

DIMENSI PARTISI PADA GRAF TRIBUN $\mathfrak{T}_n$



RONALDO

H011181324



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2025



Optimized using
trial version
www.balesio.com

DIMENSI PARTISI PADA GRAF TRIBUN $\mathfrak{T}_n$

RONALDO

H011181324



PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2025



Optimized using
trial version
www.balesio.com

DIMENSI PARTISI PADA GRAF TRIBUN $\mathfrak{T}_n$

RONALDO

H011181324



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2025**

SKRIPSI
DIMENSI PARTISI PADA GRAF TRIBUN $\mathfrak{T}_n$

RONALDO
H011181324

Skripsi,

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana pada tanggal 24 Juli 2025

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika
Departemen matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:
Pembimbing Utama,



iwati, M.Si.
990032007

Mengetahui:
Ketua Program Studi,



Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 196804292002121001



PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Dimensi Partisi pada Graf Tribun $\mathbb{Z}_n$ " adalah benar karya saya dengan arahan dari Prof. Dr. Hasmawati, M.Si. sebagai Pembimbing Utama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi manapun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomi) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 24 Juli 2025


Ronaldo
 H011181324



UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji hanya milik Allah *subhanallahu Wa Ta'ala* atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya yang telah diberikan kepada penulis sampai saat ini. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada baginda Rasulullah *Shallallahu 'Alaihi Wassalam*. *Alhamdulillahirabbil'aalamin*, berkat rahmat dan kemudahan yang diberikan oleh Allah *Subhanallahu Wa Ta'ala*, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Dimensi Partisi pada Graf Tribun $\mathfrak{T}_n$** ” sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini dapat diselesaikan, karena adanya bantuan, dukungan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada orang tua penulis, **La Munta** dan **Siame**, serta seluruh keluarga yang telah memberikan doa dan dukungan dalam penyelesaian skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin, serta Bapak **Dr. Sci. Muhammad Zakir, S.Si., M.Si.**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika beserta jajarannya.
3. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.**, selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar, tulus, dan Ikhlas banyak memberikan ilmu yang bermanfaat dan meluangkan waktu untuk membimbing dan memberikan masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
4. Ibu **Naimah Aris, S.Si., M.Math.**, dan Ibu **Jusmawati Massalesse, S.Si., M.Si.**, selaku Tim Penguji atas kesediannya untuk memberikan kritik, saran, dan dukungan yang membangun kepada penulis dalam perbaikan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu **Dosen** Departemen Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta Bapak dan Ibu **Staff** Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
6. Teman-teman seperjuangan penulis **Irfan Oddanial, S.Mat., Putri Ayuni, S.Mat., Alya Sakinah Arif, S.Mat., Muhammad Fairil Suahir, S.Mat., Andi Rahmat Hidayat, S.Mat.**, dan **Muh. Akbar Syam, S.Mat.**, yang telah berjuang bersama untuk menyelesaikan skripsi ini.



Matematika Angkatan 2018 yang telah berjuang bersama culiahannya sampai selesai.

INTEGRAL 2018. Terima kasih telah menemani perjalanan ini menunjukkan arti dari persaudaraan. Banyak pengalaman yang penulis peroleh dari proses yang dilalui bersama-sama. dengan slogan “Satu Kesatuan, Tak terpisahkan”.

9. Keluarga besar **HIMATIKA FMIPA UNHAS**, terima kasih atas seluruh pengalaman, pembelajaran serta telah menjadi keluarga penulis selama masa perkuliahan.
10. **Keluarga Mahasiswa FMIPA Unhas**, terima kasih untuk pengalaman dan ilmu yang sangat berharga selama penulis berproses di KMF. Terkhusus kepada **Pengurus BEM FMIPA Unhas periode 2021/2022**.
11. Teman-teman peserta **KKN Tematik Unhas Gel. 106 Wilayah Sidrap 1**, serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebut satu persatu yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis, serta memberikan momen berharga bagi penulis selama masa studi sarjana.
12. **Ronaldo**, apresiasi saya tujukan untuk diri sendiri atas komitmen untuk menuntaskan apa yang sudah dimulai. Terima kasih telah terus berjuang, tidak menyerah ditengah jalan, dan mampu menikmati setiap prosesnya, meski penuh tantangan. Terima kasih karena telah bertahan sejauh ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari dari kesempurnaan, bail dalam penulisan maupun penyajiannya. Hal tersebut dikarenakan oleh keterbatasan penulisan sendiri. Maka dari itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi kebaikan dan kemajuan kita Bersama.

Akhir kata, proses belajar yang berhasil adalah proses yang membuat kita semakin merasakan besarnya ketidaktahuan kita akan sesuatu, sehingga kita semakin bersemangat untuk mencari tahu (belajar). Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi siapa saja yang membacanya. Terima kasih.

Penulis

Ronaldo



Optimized using
trial version
www.balesio.com

ABSTRAK

Ronaldo. **Dimensi Partisi pada Graf Tribun $\mathfrak{T}_n$** (dibimbing oleh Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.)

Graf G merupakan himpunan pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik dalam graf. Jarak antara dua titik yaitu u dan v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ merupakan Panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v . Untuk suatu k -partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$, representasi dari titik u ke Π adalah k -pasangan berurut, $r(u|\Pi) = (d(u, S_1), d(u, S_2), \dots, d(u, S_k))$. Partisi Π disebut sebagai partisi pembeda dari G jika $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$. Partisi pembeda Π dengan kardinalitas minimum disebut sebagai partisi pembeda minimum. Adapun dimensi partisi dari graf G , dinotasikan dengan $pd(G)$ yang merupakan kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G . Pada penelitian ini akan ditentukan dimensi partisi pada graf tribun $\mathfrak{T}_n$. Graf tribun $\mathfrak{T}_n$ merupakan graf hasil pengembangan dari graf ular segitiga ganda. Hasil dari penelitian ini adalah $pd(\mathfrak{T}_n) = 3$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

Kata kunci: dimensi partisi, teori graf, graf tribun, graf ular segitiga ganda, partisi pembeda, titik setara.



ABSTRACT

Ronaldo. **The Partition Dimension of the Tribun Graph $\mathfrak{T}_n$** (supervised by Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.)

A graph G is defined as an ordered pair $(V(G), E(G))$, where $V(G)$ is the set of vertices and $E(G)$ is the set of edges connecting pairs of vertices in the graph. The distance between two vertices u and v , denoted by $d(u, v)$, is the length of the shortest path from vertex u to vertex v . For an ordered k -partition $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ of $V(G)$, the representation of a vertex u concerning Π is the ordered k -tuple $r(u|\Pi) = (d(u, S_1), d(u, S_2), \dots, d(u, S_k))$. A partition Π is called a resolving partition of G if $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ for every pair of distinct vertices $u, v \in V(G)$. A resolving partition with the smallest cardinality is called a minimum resolving partition. The partition dimension of a graph G , denoted by $pd(G)$, is the cardinality of its minimum resolving partition. This research aims to determine the partition dimension of the tribun graph $\mathfrak{T}_n$. The tribun graph $\mathfrak{T}_n$ is a graph constructed as a development of the double triangular snake graph. The result of this study show that $pd(\mathfrak{T}_n) = 3$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Keywords: partition dimension, graph theory, tribun graph, double triangular snake graph, resolving partition, equivalent vertices.



DAFTAR ISI

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA	iv
UCAPAN TERIMA KASIH	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR NOTASI	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian.....	2
1.4 Batasan Masalah.....	2
1.5 Manfaat Penelitian.....	2
1.6 Landasan Teori	2
1.6.1 Himpunan	2
1.6.2 Konsep dasar graf	3
1.6.3 Jenis-jenis graf	8
1.6.4 Dimensi Partisi pada Graf	10
BAB II METODOLOGI PENELITIAN	16
2.1 Pendekatan dan Jenis Penelitian	16
2.2 Tempat dan Waktu Penelitian	16
2.3 Tahapan Penelitian	16
Penelitian.....	17
PEMBAHASAN	18
ada Graf Tribun	18
si pada Graf Tribun	19



BAB IV PENUTUP	25
4.1 Kesimpulan.....	25
4.2 Saran	25
DAFTAR PUSTAKA.....	26



DAFTAR TABEL

Nomor Urut	halaman
Tabel 1.1 Hasil Penelitian Dimensi Partisi pada Graf Sederhana.....	14
Tabel 2.1 representasi titik v_i terhadap kelas partisi S_2 dan S_3	24



DAFTAR GAMBAR

Nomor Urut	halaman
Gambar 1.1 Graf G	4
Gambar 1.2 Graf G_2	4
Gambar 1.3 Graf G_3	5
Gambar 1.4 Graf G_4	5
Gambar 1.5 Graf G_5	6
Gambar 1.6 Graf G_6	7
Gambar 1.7 Isomorfik dalam graf	7
Gambar 1.8 Graf Lintasan P_5	8
Gambar 1.9 Graf Ular Segitiga T_4	8
Gambar 1.10 Graf Ular Segitiga Ganda $D(T_4)$	9
Gambar 1.11 Graf Tribun $\mathfrak{T}_4$	9
Gambar 1.12 Graf G yang berorde 5	11
Gambar 1.13 Titik Setara pada Graf	12
Gambar 1.14 Graf Tribun $\mathfrak{T}_3$	13
Gambar 2.1 Diagram alur penelitian	17
Gambar 3.1 Graf Tribun $\mathfrak{T}_n$	18
Gambar 3.2 Graf $\mathfrak{T}_1$	19
Gambar 3.4 Graf $\mathfrak{T}_5$	20
Gambar 3.5 Graf $\mathfrak{T}_{10}$	22



DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan bulat
G	Graf G
$V(G)$	Himpunan titik graf G
$E(G)$	Himpunan sisi graf G
$N_G(v_1)$	Himpunan tetangga titik v_i
$\deg(v_i)$	Derajat titik v_i pada graf G
$\delta(G)$	Derajat minimum graf G
$\Delta(G)$	Derajat maksimal graf G
$d(u, v)$	Jarak titik u ke titik v dalam graf G
$d(u, S)$	Jarak titik u ke subhimpunan S
Π	Partisi terurut dari $V(G)$
S	Kelas partisi
$r(v \Pi)$	Representasi titik v terhadap partisi terurut Π
P_n	Graf Lintasan
T_n	Graf ular Segitiga
$D(T_n)$	Graf ular Segitiga Ganda
$\mathfrak{T}_n$	Graf Tribun



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah cabang dari matematika diskrit yang pertama kali diperkenalkan oleh Leonardo Euler pada tahun 1736 dalam tulisannya yang berjudul "*problematic and solution-Related Geometric site*". Graf sendiri berfungsi untuk merepresentasikan objek-objek serta hubungan di antara mereka. Dalam graf, objek biasanya digambarkan sebagai titik atau bulatan (*vertex*), sementara hubungan antar objek direpresentasikan oleh garis (*edge*). Teori graf memiliki banyak manfaat dalam kehidupan sehari-hari, seperti pada sistem transportasi, jaringan komunikasi, dan pemetaan.

Penelitian mengenai graf sangat menarik karena memiliki banyak aplikasi. Beberapa topik populer dalam teori graf meliputi pelabelan, pewarnaan, bilangan kromatik, dimensi metrik, dan dimensi partisi. Konsep dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh (Chartrand dkk., 2000). Dimensi partisi ditentukan dengan mengelompokkan simpul-simpul graf G ke dalam sejumlah kelas partisi. Kemudian, jarak setiap simpul ke masing-masing kelas partisi dihitung untuk membentuk representasi. Dimensi partisi dari graf G adalah representasi dengan vektor koordinat yang berbeda-beda dan memiliki kardinalitas paling kecil. (Khairiah dkk., 2020).

Salah satu penerapan dimensi partisi adalah dalam navigasi robot. Dalam sistem ini, robot bergerak dari satu lokasi ke lokasi lainnya berdasarkan kode yang telah ditentukan. Kode tersebut harus diterjemahkan dengan tingkat kesalahan minimal agar robot dapat mencapai tujuannya secara akurat. Oleh karena itu, setiap lokasi harus diberi kode unik. Jika titik lokasi dianggap sebagai simpul dan jalur pergerakan robot sebagai sisi, maka area gerak robot dapat direpresentasikan sebagai graf. (Khuller dkk., 1996)

Graf Tribun, yang dilambangkan dengan $\mathfrak{T}_n$, adalah graf dengan bentuk unik yang merupakan pengembangan dari graf ular. Gabungan diskonektif graf Tribun adalah kombinasi saling terpisah dari m salinan graf Tribun, dan dinyatakan dengan notasi $m\mathfrak{T}_n$ (Mahmudah, 2014).

Penelitian tentang graf tribun masih sangat sedikit dikaji. Sejauh ini, penelitian mengenai graf tribun baru ditemukan pelabelan total super sisi anti ajaib graf tribun yang diteliti Muhlisatul mahmuda pada tahun 2014, sedangkan I Kadek Narayana Aji



ensi metrik ketetanggaan lokal pada operasi split untuk graf 124. Sedangkan penelitian mengenai dimensi partisi semakin angan sampai saat ini. Beberapa penelitian yang membahas satunya.

Berdasarkan penelusuran literatur yang dilakukan, belum ada yang melakukan penelitian mengenai dimensi partisi pada graf tribun. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dan menuangkannya dalam tugas akhir yang berjudul

“Dimensi Partisi pada Graf Tribun $\mathfrak{T}_n$ ”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah di jelaskan di atas maka rumusan masalah yang diberikan dalam penulisan penelitian ini adalah bagaimana memilih suatu partisi dari titik graf tribun $\mathfrak{T}_n$ yang merupakan partisi pembeda dari graf tribun $\mathfrak{T}_n$.

1.3 Tujuan Penelitian

Merujuk pada rumusan masalah sebelumnya, tujuan penelitian adalah dengan mengetahui suatu partisi pembeda dari graf tribun $\mathfrak{T}_n$, maka dimensi partisi pada graf tribun $\mathfrak{T}_n$ dapat diketahui.

1.4 Batasan Masalah

Untuk menjaga fokus pembahasan pada penelitian ini, Batasan masalah dalam penelitian ini dibatasi pada graf yang menjadi objek penelitian adalah graf tribun $\mathfrak{T}_n$ yang berorde $4n + 2$ dan berukuran $8n + 1$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai sumber referensi literatur serta sebagai sarana untuk memperluas pemahaman terkait perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang matematika diskrit, tepatnya pada teori graf yang membahas tentang penentuan dimensi partisi graf tribun $\mathfrak{T}_n$. Selain itu, penelitian ini juga diharapkan dapat menjadi landasan teoritis yang mendukung penelitian-penelitian selanjutnya yang memiliki keterkaitan dengan topik ini.

1.6 Landasan Teori

Pada subbab ini akan diuraikan mengenai himpunan, graf, jenis graf. Dan dimensi partisi.

1.6.1 Himpunan



Graf menggunakan konsep himpunan, yang terdiri dari himpunan titik (*vertex*) (*edge*). Himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang at didefinisikan dengan jelas.

unan

an terdapat himpunan yang terbatas dan tidak terbatas.

Definisi 1.1 Misalkan X adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$.

1. Bilangan $a \in \mathbb{R}$ dikatakan batas atas dari X jika $x \leq a$, untuk setiap $x \in X$.
2. Bilangan $b \in \mathbb{R}$ dikatakan batas bawah dari X jika $x \geq b$, untuk setiap $x \in X$.
3. Himpunan X dikatakan terbatas jika X memiliki batas atas dan batas bawah.
4. Himpunan X dikatakan tidak terbatas jika X tidak memiliki batas atas atau batas bawah.

Contoh 1.1 Himpunan batas atas dan batas bawah

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}\}$$

Dari ketiga himpunan diatas, himpunan A merupakan himpunan terbatas atas, himpunan B merupakan himpunan terbatas bawah, dan himpunan C merupakan himpunan tidak terbatas seperti pada himpunan bilangan riil.

Lemma 1.1 Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$, jika $a \leq b$ dan $a \geq b$, maka $a = b$.

Lemma 1.2 Misalkan $a, b \in \mathbb{Q}$, maka $a > b \equiv a \geq b + 1$.

1.6.1.2 Partisi pada himpunan

Partisi pada himpunan adalah pembagian elemen-elemen dalam himpunan menjadi beberapa himpunan bagian yang tidak saling tumpang tindih dan mencakup seluruh elemen dari himpunan awal. Misalkan S adalah himpunan, maka partisi dari S adalah kumpulan himpunan bagian $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ yang memenuhi:

1. $P_i \neq \emptyset$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.
2. $P_i \cap P_j = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$.
3. $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n = S$.

1.6.2 Konsep dasar graf

Berikut diberikan beberapa definisi dan contoh yang berkaitan dengan konsep graf.

Definisi 1.2 Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan bagian tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik (vertex) dan E adalah himpunan bagian tak kosong yang anggota-anggotanya disebut sisi (edge) dari himpunan V yang berbeda-beda (asmawati, 2020).

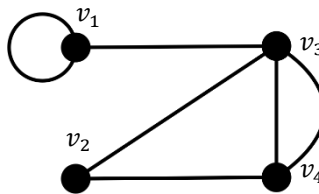


graf G biasanya dinotasikan $V(G)$ dan banyaknya titik dari graf $|V(G)|$ disebut *orde* dari G , sedangkan himpunan sisi graf G $E(G)$ dan banyaknya sisi dari graf G yang dinotasikan $|E(G)|$

disebut *ukuran* dari graf G . Graf yang hanya terdiri dari titik-titik tanpa adanya sisi disebut graf trivial.

Titik pada graf dapat diberi tanda atau label berupa angka atau huruf, seperti $1, 2, 3, \dots$, atau seperti $a, b, c, \dots, y, z$, atau gabungan huruf dan bilangan asli. Sedangkan untuk sisi pada graf dapat dinyatakan dengan pasangan titik yang bertetangga (u, v) atau bisa ditulis dalam notasi uv . Sisi uv dapat juga dinotasikan dengan e atau e_i . Jadi sisi $e_i = uv$ menyatakan sisi yang menghubungkan titik u dan v .

Contoh 1.2 Diberikan graf G_1 sebagai berikut

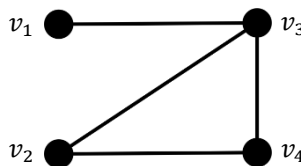


Gambar 1.1 Graf G

Gambar 1.1 merupakan contoh suatu graf G_1 dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E = \{v_1v_1, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_4\}$.

Definisi 1.3 Graf sederhana G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, Dengan $V(G)$ adalah himpunan diskrit berhingga dan tidak kosong, yang anggotanya disebut titik (vertex), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi (edge).

Contoh 1.3 Diberikan graf G_2 yang memiliki himpunan titik $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G_2) = \{v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Graf G_2 dapat dilihat pada Gambar 1.2 dibawah ini.



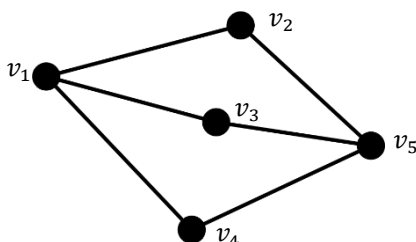
Gambar 1.2 Graf G_2

ur 1.2, himpunan titik $V(G_2)$ tidak kosong dan berhingga, serta $(G_2), v_i v_j = v_j v_i$ dan $v_i \neq v_j$ untuk $i, j = 1, 2, 3, 4$. Oleh karena itu, adalah satu contoh graf sederhana.



Definisi 1.4 Orde dari graf G yang dinyatakan dengan simbol p adalah banyaknya anggota dari $V(G)$. sedangkan, ukuran dari graf G yang dinyatakan dengan simbol q adalah banyaknya anggota dari $E(G)$.

Contoh 1.4 Diberikan graf G_3 yang memiliki himpunan titik $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G_3) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5\}$. Graf G_3 dapat dilihat pada Gambar 1.3 dibawah ini.



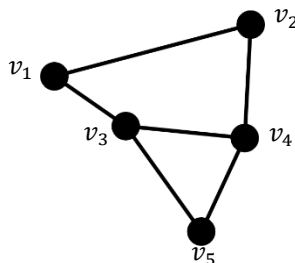
Gambar 1.3 Graf G_3

Pada Gambar 1.3 Graf G_3 adalah graf yang berorde 5 atau $p = 5$ dan berukuran 6 atau $q = 6$.

Definisi 1.5 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $e \in E(G)$. Jika $e = v_iv_j$, maka berlaku:

1. Titik v_i bertetangga (adjacent) dengan titik v_j .
Banyaknya tetangga dengan v_i dinotasikan $|N_G(v_i)|$.
2. Sisi e terkait (incident) dengan v_i , demikian pula untuk titik v_j .
Banyaknya e_1, e_2 , dan e_3 adalah sisi dari suatu graf G dan v adalah suatu titik graf G . jika e_1, e_2 , dan e_3 terkait dengan v , maka sisi e_1, e_2 , dan e_3 disebut sisi yang bertetangga.

Contoh 1.5 Misalkan himpunan $V(G_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G_4) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_3v_4, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$. Bentuk graf dapat dilihat pada Gambar 1.4 berikut.



Gambar 1.4 Graf G_4



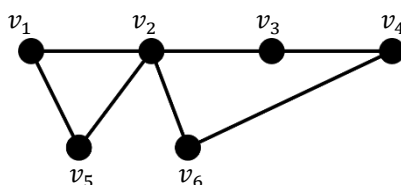
Pada Gambar 1.4, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan titik v_3 , titik v_4 bertetangga dengan titik v_2 dan titik v_5 . Begitupun dengan sisi v_3v_4 yang terkait dengan titik v_3 dan titik v_4 .

Definisi 1.6 derajat suatu titik v_i dalam graf G , dinotasikan dengan $\deg(v_i)$, adalah banyaknya sisi $e \in E(G)$ yang terkait dengan titik v_i atau $\deg(v_i) = |N_G(v_i)|$. Derajat minimum dari graf G dinotasikan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min \{\deg(v_i) : v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max \{\deg(v) : v \in V(G)\}$.

Contoh 1.6 Perhatikan graf G_4 pada Gambar 1.4, titik v_1 memiliki derajat 2 atau $\deg(v_1) = 2$, titik v_2 memiliki derajat 2 atau $\deg(v_2) = 2$, begitupun dengan $\deg(v_3) = 3$, $\deg(v_4) = 3$, dan $\deg(v_5) = 2$. Sehingga diperoleh derajat minimumnya adalah $\delta(G_4) = 2$, dan derajat maksimumnya $\Delta(G_4) = 3$.

Definisi 1.7 Lintasan pada graf G adalah suatu barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut (Hasmawati, 2020).

Contoh 1.7 Misalkan diberikan graf G_5 seperti pada Gambar 1.5 berikut



Gambar 1.5 Graf G_5

Pada graf G_5 terdapat lintasan dari titik v_5 ke titik v_6 , yaitu lintasan $v_5, v_5v_1, v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_6, v_6$, lintasan $v_5, v_5v_1, v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_6, v_6$, dan lintasan $v_5, v_5v_2, v_2, v_2v_6, v_6$, dengan Panjang masing-masing 5, 3, dan 2. Jadi lintasan terpanjang dari titik v_5 ke titik v_6 adalah lintasan dengan panjang 5 dan lintasan terpendeknya yaitu lintasan dengan panjang 2.

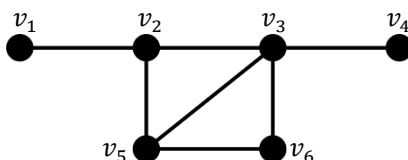
Definisi 1.8 Jarak antara dua titik u dan v , dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah Panjang lintasan terpendek dari titik u ke v . Jarak titik u ke u adalah 0 atau $d(u, u) = 0$, jika G tidak memiliki lintasan dari u ke v , maka jarak titik u ke v didefinisikan $d(u, v) = \infty$ (Darmaji, 2011).



an graf G_5 pada Gambar 1.5, lintasan terpendek dari titik v_5 ke
ngga jarak dari titik v_5 ke titik v_6 adalah 2 atau $d(v_5, v_6) = 2$.
k lainnya $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_2, v_4) = 2$, dan $d(v_5, v_4) = 3$.

Definisi 1.9 misalkan titik $u \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$, maka jarak dari u ke S dinotasikan $d(u, S)$ dan didefinisikan sebagai $d(u, S) = \min \{d(u, v) | v \in S\}$ dan untuk setiap $u \in S$, maka jarak dari u ke S adalah 0 atau $d(u, S) = 0$ (Darmaji, 2011).

Contoh 1.9 Misalkan himpunan $V(G_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G_6) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_5v_6\}$, serta diberikan $S = \{v_2, v_3, v_6\}$. Bentuk graf G_6 dapat dilihat pada Gambar 1.6 berikut.



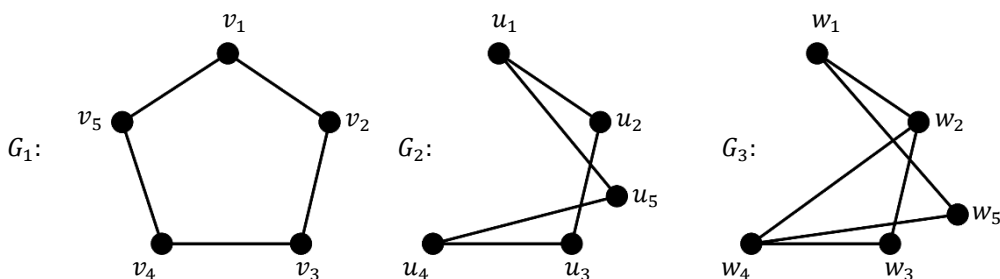
Gambar 1.6 Graf G_6

Pada Gambar 1.6 diperoleh $d(v_1, S) = \min\{d(v_1, x) | x \in S\} = \min\{d(v_1, v_2), d(v_1, v_3), d(v_1, v_6)\} = \min\{1, 2, 3\} = 1$. Begitupun dengan $d(v_2, S) = \min\{d(v_2, x) | x \in S\} = \min\{d(v_2, v_2), d(v_2, v_3), d(v_2, v_6)\} = \min\{0, 1, 2\} = 0$.

Definisi 1.10 Graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik yang dinotasikan $G_1 \cong G_2$ jika terdapat pemetaan satu satu $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ yang menyajikan semua sifat ketetanggaan, yaitu $f(u)$ dan $f(v)$ pada G_2 bertetangga jika dan hanya jika u dan v bertetangga pada G_1 . Syarat dua buah graf dikatakan isomorfik adalah:

1. Memiliki jumlah titik yang sama,
2. Memiliki jumlah sisi yang sama,
3. Memiliki derajat yang sama dari titik-titiknya.

Contoh 1.10 Diberikan graf G_1 dan G_2 pada Gambar 1.7 adalah dua graf yang isomorfik dan graf G_1 dan G_3 adalah dua graf yang tidak isomorfik.



Gambar 1.7 Isomorfik dalam graf



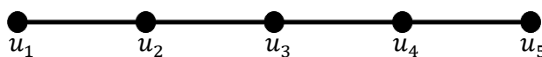
$\{V(G_1), E(G_1)\}$ dan $G_2 = \{V(G_2), E(G_2)\}$, dengan $V(G_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ dan $V(G_2) = \{u_1, u_2, \dots, u_5\}$ seperti pada Gambar 1.7 terdapat pemetaan satu-satu yaitu sebagai berikut: $f: (G_1) \rightarrow (G_2)$, $f(v_1) = u_1$, $f(v_2) = u_2$, $f(v_3) = u_3$, $f(v_4) = u_4$, $f(v_5) = u_5$. Dapat diperiksa bahwa: $f(v_1) = u_1$ dan $f(v_2) = u_2$ bertetangga, u_1 dan u_2 juga bertetangga; $f(v_2) = u_2$ dan $f(v_3) = u_3$ bertetangga, u_2 dan u_3 juga bertetangga; $f(v_3) = u_3$ dan $f(v_4) = u_4$ bertetangga, u_3 dan u_4 juga bertetangga; $f(v_4) = u_4$ dan $f(v_5) = u_5$ bertetangga, u_4 dan u_5 juga bertetangga; dan $f(v_5) = u_5$ dan $f(v_1) = u_1$ bertetangga, u_5 dan u_1 juga bertetangga. Jadi terdapat isomorfisma antara G_1 dan G_2 . Dengan kata lain G_1 isomorfik dengan G_2 atau $G_1 \cong G_2$. Selanjutnya untuk graf G_1 dan G_3 bukan merupakan dua graf yang isomorfik. Dapat dilihat bahwa jumlah sisi pada kedua graf tersebut tidak sama, dan semua titik pada G_1 berderajat 2, sedangkan pada graf G_3 terdapat titik yang berderajat 3. Dapat disimpulkan bahwa $G_1 \cong G_2$ dan $G_1 \not\cong G_3$.

1.6.3 Jenis-jenis graf

Pada sub subbab ini, akan dibahas jenis-jenis graf yang digunakan untuk mengkonstruksi graf tribun sebagai salah satu graf khusus yang akan digunakan pada penelitian ini.

Definisi 1.11 Misalkan $G: u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, u_{n-1}, e_{n-1}, u_n$ adalah lintasan yang berorde n dengan ukuran $n - 1$. Lintasan pada graf G adalah barisan titik dan sisi $u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, u_{n-1}, e_{n-1}, u_n$ dan $e_i = u_i u_{i+1}; i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ graf lintasan merupakan graf sederhana yang kedua titik ujungnya berderajat satu yang disebut pendant, dan titik yang lain berderajat dua. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n (Alfarisi, 2017).

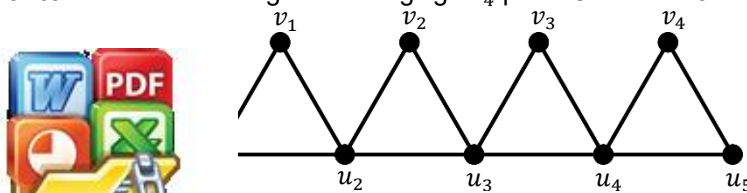
Contoh 1.11 Diberikan graf lintasan P_n dengan $n = 5$ pada Gambar 1.8 berikut:



Gambar 1.8 Graf Lintasan P_5

Definisi 1.12 (Parmar dkk., 2019) Graf Ular Segitiga (Triangular Snake Graph) yang dinotasikan dengan T_n dimana $n \geq 1$, adalah graf yang diperoleh dari suatu graf lintasan $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$ dan titik-titik dari graf komplemen K_n dengan notasi $V(\overline{K}_n) = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ kemudian menghubungkan titik u_i dan u_{i+1} ke sebuah titik v_i , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Contoh 1.12 Diberikan graf ular segitiga T_4 pada Gambar 1.9 berikut:

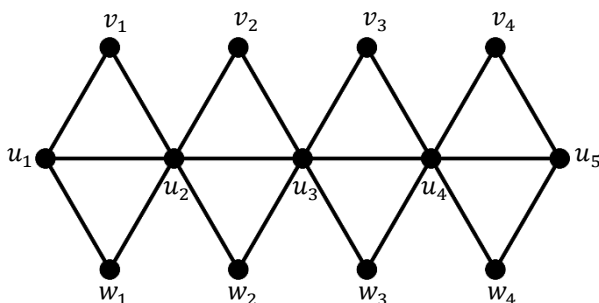


Gambar 1.9 Graf Ular Segitiga T_4



Definisi 1.13 *Graf Ular Segitiga Ganda (Double Triangular Snake Graph) yang dinotasikan dengan $D(T_n)$ dimana $n \geq 1$, adalah graf yang diperoleh dari suatu graf T_n dan titik-titik dari graf komplemen K_n dengan notasi $V(\overline{K_n}) = \{w_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ kemudian menghubungkan titik u_i dan u_{i+1} ke sebuah titik w_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.*

Contoh 1.13 Diberikan graf ular segitiga ganda $D(T_4)$ pada Gambar 1.10 berikut:

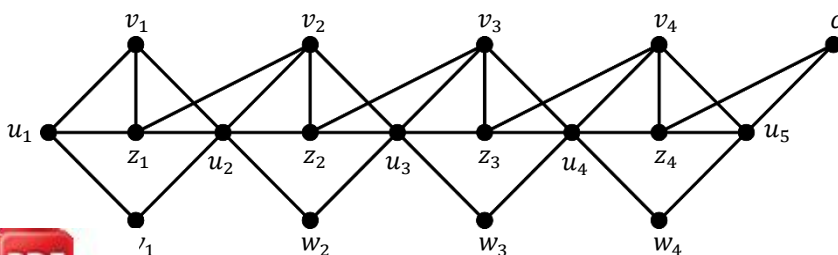


Gambar 1.10 Graf Ular Segitiga Ganda $D(T_4)$

Definisi 1.14 *Graf Tribun adalah graf hasil pengembangan dari graf ular segitiga ganda. Graf tribun dinotasikan dengan $\mathfrak{T}_n$. Langkah-langkah mengkonstruksi graf tribun $\mathfrak{T}_n$ adalah sebagai berikut:*

1. Membangun suatu graf ular segitiga ganda $D(T_n)$.
2. Menambahkan suatu titik z_i di antara titik u_i dan u_{i+1} sehingga titik-titik u_i, z_i, u_{i+1} terhubung, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.
3. Menghubungkan titik z_i ke titik v_i dan v_{i+1} , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.
4. Menambahkan satu titik c .
5. Menghubungkan z_{n-1} dan u_n ke titik c .

Contoh 1.14 Diberikan graf tribun pada Gambar 1.11 berikut:



Gambar 1.11 Graf Tribun $\mathfrak{T}_4$

1.4 graf tribun memiliki orde p yang merupakan banyaknya kuran q adalah banyaknya anggota $E(\mathfrak{T}_n)$ sebagai berikut:



$$p = \sum_{v \in V(\mathfrak{T}_n)} v$$

$$p = \sum_{i=1}^n v_i + \sum_{i=1}^{n+1} u_i + \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n w_i + \sum_{i=1}^1 c$$

$$p = n + n + 1 + n + n + 1$$

$$p = 4n + 2. \quad (1.1)$$

Lemma 1.3 (Hasmawati, 2020) *Jumlah derajat semua titik pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Jika $G = (V, E)$, maka:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2q$$

Berdasarkan Lemma 1.3 kita dapat menentukan ukuran dari graf tribun $\mathfrak{T}_n$ sebagai berikut:

$$2q = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

$$2q = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) + \sum_{i=1}^{n+1} \deg(u_i) + \sum_{i=1}^n \deg(z_i) + \sum_{i=1}^n \deg(w_i) + \sum_{i=1}^1 \deg(c)$$

$$2q = \sum_{i=1}^1 \deg(v_i) + \sum_{i=2}^n \deg(v_i) + \sum_{i=1}^1 \deg(u_i) + \sum_{i=2}^n \deg(u_i) + \sum_{i=n+1}^{n+1} \deg(u_i) \\ + \sum_{i=1}^n \deg(z_i) + \sum_{i=1}^n \deg(w_i) + \sum_{i=1}^1 \deg(c)$$

$$2q = 3 + 4(n-1) + 3 + 6(n-1) + 4 + 4n + 2n + 2$$

$$2q = 16n + 2$$

$$q = 8n + 1 \quad (1.2)$$

Dari hasil diatas di dapatkan bahwa graf tribun $\mathfrak{T}_n$ berorde $4n + 2$ dan berukuran $8n + 1$.

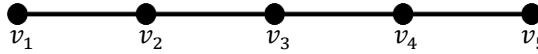
1.6.4 Dimensi Partisi pada Graf



ab ini, akan dibahas definisi, sifat, dan teorema yang berkaitan rsi partisi graf.

$n \Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ dan $v \in$ dari $v \in V(G)$ terhadap Π dinotasikan $r(v|\Pi)$ adalah pasangan $(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$ (Darmaji, 2011).

Contoh 1.15 Diberikan graf lintasan yang berorde 5 seperti pada Gambar 1.12 berikut:



Gambar 1.12 Graf G yang berorde 5

Berdasarkan Gambar 1.12 di atas, diperoleh himpunan titik yaitu $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Pilih partisi terurut dari $V(G)$ yakni $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{v_1\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Representasi untuk setiap $v \in V(G)$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

$$r(v_1|\Pi) = \{d(v_1, S_1), d(v_1, S_2)\} = \{0, 1\}$$

$$r(v_2|\Pi) = \{d(v_2, S_1), d(v_2, S_2)\} = \{1, 0\}$$

$$r(v_3|\Pi) = \{d(v_3, S_1), d(v_3, S_2)\} = \{2, 0\}$$

$$r(v_4|\Pi) = \{d(v_4, S_1), d(v_4, S_2)\} = \{3, 0\}$$

$$r(v_5|\Pi) = \{d(v_5, S_1), d(v_5, S_2)\} = \{4, 0\}$$

Definisi 1.16 Partisi terurut Π merupakan partisi pembeda dari $V(G)$ jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap Π , yakni berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$.

Contoh 1.16 Berdasarkan Contoh 1.15 diperoleh untuk setiap $i \neq j \in V(G)$ berlaku $r(u_i|\Pi) \neq r(u_j|\Pi)$, sehingga Π merupakan partisi pembeda dari $V(G)$.

Definisi 1.17 Partisi pembeda Π dengan kardinalitas terkecil disebut partisi pembeda minimum. Kardinalitas dari partisi pembeda minimum dari G disebut dimensi partisi G , yang dinotasikan $pd(G)$.

Contoh 1.17 Dari Contoh 1.15, diketahui partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{v_1\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ merupakan partisi pembeda dari $V(G)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda dari $V(G)$ mempunyai kardinalitas sedikitnya 2. Misalkan Π^* suatu partisi pembeda dari $V(G)$ dengan $|\Pi^*| = 1$. Dalam hal ini $\Pi^* = \{S_1^*\}$ dengan $S_1^* = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Jelas Π^* bukan merupakan partisi pembeda dari $V(G)$ karena untuk setiap $u \in V(G)$, $r(u|\Pi^*) = \{0\}$. Oleh karena itu, kardinalitas minimum dari himpunan partisi pada Contoh 1.15 adalah 2.

Definisi 1.18 Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut:

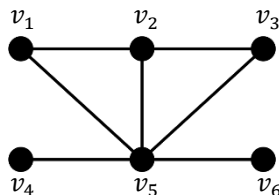
w) untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$.

: sehingga $d(u, c) + d(c, s) = d(v, c) + d(c, s)$ untuk setiap $s \in$



Pada definisi 1.18, jika titik u dan v memenuhi kondisi (1), maka u dan v disebut titik setara kuat. Jika hanya memenuhi kondisi (2), maka u dan v disebut titik setara lemah

Contoh 1.18 Diberikan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5, v_5v_6\}$ pada Gambar 1.13 berikut.



Gambar 1.13 Titik Setara pada Graf

Pada Gambar 1.13, titik v_1 dan v_3 merupakan titik setara kuat karena untuk setiap $x \in \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ jarak titik v_1 ke x sama dengan jarak titik v_3 ke x yaitu $d(v_1, x) = d(v_3, x)$ untuk $x \in \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$.

Teorema 1.1 Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi Π dari $V(G)$. Jika Π merupakan partisi pembeda graf G dan titik u dan v merupakan titik-titik yang setara kuat dalam G , maka titik u dan v berada pada kelas partisi yang berbeda di Π .

Teorema 1.2 Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi Π dari $V(G)$. Jika Π merupakan partisi pembeda graf G dan titik u dan v merupakan titik-titik yang setara lemah dalam G , maka u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di Π

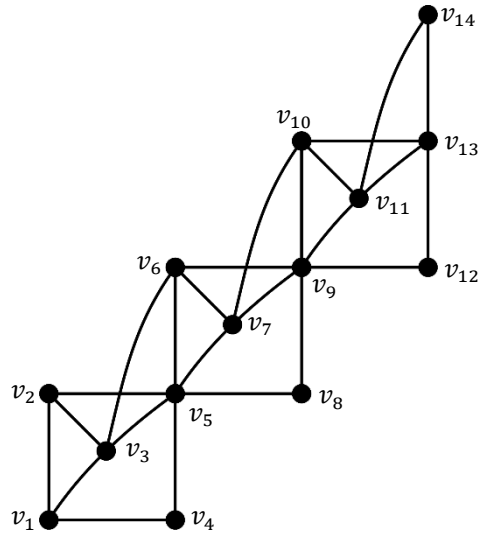
Teorema 1.3 Diberikan G graf terhubung dengan orde $n \geq 2$, maka

1. $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$
2. $pd(G) = n$ jika dan hanya jika $G \cong K_n$
3. Untuk $n \geq 4$, $pd(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_{r,s}$, ($r, s \geq 1$), $G = K_r + \overline{K_s}$, ($r \geq 1, s \geq 2$) atau $G = K_r + (K_1 \cup K_s)$, ($r, s \geq 1$)

Lemma 1.4 (Prinsip Pigeon-hole) Jika n objek ditempatkan ke dalam m tempat, dan $n > m$, maka setidaknya ada satu tempat yang berisi lebih dari satu objek.

Contoh 1.19 Misalkan diberikan graf tribun $\mathfrak{T}_3$ dengan himpunan titik $V(\mathfrak{T}_3) =$ wawah ini.





Gambar 1.14 Graf Tribun $\mathfrak{T}_3$

Berdasarkan Teorema 1.3 (1) yang menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$. Pada teorema ini diperoleh bahwa dimensi partisi graf G adalah $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$. Berarti jika $G \not\cong P_n$ maka haruslah dimensi partisi graf G adalah $pd(G) > 2$ atau kita bisa menuliskannya sebagai $pd(G) \geq 3$. Karena $\mathfrak{T}_3 \not\cong P_n$, maka diperoleh batas bawah dimensi partisi graf $\mathfrak{T}_3$ adalah $pd(\mathfrak{T}_3) \geq 3$. Selanjutnya akan dicari batas atas dari graf $\mathfrak{T}_3$.

Pilih himpunan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1\}$, $S_2 = \{v_2, v_8, v_{12}, v_{14}\}$, dan $S_3 = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{13}\}$. Representasi untuk setiap titik $v \in V(\mathfrak{T}_3)$ terhadap Π adalah sebagai berikut:

$$r(v_1|\Pi) = (0,1,1)$$

$$r(v_8|\Pi) = (3,0,1)$$

$$r(v_2|\Pi) = (1,0,1)$$

$$r(v_9|\Pi) = (3,1,0)$$

$$r(v_3|\Pi) = (1,1,0)$$

$$r(v_{10}|\Pi) = (4,2,0)$$

$$r(v_4|\Pi) = (1,2,0)$$

$$r(v_{11}|\Pi) = (4,1,0)$$

$$r(v_5|\Pi) = (2,1,0)$$

$$r(v_{12}|\Pi) = (4,0,1)$$

$$\Pi = (2,2,0)$$

$$r(v_{13}|\Pi) = (5,1,0)$$

$$\Pi = (3,2,0)$$

$$r(v_{14}|\Pi) = (5,0,1)$$



asi di atas dapat diketahui bahwa representasi dari semua titik
i. Jadi, Π merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas

minimum yaitu 3. Dengan demikian diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $\mathfrak{T}_3$ yaitu $3 \leq pd(\mathfrak{T}_3) \leq 3$, sehingga diperoleh dimensi partisi graf $\mathfrak{T}_3$ yaitu $pd(\mathfrak{T}_3) = 3$. Pembahasan yang lebih lanjut akan disajikan secara lengkap pada Bab III.

Selama beberapa dekade terakhir, kajian mengenai dimensi partisi graf telah menjadi topik yang menarik perhatian para peneliti di bidang teori graf dan kombinatorika. Konsep dimensi partii graf memiliki peran penting dalam mengungkapkan struktur serta karakteristik graf. Berbagai penelitian telah dilakukan untuk menentukan dimensi partisi dari beragam jenis graf, mulai dari graf yang sederhana hingga yang lebih kompleks. Berikut ini disajikan ringkasan dari sejumlah peneliti sebelumnya yang berhasil mengidentifikasi dimensi partisi berbagai graf. Tabel berikut memuat informasi mengenai nama peneliti, tahun publikasi, jenis graf yang dianalisis, serta nilai dimensi partisi yang ditemukan.

Tabel 1.1 Hasil Penelitian Dimensi Partisi pada Graf Sederhana

Peneliti	Graf	Dimensi partisi
(Darmaji, 2011)	$G \cong K_m \odot K_n$ Dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$	$pd(G) = \begin{cases} n + 1, & 2 \leq m \leq \binom{n+1}{n} \\ n + 2, & n + 2 \leq m \leq \binom{n+2}{n} + 1 \\ n + k, & \binom{n+k-1}{n} \leq m \leq \binom{n+k}{n} \end{cases}$
(Yogi dkk., 2012)	$G \cong C_m \odot K_n$	$pd(G) = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ p, & n > 1 \end{cases}$ Dimana p merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi $\binom{p}{n} \geq m$
(Auliya, 2014)	$G \cong K_1 + mC_n$ Dengan $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$	$\begin{aligned} pd(K_1 + mC_3) &= m + 2, & m \geq 2 \\ pd(K_1 + mC_4) &= 3m - 4, & m > 2 \\ pd(K_1 + mC_5) &= 2m + 1, & m \geq 2 \end{aligned}$
(Purwaningsih, 2017)	$G \cong P_m \odot K_{1,m}$	$pd(G) = \begin{cases} n, & m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ n + 1, & m > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$
	$\cong C_n \triangleright P_k$	$pd(G) = pd(C_n) = 3$



Peneliti	Graf	Dimensi partisi
(Hasmawati dkk., 2022)	$G \cong Amal(C_n)_m$ Untuk suatu $k \geq 3$, $n \geq 3$ dan $m \in I_k$	$pd(Amal(C_n)_m) = k$
(Rozzaq dkk, 2022)	$G \cong K_n \odot W_{n+1}$ Untuk $n \geq 3$	$pd(G) = \begin{cases} 4, & n = 3 \\ n, & n > 3 \end{cases}$
(Haspika dkk., 2023)	$G \cong G_{m,n}$ Untuk $n = 2k$	$pd(G) = 3$
(Yuli dkk., 2024)	$G_1 \cong U_{m,n}(1)$ $G_2 \cong U_{m,n}(1)$ Untuk $m \geq 5$, $n \geq 2$	$pd(G_1) \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil,$ $pd(G_2) \leq \left\lceil \frac{m+2}{2} \right\rceil$



BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Pendekatan dan Jenis Penelitian

Untuk mencapai tujuan dari penelitian ini, maka penelitian dilakukan berdasarkan pada metode literatur atau penelitian Pustaka (*library research*), yaitu metode pendekatan yang berfokus pada pengumpulan data dan informasi dari sumber-sumber tertulis yang relevan dengan topik penelitian. Sumber-sumber ini meliputi buku, jurnal ilmiah, artikel, dokumen, arsip, laporan penelitian, dan sumber referensi lainnya yang tersedia di perpustakaan fisik maupun digital.

2.2 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di ruang kelas, Perpustakaan FMIPA Universitas Hasanuddin, Lab Terapan Departemen Matematika Universitas Hasanuddin yang banyak memiliki banyak referensi mengenai topik penelitian ini. Penelitian dilaksanakan pada bulan Oktober 2024 hingga Juli 2025

2.3 Tahapan Penelitian

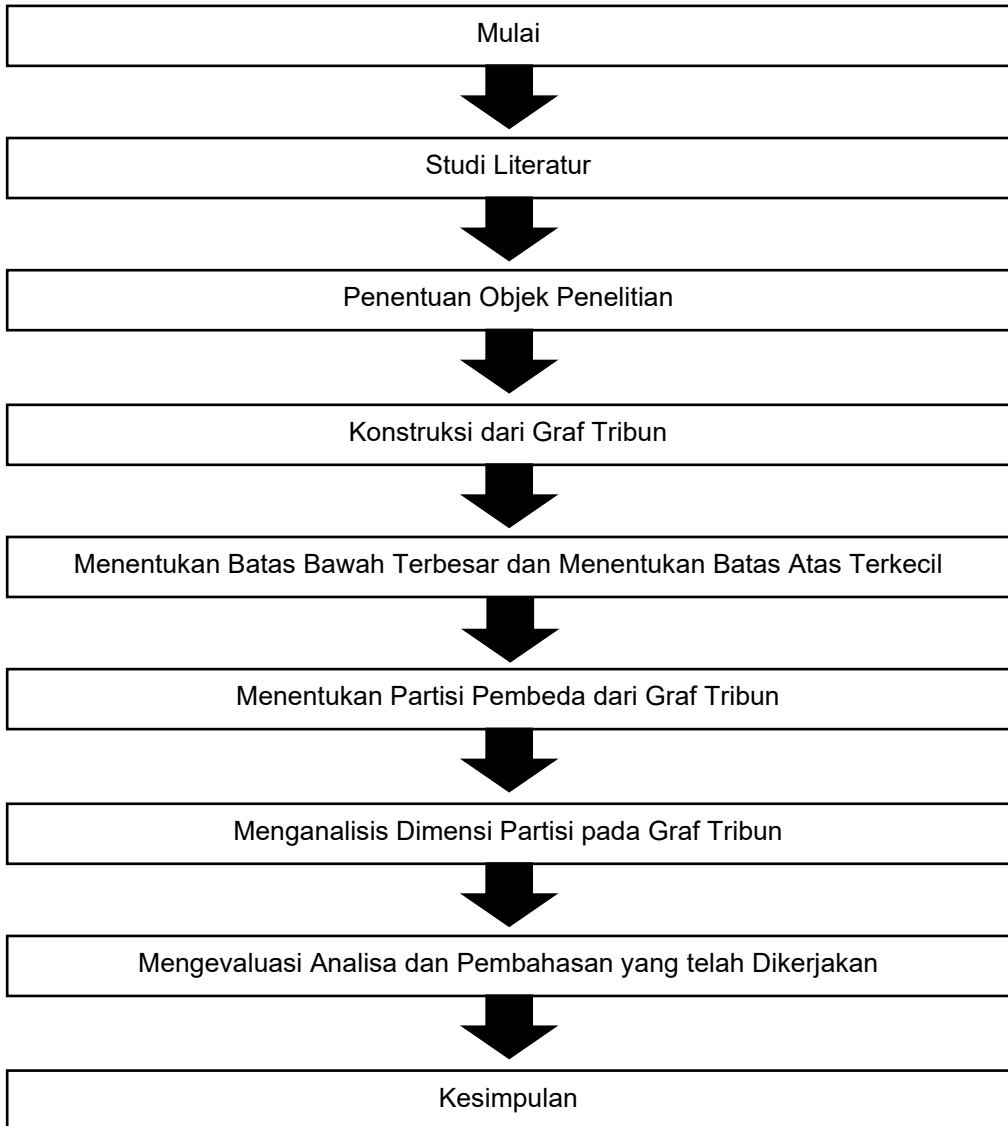
Adapun tahapan penelitian yang akan dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian ini adalah:

1. Pengumpulan jurnal dan literatur mengenai dimensi partisi pada graf melalui website maupun secara offline seperti di Perpustakaan FMIPA Universitas Hasanuddin.
2. Mengonstruksi graf tribun.
3. Menentukan partisi pembeda dari graf tribun.
4. Menentukan batas atas dan batas bawah dimensi partisi pada graf tribun. Jika batas bawah sama dengan batas atas partisi pembeda dari graf tribun, maka diperoleh dimensi partisinya.
5. Menganalisis dimensi partisi pada graf tribun.
6. Mengevaluasi terhadap analisa dan pembahasan yang telah dikerjakan sehingga dapat diperoleh suatu simpulan.



2.4 Diagram Alur Penelitian

Diagram alur penelitian mencakup Langkah-langkah pelaksanaan penelitian dari awal sampai akhir dapat dilihat pada gambar:



Gambar 2.1 Diagram alur penelitian

