

BILANGAN KROMATIK HARMONIS PADA GRAF HELM H_n

ANDI MIFTAHUL KHAER AGUS

H011211001

SKRIPSI

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana

Program Studi Matematika

Pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2025



SKRIPSI
BILANGAN KROMATIK HARMONIS PADA GRAF HELM H_n

ANDI MIFTAHUL KHAER AGUS

H011211001

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Matematika pada
tanggal 07 Agustus 2025 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar



akhir,



Optimized using
trial version
www.balesio.com

Si., M.Si
NIP. 197008072000031002

Mengetahui:
Ketua Program Studi,



Dr. Firman, S.Si., M.Si
NIP. 196804292002121001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Bilangan Kromatik Harmonis pada Graf Helm H_n " adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si. Karya ilmiah ini belum diajukan dan sedang tidak diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 07 Agustus 2025



ANDI MIFTAHUL KHAER AGUS
NIM H011211001



UCAPAN TERIMA KASIH

Bismillahirrahmanirrahim

Puji dan Syukur kehadiran Allah SWT. Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat rahmat, hidayah, kemudahan, dan segala limpahan nikmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "**Bilangan Kromatik Harmonis pada Graf Helm H_n** " sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi seluruh umatnya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak mungkin terselesaikan tanpa adanya dukungan, bantuan, arahan, serta bimbingan dari berbagai pihak selama penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. ENG. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing penulis yang dengan sabar, tulus, banyak memberikan ilmu yang bermanfaat, meluangkan waktu untuk membimbing, memberi masukan, serta arahan dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** dan Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.**, selaku tim penguji, terima kasih atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan masukan dan kritikan yang membangun terhadap penyempurnaan penulisan skripsi ini.
5. Bapak dan ibu Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan, serta bapak dan ibu staf Departemen Matematika yang telah membantu penulis dalam berbagai hal administrasi.
6. Cinta pertama penulis, Bapak **Andi Agussalim (Alm)**. Terima kasih telah menjadi ayah yang terbaik untuk penulis. Meski tak sempat menemani perjalanan ini secara langsung, namun semangatmu selalu menjadi cahaya dalam setiap perjuangan penulis.



ulis, Ibu **Mulyana**, perempuan hebat yang menjalankan dua sekaligus bagi anak-anaknya. Terima kasih untuk kasih sayang, tulus, dan selalu berjuang supaya penulis bisa tumbuh dewasa da pada posisi saat ini.

keluarga, yang penulis tidak dapat sebut satu persatu. Terima dan dukungan secara moril maupun materil sehingga penulis saikan studi sampai sarjana.

9. Teman-teman seperjuangan, **Yetti Yuliarti, A. Munawwarah, Putri Dwi Kurnia,** dan **Iyan Fryan** yang telah memberikan bantuan serta mewarnai dunia perkuliahan penulis.
10. Teman SMA penulis, **Salsabila**, partner bertumbuh disegala kondisi, memberikan dukungan serta motivasi hingga penulis menyelesaikan masa studi sarjana.
11. Teman-teman **Matematika 2021**, yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan moril selama masa perkuliahan penulis.
12. Teman-teman **KKNT 112 Pulau Harapan** yang telah memberikan warna baru dalam masa perkuliahan penulis.
13. Kepada seseorang yang penulis tidak bisa sebutkan namanya, terima kasih telah menjadi bagian dari perjalanan hidup penulis. Berkontribusi besar dalam penyelesaian tugas akhir ini, baik dari segi waktu maupun materi, serta senantiasa mendukung penulis.
14. *Last but not least*, terima kasih untuk diri sendiri **Andi Miftahul Khaer Agus**. Apresiasi sebesar-besarnya karena telah bertanggung jawab untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai, terus berusaha dan tidak menyerah serta senantiasa menikmati setiap prosesnya yang bisa dibilang tidak mudah. Terima kasih sudah bertahan.

Terima kasih kepada semua pihak-pihak yang sudah memberi bantuannya. Semoga Allah SWT. membalas segala kebaikan yang telah diberikan. Semoga skripsi ini dapat menambahkan wawasan dan bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Penulis,

Andi Miftahul Khaer Agus



ABSTRAK

ANDI MIFTAHUL KHAER AGUS. **Bilangan Kromatik Harmonis pada Graf Helm H_n** (dibimbing oleh Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si)

Latar Belakang. Pewarnaan harmonis adalah pengembangan dari pewarnaan titik yang memiliki syarat agar titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda sedemikian sehingga warna dari satu pasang titik yang bertetangga tersebut muncul paling banyak satu kali. Bilangan kromatik harmonis yang dinotasikan $\chi_h(G)$ adalah jumlah minimum warna yang dapat digunakan untuk memberikan warna pada semua titik di graf G . **Tujuan** dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik harmonis pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$. **Metode** yang digunakan adalah melakukan kajian pustaka yang lebih mengacu pada materi untuk menganalisis objek penelitian dan mempelajari hasil penelitian pada literatur-literatur yang ada seperti, jurnal, buku maupun skripsi sebagai tambahan informasi untuk penelitian ini. **Hasil** yang diperoleh dari bilangan kromatik harmonis pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$ yaitu:

$$\chi_h(H_n) = \begin{cases} n + 2, & 3 \leq n \leq 4 \\ n + 1, & n \geq 5 \end{cases}$$

Kata Kunci: Pewarnaan Harmonis, Bilangan Kromatik Harmonis, Graf Helm



ABSTRACT

ANDI MIFTAHUL KHAER AGUS. **Harmonic Chromatic Number In Helm Graph H_n**
(supervised by Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si)

Background. Harmonic coloring is a development of vertex coloring which requires that adjacent vertices have different colors such that the colors of one pairs of adjacent vertices appear at most once. The harmonic chromatic number denoted $\chi_h(G)$ is the minimum number of colors that can be used to assign colors to all vertices of graph G . **Objective.** This study is to determine the harmonic chromatic number of the helm graph H_n with $n \geq 3$. The method used is to conduct a literature review that refers more to the material to analyze the research object and study the research results in existing literature such as journals, book and theses as additional information for this study. **Results.** obtained from the harmonic chromatic number of the helm graph H_n with $n \geq 3$ are:

$$\chi_h(H_n) = \begin{cases} n + 2, & 3 \leq n \leq 4 \\ n + 1, & n \geq 5 \end{cases}$$

Kata Kunci: Harmonious Coloring, Harmonic chromatic number, Helm graph



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
PERNYATAAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI.....	iv
UCAPAN TERIMA KASIH.....	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMBANG	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penelitian.....	2
1.5 Manfaat Penelitian.....	2
1.6 Landasan Teori	2
1.6.1 Konsep Dasar Graf	2
1.6.2 Jenis-Jenis Graf.....	5
1.6.3 Pewarnaan Graf	7
1.6.4 Bilangan Kromatik Harmonis	8
BAB II METODOLOGI PENELITIAN	11
2.1. Jenis Penelitian	11
2.2. Tempat dan Waktu Penelitian.....	11
2.3. Tahapan Penelitian.....	11
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN.....	13
3.1 Bilangan Kromatik Harmonis pada Graf Helm H_n	13
3.2 Teorema dan Bukti Bilangan Kromatik Harmonis pada Graf Helm H_n	17
	21
.....	21
.....	21
.....	22

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.6.1.1 Graf G	3
Gambar 1.6.1.2 Graf H	3
Gambar 1.6.1.3 (a) Graf Terhubung (b) Graf Tak Terhubung	4
Gambar 1.6.1.4 (a) Graf G (b) Graf H (subgraf dari graf G)	5
Gambar 1.6.2.1 Graf Kosong N_4	5
Gambar 1.6.2.2 Graf Lintasan P_2 dan P_3	6
Gambar 1.6.2.3 Graf Siklus C_3 dan C_4	6
Gambar 1.6.2.4 Graf Lengkap K_4 dan K_5	6
Gambar 1.6.2.5 Graf Roda W_3 dan W_4	7
Gambar 1.6.2.6 Graf Helm H_3	7
Gambar 1.6.3.1 Pewarnaan titik pada graf G	8
Gambar 1.6.4.1 (a) Graf G dengan 5 warna, (b) Graf G dengan 4 warna, dan (c) Graf G dengan 6 warna.	9
Gambar 3.1.1 Graf Helm H_3	13
Gambar 3.1.2 Graf Helm H_4	14
Gambar 3.1.3 Graf Helm H_5	14
Gambar 3.1.4 Graf Helm H_6	15
Gambar 3.1.5 Graf Helm H_7	16
Gambar 3.1.6 Graf Helm H_8	17



DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan
$V(G)$	Himpunan titik graf G
$E(G)$	Himpunan sisi graf G
u, v	Titik u dan titik v
$ V(G) $	Banyaknya titik pada graf G
$ E(G) $	Banyaknya sisi pada graf G
$\Delta(G)$	Derajat titik maksimum pada graf G
$\delta(G)$	Derajat titik minimum pada graf G
P_n	Graf lintasan
C_n	Graf siklus
W_n	Graf roda
H_n	Graf Helm
$\chi(G)$	Bilangan kromatik pada graf G
$\chi_h(G)$	Bilangan kromatik harmonis pada graf G



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang cukup penting, karena mempunyai segi terapan yang sangat banyak pada bidang keilmuan. Beberapa permasalahan dunia nyata dapat ditransformasikan ke dalam graf dengan menggambarkan sejumlah titik dan garis. Makalah yang berisikan teori graf pertama kali diterbitkan pada tahun 1736 oleh Leonard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Dalam makalah tersebut membahas masalah jembatan Königsberg (*Kota Königsberg, sebelah timur Prussia, Jerman sekarang*) yang dimodelkan ke dalam graf. Daratan dinyatakan sebagai titik yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*) (Ma'Rifatus & Rahadjeng, 2014).

Salah satu topik yang dibahas dalam teori graf adalah pewarnaan. Pewarnaan graf sendiri terdiri dari 3 macam jenis, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*) dan pewarnaan bidang/wilayah (*region coloring*). Pewarnaan titik (*vertex coloring*) adalah memberi warna pada titik-titik suatu graf sehingga tidak ada dua titik bertetangga mempunyai warna yang sama. Pewarnaan sisi (*edge coloring*) adalah memberi warna berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga tidak ada dua sisi bertetangga yang memiliki warna yang sama. Sedangkan pewarnaan bidang/wilayah (*region coloring*) adalah memberi warna pada bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Pada penelitian ini menggunakan konsep dari pewarnaan titik yang menjadi dasar pewarnaan harmonis (Munir, 2010).

Menurut **Kavitha dan Govindarajan** konsep pewarnaan harmonis dan bilangan kromatik harmonis pada sebuah graf G diperkenalkan oleh Harary dan Plantholt pada tahun 1982. Pewarnaan harmonis merupakan pengembangan dari pewarnaan titik yang memiliki syarat agar titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda sedemikian sehingga warna dari satu pasang titik yang bertetangga tersebut muncul paling banyak satu kali. Pada penelitian ini, masalah yang dikaji terkait pewarnaan harmonis adalah mencari minimum banyaknya warna dalam pewarnaan harmonis. Minimum banyaknya warna ini disebut dengan bilangan kromatik harmonis dan dinotasikan dengan $\chi_h(G)$ (Kavitha & Govindarajan, 2012).

Beberapa penentuan bilangan kromatik harmonis pada graf telah dibahas sebelumnya. Sebagai contoh, (Jannah et al., 2023) membahas pewarnaan harmonis pada beberapa kelas graf berarah. (Robiandi et al., 2021) pada penelitiannya membahas pewarnaan harmonis pada graf lili yaitu $2n + 3$ untuk $n \geq 2$ dan pada $2n + 1$ untuk $n = 2$. Pada penelitian (Ma'Rifatus & Rahadjeng, 2014) membahas pewarnaan harmonis graf garis dari graf bintang ganda dengan graf middle dan graf central dari keluarga graf bintang ganda $3n + 1$.

Berdasarkan tinjauan literatur yang telah dilakukan, belum ada penelitian mengenai penentuan bilangan kromatik harmonis pada graf helm. Graf



helm adalah graf yang dibentuk dari graf roda W_n dengan menambahkan n vertex (*titik*) dengan derajat satu yang terhubung langsung ke setiap titiknya (Hasmawati, 2020).

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik harmonis pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini penulis hanya membahas tentang bilangan kromatik harmonis pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik harmonis pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$.

1.5 Manfaat Penelitian

Untuk mengetahui bilangan kromatik harmonis pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$ serta dapat digunakan sebagai rujukan untuk peneliti lain yang akan mengkaji permasalahan atau topik yang sama lebih dalam lagi.

1.6 Landasan Teori

Berdasarkan masalah yang diangkat, maka diperlukan suatu kajian teoritis yang dapat mendukung proses analisis dan pembahasan dalam menentukan bilangan kromatik harmonis pada graf helm H_n dengan $n \geq 3$.

1.6.1 Konsep Dasar Graf

Definisi 1.6.1.1 Graf adalah pasangan himpunan $V(E)$, dimana V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, sedangkan E adalah pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi (Hasmawati, 2020).

Berdasarkan definisi 1.6.1.1, himpunan V disebut himpunan titik (*vertex set*), dan E disebut himpunan sisi (*edge set*). Kadang-kadang ada yang menyebut titik sebagai noktah (*point*) dan sisi sebagai busur, rusuk atau garis (*line*). Secara matematika, Definisi 1.6.1.1 dapat ditulis: **Graf** $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u: u \text{ disebut titik}\}$ dan $E(G) = \{(u, v); u, v \in V(G)\}$ dengan (u, v) disebut sisi. Penulisan sisi $(u, v \in E(G))$ dapat juga ditulis uv .

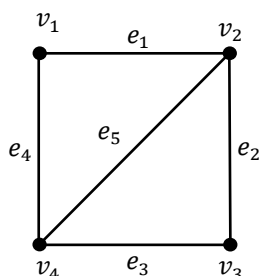
Definisi ini mengisyaratkan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ bisa saja kosong. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sebuah graf dapat saja tidak

ada, atau hanya satu titik saja. Jika ada satu titik saja, maka graf tersebut disebut graf trivial. Titik pada graf diberi label dengan huruf, seperti $a, b, c, d, \dots, u, v, \dots$, dan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, atau bilangan asli. Sedangkan sisi dapat dilabeli dengan e , jika e menghubungkan titik u dan v , maka e dapat dinyatakan sebagai $e =$



(u, v) (Munir, 2010). Banyaknya anggota himpunan dari $V(G)$ disebut orde (*order*) dari G dan banyaknya anggota himpunan dari $E(G)$ disebut ukuran (*size*) dari G .

Contoh 1.6.1.1 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, yang dimana $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_4v_1, e_5 = v_2v_4$. Sehingga orde dari graf G adalah 4. Sedangkan ukuran dari graf G adalah 5. Maka bentuk graf G dapat dilihat pada Gambar 1.6.1.1.



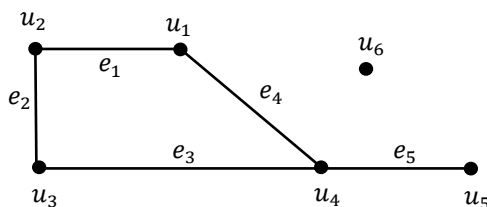
Gambar 1.6.1.1 Graf G

Definisi 1.6.1.2 Misalkan G adalah suatu graf dan $u, v \in V(G)$. Jika sisi $e = uv$ merupakan suatu sisi di graf G , maka titik u dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan titik v . Sedangkan sisi e dikatakan **bersisian** (*incident*) dengan titik u dan titik v (Chartrand & Lesniak, 2000).

Definisi 1.6.1.3 Titik terisolasi adalah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, atau dapat juga dinyatakan bahwa titik terisolasi adalah titik yang tidak satupun bertetangga dengan titik-titik lainnya (Munir, 2010).

Definisi 1.6.1.4 Derajat suatu titik pada graf adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Notasi $der(v)$ menyatakan derajat titik v . Derajat maksimum dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ (Munir, 2010).

Contoh 1.6.1.2 Diberikan graf H dengan himpunan titik $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, dengan $e_1 = u_1u_2, e_2 = u_2u_3, e_3 = u_3u_4, e_4 = u_4u_1, e_5 = u_4u_5$, maka bentuk graf H dapat dilihat pada Gambar 1.6.1.2.



Gambar 1.6.1.2 Graf H



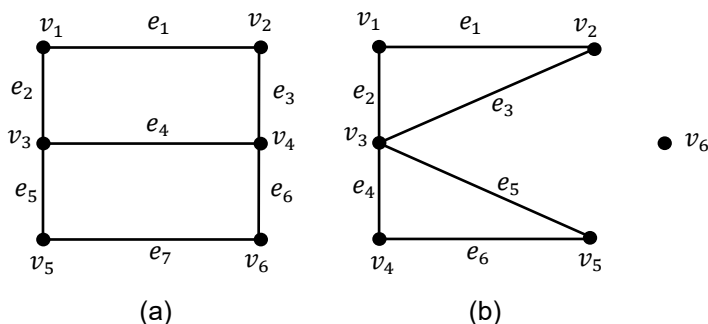
Berdasarkan graf H diperoleh:

- Titik u_1 bertetangga dengan titik u_2 dan u_4 , tetapi titik u_1 tidak bertetangga dengan titik u_3, u_5 dan u_6 .
- Sisi e_1 bersisian dengan titik u_1 dan u_2 , tetapi sisi e_1 tidak bersisian dengan titik u_3, u_4, u_5 dan u_6 .
- Titik u_6 merupakan titik terisolasi.
- Derajat dari setiap titik pada graf H adalah $der(u_1) = 2, der(u_2) = 2, der(u_3) = 2, der(u_4) = 3, der(u_5) = 1$ dan $der(u_6) = 0$. Sehingga $\Delta(H) = 3$ dan $\delta(H) = 0$.

Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika terdapat suatu lintasan $u - v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$ (jika tidak demikian, graf G dikatakan tak terhubung (*disconnected*)) (West, 2002).

Definisi 1.6.1.5 graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik u dan v didalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v . Jika tidak, maka graf G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*) (Munir, 2010).

Contoh 1.6.1.3



Gambar 1.6.1.3 (a) Graf Terhubung (b) Graf Tak Terhubung

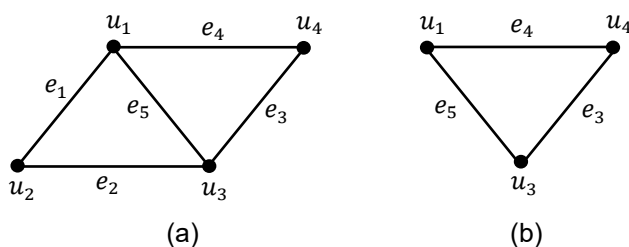
Berdasarkan Gambar 1.6.1.3 (a) graf tersebut dikatakan graf terhubung karena terlihat bahwa untuk setiap dua titik graf tersebut, terdapat lintasan yang memuat kedua titik tersebut. Sedangkan graf pada gambar 1.6.1.3 (b) dikatakan graf tak terhubung karena tidak terdapat lintasan dari titik v_2 ke titik v_6 , dan juga tidak titik v_5 ke titik v_6 .



H dikatakan subgraf dari graf G dinotasikan dengan $H \subseteq G$ jika $\equiv V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Asmiati, 2016).

salkan graf G dengan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(G) =$ salkan pula graf H dengan $V(H) = \{u_1, u_4, u_5\}$ dan $E(H) =$

$\{e_3, e_4, e_5\}$. Karena $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka H merupakan subgraf dari G .



Gambar 1.6.1.4 (a) Graf G (b) Graf H (subgraf dari graf G)

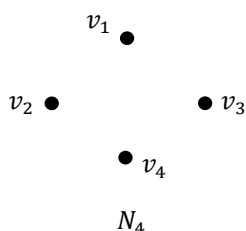
Gambar 1.6.1.4, Graf H merupakan subgraf dari graf G . Karena $V(H) = \{u_1, u_3, u_4\} \subseteq \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = V(G)$ dan $E(H) = \{e_3, e_4, e_5\} \subseteq \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = E(G)$.

1.6.2 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini akan dibahas beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penulisan skripsi ini, diantaranya graf kosong, graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf roda, dan graf helm.

Definisi 1.6.2.1 Graf kosong dinotasikan N_n adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (Gani, 2018).

Contoh 1.6.2.1



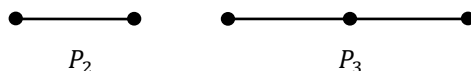
Gambar 1.6.2.1 Graf Kosong N_4

Berdasarkan Gambar 1.6.2.1, terdapat graf kosong N_4 , yaitu graf yang terdiri atas 4 titik v_1, v_2, v_3, v_4 tanpa adanya sisi yang menghubungkan antar titik tersebut.

Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi v_{n-1}, e_{n-1}, v_n dengan $e_i = v_i v_{i+1}$, dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Iri dari satu lintasan disebut graf lintasan dan dituliskan dengan orde n (Hasmawati, 2020).



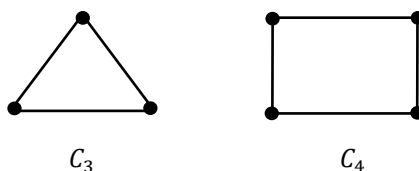
Lintasan adalah graf yang terdiri atas satu lintasan. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.6.2.2**Gambar 1.6.2.2** Graf Lintasan P_2 dan P_3

Berdasarkan Gambar 1.6.2.2, terdapat graf lintasan P_2 yang dimana memiliki 2 titik dan 1 sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Begitupula pada graf lintasan P_3 yang memiliki 3 titik dan 2 sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut secara berurutan.

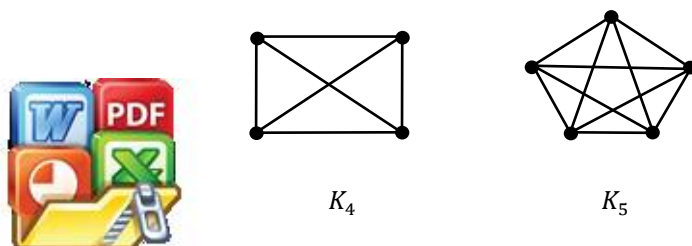
Siklus pada suatu graf adalah struktur khusus dari graf yang memuat n titik dimana $n \geq 3$, yaitu $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ dan $\{v_n, v_1\}$.

Definisi 1.6.2.3 Graf siklus adalah graf sederhana yang terdiri atas satu siklus. Graf siklus yang berorde n , dinotasikan dengan C_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.6.2.3**Gambar 1.6.2.3** Graf Siklus C_3 dan C_4

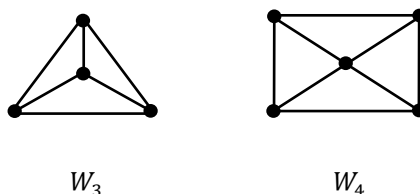
Pada Gambar 1.6.2.3, graf siklus C_3 memiliki 3 titik dan 3 sisi. Setiap titiknya terhubung dengan dua titik lainnya, sehingga membentuk segitiga tertutup. Pada graf siklus C_4 memiliki 4 titik dan 4 sisi, sehingga membentuk persegi atau segiempat tertutup.

Definisi 1.6.2.4 Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan K_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.6.2.4**Gambar 1.6.2.4** Graf Lengkap K_4 dan K_5 .

Definisi 1.6.2.5 Graf roda adalah graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik x sedemikian sehingga titik x bertetangga dengan semua titik pada graf siklus. Graf roda berorde $n + 1$ dinotasikan dengan W_n (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.6.2.5

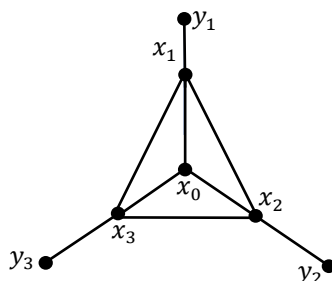


Gambar 1.6.2.5 Graf Roda W_3 dan W_4

Graf Helm merupakan graf hasil pengembangan dari graf roda. Graf helm didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari graf roda W_n dengan menambahkan sisi pendent ke setiap titik pada siklus C_n di W_n . Graf helm yang diperoleh dari graf roda W_n dinotasikan dengan H_n . Sisi pendent merupakan sisi yang terkait dengan titik yang berderajat satu (Hasmawati, 2020).

Definisi 1.6.2.6 Graf helm H_n adalah graf yang dikonstruksi dari graf roda W_n dengan menambahkan n titik yaitu $y_1, y_2, \dots, y_n$ sedemikian sehingga $x_i y_i$ suatu sisi untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

Contoh 1.6.2.6



Gambar 1.6.2.6 Graf Helm H_3



raf

raf adalah pemberian warna pada elemen-elemen graf. Ada dua elemen bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Ada tiga macam, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan sisi. Sehubungan dengan topik yang dibahas, penulis akan fokus pada pewarnaan titik.

Definisi 1.6.3.1 Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf.

Bilangan kromatik dari graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$, adalah

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\} \text{ dengan } c(x) \neq c(y) \forall (x, y) \in E(G)\}.$$

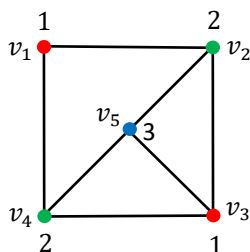
Simbol:

$c(x) = i$: Titik x diberi warna i ,

$(c(x), c(y)) = (i, j)$: Pasangan warna yang dimana warna i pada titik x dan warna j pada titik y

Pada beberapa graf, bilangan kromatiknya dapat langsung ditemukan seperti pada graf kosong yang memiliki bilangan kromatik 1 karena semua titik tidak bertetangga dengan titik lainnya dan graf lengkap dengan n buah titik memiliki bilangan kromatik sebanyak n karena semua titik bertetangga satu sama lain (Apriyanto, 2018).

Contoh 1.6.3.1 Diberikan contoh pewarnaan titik pada graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 1.6.3.1 Pewarnaan titik pada graf G

Dapat dilihat pada Gambar 1.6.3.1 bahwa graf G dapat diwarnai dengan menggunakan tiga warna sedemikian sehingga untuk setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pada graf G terdapat siklus berorde 3 yang tidak mungkin hanya menggunakan dua warna saja, sehingga ketiga titik tersebut harus memiliki warna yang berbeda, dengan demikian warna minimum yang digunakan adalah tiga. Sehingga $\chi(G) = 3$.



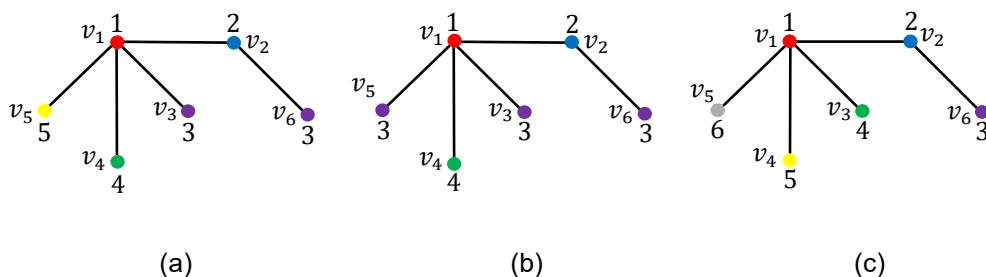
natik Harmonis

atik harmonis dinotasikan dengan $\chi_h(G)$ merupakan salah satu yang berfungsi untuk menentukan minimum warna yang varnai sebuah graf.

Definisi 1.6.4.1 Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$.

- (i) Pewarnaan harmonis pada graf G adalah pengembangan dari pewarnaan titik sedemikian sehingga warna dari satu pasang titik yang bertetangga muncul paling banyak satu kali.
- (ii) Bilangan kromatik harmonis pada graf G dinotasikan dengan $\chi_h(G)$ adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan harmonis (Vivin & Ali, 2009).

Contoh 1.6.4.1 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}$.



Gambar 1.6.4.1 (a) Graf G dengan 5 warna, (b) Graf G dengan 4 warna, dan (c) Graf G dengan 6 warna.

Berdasarkan definisi 1.6.4.1, Gambar 1.6.4.1 (a) Graf G merupakan pewarnaan harmonis $\chi_h(G) \leq 5$. Gambar 1.6.4.1 (b) Graf G bukan pewarnaan harmonis karena terdapat pasangan warna yang muncul lebih dari satu kali yaitu $(c(v_1), c(v_3)) = (c(v_1), c(v_5))$. Ini berarti graf G tidak memiliki pewarnaan harmonis apabila hanya empat warna yang digunakan, karena $der(v_1) = 4$ dengan titik tetangganya yaitu v_2, v_3, v_4, v_5 maka titik v_2, v_3, v_4, v_5 memiliki warna yang berbeda. Sehingga $\chi_h(G) \geq 5$.

Dengan demikian $\chi_h(G) = 5$.

Lemma 1.6.4.1 Sebuah graf G dapat diwarnai dengan menggunakan pewarnaan harmonis dan berderajat maksimum Δ , maka berlaku:

$$\chi_h(G) \geq \Delta + 1.$$



$$der(x) = \Delta.$$

$$2, 3, \dots, \Delta\}.$$

$$\text{jika } c(x_i) \neq 1 \text{ untuk } i \in \{1, 2, 3, \dots, \Delta\}.$$

Jika $c(x_1) = 2$, maka $c(x_i) \neq 2$ untuk $i \in \{2, 3, 4, \dots, \Delta\}$.

Demikian pula dengan x_2 , jika $c(x_2) = 3$, maka $c(x_i) \neq 3$ untuk $i \in \{3, 4, 5, \dots, \Delta\}$.

Dengan demikian x_i untuk $i \in \{1, 2, 3, \dots, \Delta\}$ memiliki warna yang berbeda.

Akibatnya, terdapat $\Delta + 1$ warna yang digunakan.

Maka $\chi_h(G) \geq \Delta + 1$.



BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1. Jenis Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode penelitian pustaka (*library search*). Metode ini dilakukan dengan menelaah berbagai literatur yang telah ada sebelumnya dan menjadikannya sebagai sumber data dalam penelitian, serta memastikan bahwa topik yang diteliti belum pernah dikaji oleh peneliti sebelumnya.

2.2. Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan Universitas Hasanuddin tepatnya di perpustakaan pusat. waktu penelitian berlangsung sejak Maret 2025.

2.3. Tahapan Penelitian

1. Mengumpulkan bahan penelitian dan mengkaji informasi mengenai bilangan kromatik harmonis.
2. Menentukan pola pewarnaan harmonis pada graf helm H_n , dengan alur seperti berikut:



