot)$ distributif terhadap $+$ pada gelanggang asli.

tung $a * b + a * c$:

$$* b = \{na \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad a * c = \{ma \cdot c \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

aka, penjumlahan himpunan:

$$a * b + a * c = \{na \cdot b + ma \cdot c \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

- Verifikasi inklusi: Setiap elemen di $(a * b) + c$, yaitu $n(a \cdot b + a \cdot c)$, dapat di tulis sebagai:

$$n(a \cdot b + a \cdot c) = n(a \cdot b) + n(a \cdot c),$$
yang merupakan elemen dari $a * b + a * c$, karena $na \cdot b \in a * b$ dan $na \cdot c \in a * c$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Jadi, $(a * b) + c \subseteq a * b + a * c$.

Bukti distributif kanan $(b + c) * a \subseteq b * a + c * a$:

- Hitung $(b + c) * a$:

$$(b + c) * a = \{n(b + c) \cdot a \mid n \in \mathbb{N}\} = \{n(b \cdot c + c \cdot a) \mid n \in \mathbb{N}\},$$
- Hitung $b * a + c * a$:

$$b * a = \{nb \cdot a \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad c * a = \{mc \cdot a \mid m \in \mathbb{N}\}$$
Maka,

$$b * a + c * a = \{nb \cdot a + mc \cdot a \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$
- Verifikasi inklusi: Setiap elemen di $(b + c) * a$, yaitu $n(b \cdot c + c \cdot a)$, dapat di tulis sebagai:

$$n(b \cdot c + c \cdot a) = n(b \cdot c) + n(c \cdot a),$$
yang merupakan elemen dari $b * a + c * a$ karena $nb \cdot c \in b * a$ dan $nc \cdot a \in c * a$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Jadi, $(b + c) * a \subseteq b * a + c * a$.

Kesimpulan: Syarat 3 terpenuhi

4) Sifat Negasi

Akan dibuktikan bahwa untuk semua $a, b \in R$,

$$a * (-b) = (-a) * b = -(a * b)$$

- Hitung $a * (-b)$:

$$a * (-b) = \{na \cdot (-b) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
Karena $(R, \cdot)$ adalah gelanggang:

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b).$$
Jadi,

$$a * (-b) = \{n(-(a \cdot b)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-(na \cdot b) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
- Hitung $(-a) * b$:

$$(-a) * b = \{n(-a) \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\}$$
Karena $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
Maka, $(-a) * b = \{n(-(a \cdot b)) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-(na \cdot b) \mid n \in \mathbb{N}\}.$
- Hitung $-(a * b)$:

$$a * b = \{na \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Dalam grup abelian $(R, +)$ negasi himpunan $A \subseteq R$ didefinisikan sebagai: $-A = \{-x \mid x \in A\}$.
Jadi, $-(a * b) = \{-(na \cdot b) \mid n \in \mathbb{N}\}.$
- Kesimpulan:

$$a * (-b) = \{-(na \cdot b) \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad (-a) * b = \{-(na \cdot b) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$-(a * b) = \{-(na \cdot b) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
di, $a * (-b) = (-a) * b = -(a * b)$
arat negasi terpenuhi



Kesimpulan: karena semua syarat gelanggang hyper multiplicative terpenuhi maka $(R, +, *)$ adalah gelanggang hyper multiplicative. (Davvaz dan Fotea, 2007)

1.2.5 Homomorfisma Gelanggang Hyper Multiplicative

Definisi 1.4

Misalkan $(R, +, *)$ dan $(R', +', *')$ adalah dua gelanggang hyper multiplicative. Sebuah pemetaan $f: R \rightarrow R'$ disebut **homomorfisma** jika untuk setiap x, y di R berlaku:

1. $f(x + y) = f(x) +' f(y)$
2. $f(x * y) \subseteq f(x) *' f(y)$. Jika berlaku kesamaan $f(x * y) = f(x) *' f(y)$, maka f disebut **homomorfisma baik** (*good homomorphism*). (Davvaz dan Fotea, 2007)

Contoh 1.4

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang tak-nol(misalnya, gelanggang bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$).Definisikan hyperoperasi $*$ pada R seperti pada contoh 1.3: untuk $a, b \in R$, $a * b = \{a \cdot b, 2a \cdot b, 3a \cdot b, \dots\} = \{na \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\}$. Maka $(R, +, *)$ adalah gelanggang hyper nmultiplicative (seperti pada contoh 1.3).Sekarang, ambil gelanggang kedua $(R', +', \cdot') = (R, +, \cdot)$ (yaitu, gelanggang yang sama) dan di definisikan hyperoperasi $'$ pada R' dengan cara yang sama : , $a *' b = \{na \cdot b \mid n \in \mathbb{N}\}$. Jadi $(R', +', *') = (R, +, *)$ adalah gelanggang hyper nmultiplicative yang identik dengan $(R, +, *)$.

Penyelesaian:

Didefinisikan pemetaan identitas $f: R \rightarrow R'$ dengan $f(x) = x$ untuk setiap $x \in R$. Diperiksa sifat homomorfisma:

1. Sifat Penjumlahan:

$$f(x + y) = x + y = f(x) + f(y)$$

Karena $+' = +$, sifat ini terpenuhi

2. Sifat hyper multiplicative:

$$f(x * y) = f\{nx \cdot y \mid n \in \mathbb{N}\} = \{nx \cdot y \mid n \in \mathbb{N}\},$$

dan

$$f(x) *' f(y) = x *' y = \{nx \cdot y \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Karena $f(x * y) = \{nx \cdot y \mid n \in \mathbb{N}\} = f(x) *' f(y)$, maka sifat ini terpenuhi dengan kesamaan, sehingga f adalah homomorfisma baik.

Jadi, pemetaan identitas $f(x) = x$ adalah homomorfisma baik dari $(R, +, *)$ ke $(R, +, *')$



BAB II METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka (library research) dan analisis deskriptif, yaitu metode yang berfokus pada penelaahan berbagai sumber tertulis seperti buku, jurnal ilmiah, artikel online, dan literatur lain yang relevan. Metode ini bertujuan untuk menggali, menganalisis, dan mengembangkan konsep-konsep matematika yang berkaitan dengan struktur gelanggang, ideal, serta homomorfisma, khususnya dalam konteks pembentukan gelanggang hyper multiplicative.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan Februari 2025 hingga Juli 2025, bertempat di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, yang berlokasi di Kota Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan.

2.3 Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Pengumpulan Literatur dan Referensi Terkait
Penelitian diawali dengan pengumpulan berbagai literatur yang relevan, meliputi buku teks matematika abstrak, jurnal penelitian terkini, artikel ilmiah, serta dokumen akademik lain yang membahas tentang teori gelanggang, ideal, serta homomorfisma.
2. Analisis Konsep dan Teori
Dalam tahap ini, dilakukan kajian mendalam terhadap konsep ideal dalam gelanggang, struktur dasar gelanggang multiplicative, serta teori homomorfisma. Fokus utama adalah memahami keterkaitan antar konsep serta potensi perluasan terhadap gelanggang hyper multiplicative.
3. Pengembangan dan Konstruksi Teori
Berdasarkan hasil kajian literatur, peneliti mengembangkan konsep gelanggang hyper multiplicative dengan memanfaatkan sifat-sifat ideal dan melakukan eksplorasi terhadap struktur homomorfisma yang mungkin berlaku dalam sistem tersebut. Metode penalaran deduktif dan induktif digunakan dalam tahap ini.
4. Verifikasi dan Validasi Konstruksi Teori

Seluruh hasil pengembangan teori dan struktur diuji secara matematis dengan pembuktian formal untuk memastikan konsistensi dan kesesuaian temuan terhadap struktur yang dikembangkan.

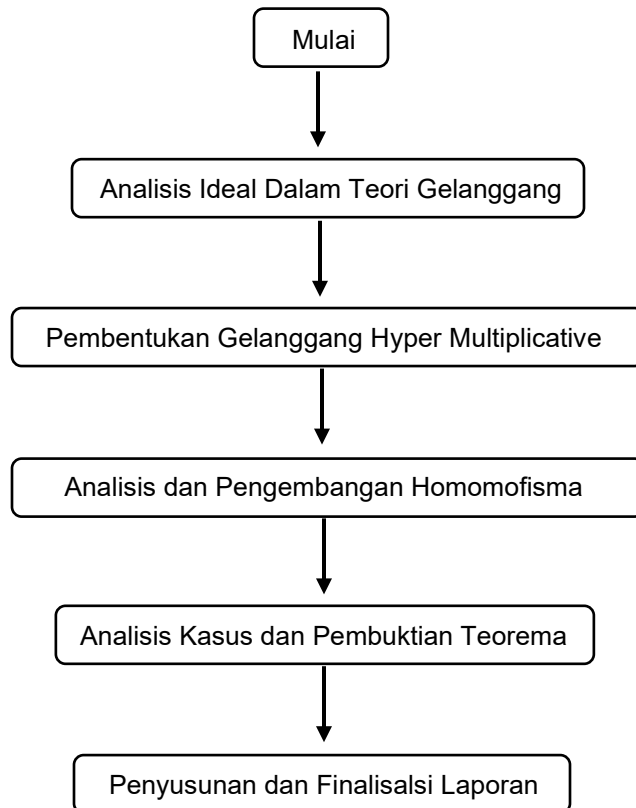
Revisi dan Penyempurnaan Akhir

Hasil penelitian kemudian dirangkum, disusun disempurnakan dalam bentuk laporan penelitian menggunakan perangkat lunak Microsoft Word, serta dilakukan pemeriksaan dari aspek penyajian maupun sistematika penulisan.

Proses penelitian ini dapat digambarkan melalui diagram alir



penelitian sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Alir penelitian.

