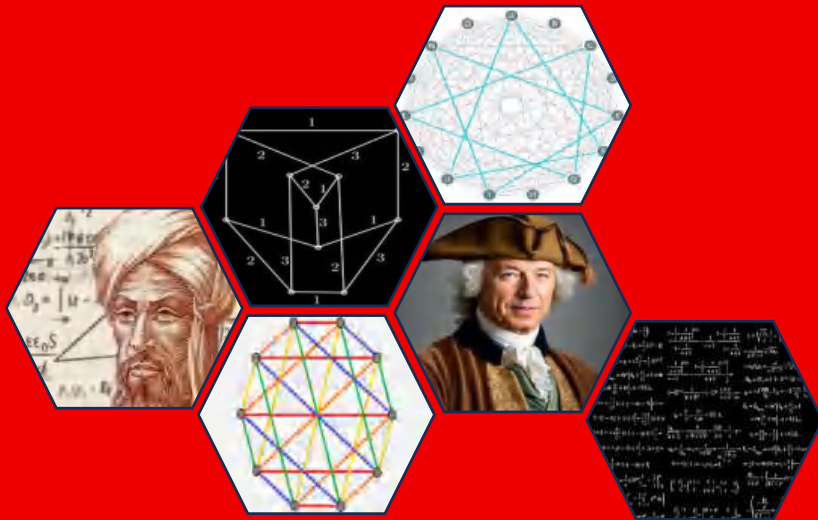


KLASIFIKASI GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG $\mathbb{Z}_n$



ANDI RAHMAT HIDAYAT

H011181318



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2025

Optimized using
trial version
www.balesio.com

KLASIFIKASI GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG $\mathbb{Z}_n$

ANDI RAHMAT HIDAYAT

H011181318



PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2025



Optimized using
trial version
www.balesio.com

KLASIFIKASI GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG $\mathbb{Z}_n$

ANDI RAHMAT HIDAYAT

H011181318

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana



Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2025



SKRIPSI
KLASIFIKASI GRAF PEMBAGI NOL PADA GELANGGANG $\mathbb{Z}_n$

ANDI RAHMAT HIDAYAT
H011181318

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana pada tanggal 24 Juli 2025
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

Program Studi Matematika

Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin



Mengesahkan:

Pembimbing Utama,

Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.
NIP. 197008072000031002

Mengetahui:

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 196804292002121001



PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Klasifikasi Graf Pembagi Nol Pada Gelanggang $\mathbb{Z}_n$ " adalah benar karya saya dengan arahan dari Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si. sebagai Pembimbing Utama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 24 Juli 2025



Andi Rahmat Hidayat



Optimized using
trial version
www.balesio.com

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur atas kehadiran Allah *Subhanahu Wa ta'ala* yang telah melimpahkan rahmat dan karunia, dan kesehatan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana.. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad *Sallallahu 'Alaihi Wasallam*.

Penulis menyadari bahwa skripsi yang berjudul “Klasifikasi Graf Pembagi Nol Pada Gelanggang $\mathbb{Z}_n$ ” ini dapat diselesaikan, karena adanya bantuan, dukungan, bimbingan, serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada orang tua penulis, **Andi M. Syatar** dan **Andi Nadrawati** yang telah memberikan doa dan dukungan dalam penyelesaian skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin, Bapak **Dr. Sci. Muhammad Zakir, S.Si., M.Si.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya, serta Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Matematika.
2. Bapak **Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing yang telah sabar membimbing, memberikan arahan, masukan, dan motivasi selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, dan **Dra. Nur Erawaty, M.Si.** selaku Tim Penguji atas kesediaannya untuk memberikan kritik, saran dan dukungan yang membangun kepada penulis dalam perbaikan skripsi ini.
4. Bapak dan Ibu **Dosen** Departemen Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta Bapak dan Ibu **Staff** Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
5. **Saudara/i Andi Muhammad Subhan, Andi Muhammad Fajar, Andi Dewi Chandra**, yang selalu mendukung dan memberikan semangat selama penulis menyelesaikan skripsi ini.
6. Teman-teman seperjuangan penulis **Ronaldo, S.Mat., Muh. Akbar Syam, S.Mat., Irfan Oddanial, S.Mat., Putri Ayuni, S.Mat., Alya Sakinah Arif, S.Mat., Hasnan Sutadi, S.Si.**, yang telah berjuang Bersama untuk menyelesaikan skripsi.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini di masa segala bantuan dan dukungan yang telah diberikan menjadi amal patkan balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT.



Penulis

Andi Rahmat Hidayat

ABSTRAK

Andi Rahmat Hidayat. **Klasifikasi graf pembagi nol pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$** (dibimbing oleh Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si, M.Si.)

Penelitian ini mengkaji struktur graf pembagi nol pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan batasan $n \in \{p, p^2, pq, p^3\}$, di mana p dan q adalah bilangan prima. Graf pembagi nol adalah graf tak berarah yang simpul-simpulnya adalah pembagi nol non-nol dalam gelanggang $\mathbb{Z}_n$, dan terdapat sisi antara dua simpul jika hasil kali keduanya adalah nol dalam gelanggang tersebut. Fokus penelitian adalah mempelajari pola keterhubungan, derajat simpul, komponen terhubung, dan diameter graf pembagi nol pada kasus-kasus khusus tersebut. Metode yang digunakan meliputi analisis aljabar gelanggang, teori graf, serta simulasi komputasi untuk memvisualisasikan dan menguji sifat-sifat graf. Hasil penelitian menunjukkan bahwa struktur graf pembagi nol sangat dipengaruhi oleh bentuk faktorisasi prima dari n , dengan karakteristik yang berbeda pada masing-masing bentuk p, p^2, pq, p^3 . Temuan ini memberikan kontribusi penting dalam memahami hubungan antara sifat aljabar gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dan struktur graf pembagi nolnya.

Kata kunci: Graf pembagi nol, gelanggang $\mathbb{Z}_n$, bilangan prima, teori graf, faktorisasi prima.



ABSTRACT

Andi Rahmat Hidayat. **A classification of zero divisor graphs in the ring $\mathbb{Z}_n$**
(supervised by Dr. Andi Muhammad Anwar, S.Si, M.Si.)

This research examines the structure of zero divisor graphs in the ring $\mathbb{Z}_n$ with the constraints $n \in \{p, p^2, pq, p^3\}$, where p and q are prime numbers. The zero divisor graph is an undirected graph whose vertices are the nonzero zero divisors in the ring $\mathbb{Z}_n$, and there is an edge between two vertices if their product is zero in that ring. The focus of the study is to analyze connectivity patterns, vertex degrees, connected components, and the diameter of the zero divisor graph in these specific cases. The methods used include ring algebra analysis, graph theory, and computational simulations to visualize and test the properties of the graphs. The results show that the structure of the zero divisor graph is strongly influenced by the prime factorization form of n , with distinct characteristics for each form p, p^2, pq, p^3 . These findings contribute significantly to understanding the relationship between the algebraic properties of the ring $\mathbb{Z}_n$ and the structure of its zero divisor graph.

Keywords: Zero divisor graph, ring $\mathbb{Z}_n$, prime numbers, graph theory, prime factorization.



DAFTAR ISI

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA.....	iv
UCAPAN TERIMA KASIH.....	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR NOTASI	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Batasan Masalah.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
1.6 Landasan Teori	3
1.4.1 Gelanggang.....	3
1.4.2 Graf	5
1.4.3 Graf Bipartit	7
1.4.4 Graf Lengkap	8
1.4.5 Graf Pembagi Nol	8
BAB II METODOLOGI PENELITIAN	10
2.1 Metode Penelitian	10
2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian	10
2.3 Prosedur Penelitian.....	10
2.4 Alur Kerja.....	11
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN.....	12
3.1 Konstruksi graf pembagi nol pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$	12
3.2 Klasifikasi graf pembagi nol pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$	15
graf pembagi nol pada graf $\mathbb{Z}_n$	18
.....	21
.....	21
.....	22
.....	23



DAFTAR TABEL

Tabel 1 Hasil perkalian $ab \bmod 10 = 0$	13
Tabel 2 Hasil perkalian $ab \bmod 25 = 0$	14



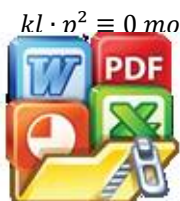
DAFTAR GAMBAR

Gambar 1	Graf sederhana.....	6
Gambar 2	Graf bipartit lengkap	7
Gambar 3	Graf bipartit lengkap $K_{m,n}$	8
Gambar 4	Graf lengkap K_6	8
Gambar 5	Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_6$	9
Gambar 6	Diagram penelitian.....	11
Gambar 7	Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$	13
Gambar 8	Graf lengkap K_{10}	14
Gambar 9	Graf $K_2 + N_6$	18



DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n . Artinya, semua bilangan bulat dari 0 sampai $n - 1$ di bawah operasi penjumlahan dan perkalian modulo n .
$\Gamma(\mathbb{Z}_n)$	Notasi untuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$. Simpulnya adalah elemen pembagi nol, dan sisi muncul jika hasil perkalian dua simpul $\equiv 0 \bmod n$.
v_i, v_j	Simpul (vertex) dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, yang merupakan elemen pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$.
$v_i \cdot v_j = 0$	Dua simpul v_i dan v_j terhubung dengan sisi jika hasil kali mereka $\equiv 0$ dalam $\mathbb{Z}_n$.
$a \equiv b \bmod n$	a kongruen dengan b modulo n , artinya sisa pembagian ($a - b$) habis dibagi n .
K_n	Graf lengkap dengan n simpul: semua simpul saling terhubung.
$K_{m,n}$	Graf bipartit lengkap: ada dua kelompok simpul berjumlah m dan n , dan setiap simpul dari satu kelompok terhubung ke semua simpul kelompok lain.
N_n	Graf kosong (<i>null graph</i>) dengan n simpul: tidak ada sisi sama sekali.
$K_a + N_b$	Join graph: gabungan graf lengkap K_a dan graf kosong N_b , di mana semua simpul K_a terhubung ke semua simpul N_b .
$\deg(v)$	Derajat simpul v , yaitu jumlah sisi yang terhubung ke simpul v .
p, q	Bilangan prima yang digunakan sebagai parameter dalam struktur $\mathbb{Z}_n$, misalnya $n \in \{p, p^2, pq, p^3\}$, dll.
$kl \cdot n^2 \equiv 0 \bmod n^2$	Hasil perkalian dua bilangan yang merupakan kelipatan p , akan habis dibagi p^2 , sehingga $\equiv 0 \bmod p^2$. Himpunan simpul dalam graf $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$, yaitu semua pembagi nol dari $\mathbb{Z}_n$ (tidak termasuk nol itu sendiri).



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan disiplin ilmu yang menjadi pondasi berbagai disiplin ilmu yang lain. Sejalan dengan perkembangan teknologi yang bersifat dinamis, para ilmuwan matematika juga terus melakukan penelitian dalam disiplin ilmu matematika dan mengembangkannya. Salah satu cabang matematika yang dapat diteliti lebih lanjut adalah teori graf. Di beberapa permasalahan, graf digunakan sebagai alat pemodelan untuk menjelaskan dan menyelesaikan permasalahan dengan baik. Sebab itu, penelitian tentang graf masih menjadi materi yang dikaji oleh banyak ilmuwan matematika hingga saat ini.

Studi mengenai graf menjadi topik bahasan yang cukup menarik belakangan ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah atau titik, dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau sisi. Graf dapat dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf pada berbagai bidang tersebut adalah untuk memodelkan permasalahan, misalnya memodelkan rangkaian listrik, isomer senyawa kimia karbon, dan pengujian program. Matematikawan juga menggunakan graf dan sifat-sifatnya dalam merepresentasikan suatu struktur aljabar, salah satunya gelanggang. Gelanggang merupakan suatu himpunan tak kosong yang membentuk grup komutatif terhadap operasi penjumlahan serta bersifat asosiatif dan tertutup terhadap operasi perkalian. (Rosen, 2012).

Graf merupakan pasangan himpunan simpul-simpul (vertices atau node) dan himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul. Sementara itu, gelanggang adalah himpunan tak kosong terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi sifat grup komutatif terhadap penjumlahan, asosiatif terhadap perkalian, dan bersifat distributif terhadap penjumlahan dan perkalian. Jika R gelanggang komutatif maka $a \neq 0, a \in R$ dikatakan pembagi nol jika terdapat $b \in R, b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$. (Gallian, 2016)

Graf pembagi nol merupakan struktur graf yang dibangun dari himpunan elemen pembagi nol suatu gelanggang $\mathbb{Z}_n$. Setiap simpul pada graf ini merepresentasikan elemen bukan nol, dan sisi terbentuk jika hasil kali dua elemen saling terhubung menghasilkan nol dalam $\mathbb{Z}_n$. Penelitian ini bertujuan untuk mengklasifikasikan bentuk graf pembagi nol dari berbagai $\mathbb{Z}_n$ dan menganalisis pola keterhubungan berdasarkan



Optimized using
trial version
www.balesio.com

dari gelanggang komutatif pertama kali digagas oleh Beck (1988) berjudul "Coloring of Commutative Ring". Dalam jurnalnya Beck membagi nol dari gelanggang komutatif dengan $\Gamma(R)$, yaitu suatu graf dimana adalah semua elemen dari R dan dua simpul terhubung jika hasilnya adalah nol. Dalam jurnalnya Anderson dan M.Naseer (1993)

mendefinisikan graf pembagi nol sebagai simpul dari graf pembagi nol-nya adalah semua elemen dari ring R dan dua simpul yang berbeda, misal x dan y terhubung oleh suatu sisi atau bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ untuk $x, y \neq 0$, dalam hal ini $x \cdot y$ merupakan unsur pembagi nol. Selanjutnya, graf pembagi nol dari gelanggang komutatif telah dibahas oleh Anderson & Livingston (1999)

Graf pembagi nol dinotasikan dengan ΓR , didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnya terdiri dari semua elemen himpunan pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif R , dan dua simpul a dan b akan bertetangga jika dan hanya jika $ab = 0$ (Nazza & Ghanem, 2014). Adapun penelitian terkait mengenai graf pembagi nol yaitu penelitian yang dilakukan oleh (Wicaksono & Sholeha, 2013), yang mengkaji bentuk graf pembagi nol dari beberapa gelanggang komutatif. Hasil yang diperoleh ialah konstruksi bentuk graf pembagi nol dari gelanggang yang himpunan pembagi nolnya berupa ideal penghilang dan beberapa kasus ketika graf yang terbentuk graf bintang dan graf lengkap. Hal inilah yang menarik penulis untuk mengetahui tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari suatu gelanggang spesifik yang belum dikaji, seperti gelanggang bilangan bulat modulo. Sehingga pada tulisan ini, akan dibahas beberapa karakteristik graf pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif, yaitu gelanggang bilangan bulat modulo ($\mathbb{Z}_n$).

Selanjutnya, Chattopadhyay & Patra (2019) juga telah mengkaji struktur graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ secara general. Dari hasil penelitian-penelitian tersebut, penulis ingin mengkaji lebih lanjut mengenai graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$, untuk n didefinisikan secara khusus sebagai dekomposisi perkalian dari bilangan prima. Selanjutnya, masalah yang muncul dalam pembahasan mengenai bentuk graf pembagi nol adalah menentukan pola umum dari bentuk graf tersebut, sekaligus menentukan pola umum jumlah simpul, jumlah sisi, dan jumlah derajat semua simpul dari graf yang terbentuk tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini, rumusan masalah yang akan dikaji :

1. Bagaimana mengonstruksi graf pembagi nol untuk gelanggang $\mathbb{Z}_n$?
2. Bagaimana klasifikasi graf dan total derajat dari graf pembagi nol untuk gelanggang $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_{pq}$, dan $\mathbb{Z}_{p^3}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka penelitian ini bertujuan:

1. Untuk mengkontruksi graf pembagi nol pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$.
2. Mengklasifikasikan graf dan total derajat dari graf pembagi nol untuk gelanggang $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_{pq}$, dan $\mathbb{Z}_{p^3}$.



1.4 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, penelitian ini hanya membahas graf pembagi nol yang dibentuk dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan n berupa hasil perpangkatan atau perkalian dari bilangan prima, seperti $n \in \{p, p^2, pq, p^3\}$. Dimana p dan q adalah bilangan prima berbeda. Graf yang dikaji merupakan graf tak berarah dan sederhana (tidak memiliki sisi ganda maupun gelang).

1.5 Manfaat Penelitian

1. Memberikan pemahaman yang lebih dalam tentang struktur graf pembagi nol yang terbentuk dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan berbagai bentuk dekomposisi n .
2. Menjadi referensi atau acuan bagi penelitian selanjutnya dalam bidang matematika diskrit, khususnya teori graf dan aljabar abstrak.
3. Menyediakan pola umum dalam mengonstruksi dan menganalisis graf pembagi nol pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$, sehingga dapat mempermudah kajian terhadap gelanggang lainnya.

1.6 Landasan Teori

1.6.1 Gelanggang

Gelanggang merupakan himpunan dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu, dan konsep ini menjadi dasar dalam memahami berbagai teori aljabar yang lebih kompleks serta aplikasinya dalam bidang matematika dan ilmu komputer.

Definisi 1.1 Sebuah himpunan tak kosong R terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ dikatakan gelanggang jika memenuhi:

1. $(R, +)$ membentuk grup komutatif (abelian) yaitu memenuhi:
 - a. Sifat asosiatif yaitu jika memenuhi $a + (b + c) = (a + b) + c$ untuk setiap a, b dan c unsur-unsur di R .
 - b. Terdapat unsur 0 di R sehingga $0 + a = a + 0$ untuk setiap a unsur di R .
 - c. Terdapat balikan dari a yaitu $-a$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ untuk setiap a unsur di R .
 - d. Sifat komutatif, yaitu jika memenuhi $a + b = b + a$ untuk setiap a dan b unsur-unsur di R .
2. $(R, \times)$ memenuhi sifat asosiatif, yaitu $a(bc) = (ab)c$ untuk setiap a, b dan c unsur unsur di R .
3. $(R, +, \times)$ memenuhi sifat distributif, yaitu $(a + b)c = ac + bc$ dan $a(b + c) = ab + ac$ untuk setiap a, b dan c unsur-unsur di R .



memuat unsur kesatuan $1 \neq 0 \in R$ dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk disebut gelanggang dengan unsur satuan. Jika untuk setiap a dan berlaku $ab = ba$ maka gelanggang R disebut gelanggang komutatif.

(Misri, 2010)

Definisi 1.2 Jika R gelanggang komutatif maka $a \neq 0$, $a \in R$ dikatakan pembagi nol jika terdapat $b \in R$, $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat tidak mempunyai pembagi nol. Tetapi 2 dan 3 adalah pembagi nol pada $\mathbb{Z}_6$. Pembagi lainnya adalah 4. Dengan demikian, $\mathbb{Z}_6$ adalah gelanggang komutatif dengan pembagi nol.

Definisi 1.3 Suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan e dengan $e \neq 0$ dan tidak mempunyai pembagi nol disebut daerah integral (integral domain).

Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat, gelanggang bilangan Rasional dan gelanggang bilangan real dengan penjumlahan dan perkalian bilangan bulat adalah sebuah integral domain atau daerah integral.

(Pangabeian, 2015)

Definisi 1.4 Sebuah gelanggang $(R, +, \cdot)$ adalah himpunan R dengan operasi biner tambah dan perkalian, yang didefinisikan pada sehingga memenuhi :

- $(R, +)$ adalah grup abelian
- operasi perkalian bersifat asosiatif, yakni $a(bc) = (ab)c$ untuk setiap $a, b, c \in R$
- $\forall a, b, c \in R$, hukum distribusi kiri $a(b + c) = ab + ac$, dan hukum distribusi kanan $(b + c)a = ba + ca$ berlaku.

Suatu gelanggang dikatakan komutatif apabila terhadap operasi perkaliannya berlaku sifat komutatif.

Definisi 1.5 Sebuah gelanggang R disebut gelanggang komutatif apabila berlaku $ab = ba$, untuk setiap $a, b \in R$. Pada gelanggang, terdapat suatu elemen yang menarik untuk dikaji karena mempunyai sifat seperti bilangan nol, dan dinamakan pembagi nol.

(Smith, 2016)

Definisi 1.6 Misalkan R suatu gelanggang. Suatu elemen tak nol $a \in R$ disebut elemen pembagi nol jika terdapat suatu unsur tak nol $b \in R$ sehingga $ab = 0$. Himpunan semua pembagi nol dari gelanggang R disimbolkan dengan $\mathbb{Z}(R)$. Gelanggang yang tidak memiliki elemen pembagi nol disebut daerah integral. Pada struktur aljabar grup terdapat substruktur yang dinamakan subgroup, maka pada gelanggang juga terdapat substruktur yang dinamakan ideal.

(Fraleigh, 2014)



ah elemen $a \in \mathbb{Z}_n$ adalah pembagi nol jika dan hanya jika 'iknya, jika $FPB(a, n) = 1$, maka a adalah unit dalam $\mathbb{Z}_n$, dan bukan

(Herstein, 2006)

Dengan kata lain:

- Elemen yang relatif prima dengan n ($FPB(a, n) \neq 1$) $\Rightarrow$ bukan pembagi nol, tapi justru memiliki invers (unit).
- Elemen yang tidak relatif prima dengan n ($FPB(a, n) > 1$) $\Rightarrow$ adalah pembagi nol.

Contoh 1.1

Misalkan $n = 12$, maka elemen-elemen $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$

- Elemen yang relatif prima terhadap 12 adalah: $\{1, 5, 7, 11\} \rightarrow$ mereka memiliki invers, jadi bukan pembagi nol
 - Elemen lainnya $(2, 3, 4, 6, 8, 9, 10)$ memiliki $FPB > 1$ dengan 12 $\rightarrow$ pembagi nol
- Jadi, misal $3 \cdot 4 = 12 \equiv 0 \pmod{12}$, sehingga 3 dan 4 adalah pembagi nol di $\mathbb{Z}_{12}$.

Fungsi Euler:

$\varphi(n)$ = jumlah bilangan bulat $k \in [1, n]$ yang $FPB(k, n) = 1$

Artinya, $\varphi(n)$ menghitung jumlah bilangan positif sampai n yang relatif prima dengan n .

Formula untuk $n = p^k$, dengan p prima dan $k \geq 1$.

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

- Dari semua bilangan $1, 2, \dots, p^{k-1} \times p = p^k$, yang tidak relatif prima dengan p^k adalah kelipatan p , yaitu:

$$p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1} \times p = p^k$$

- Banyaknya kelipatan p di antara 1 sampai p^k adalah: p^{k-1}
Jadi bilangan yang relatif prima dengan p^k adalah: $p^k - p^{k-1}$.

1.6.2 Graf

Graf merupakan salah satu struktur fundamental yang digunakan untuk memodelkan hubungan dan koneksi antar objek, sehingga pemahaman yang baik tentang graf sangat membantu dalam menyelesaikan berbagai masalah praktis, seperti jaringan komputer, transportasi, dan algoritma pencarian.

Definisi 1.7 Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau node) dan E adalah himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul.

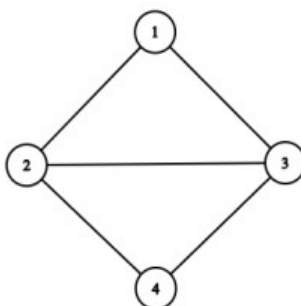
Dari definisi tersebut diketahui bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong, jika dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki minimal satu simpul yang hanya memiliki satu simpul dan tidak memiliki sisi disebut graf



Simpul pada graf dinyatakan dengan huruf kecil atau angka, sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dan v dalam graf dinyatakan (u, v) atau dengan lambang $e_1, e_2, \dots$ dengan kata lain, e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dan v dan dinyatakan $e = (u, v)$.

Definisi 1.8 *Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi gelang atau sisi ganda.*

Contoh 1.2 graf sederhana adalah pada Gambar 1.



Gambar 1 graf sederhana

Gambar 1 adalah graf dengan simpul V dan sisi E , dengan V dan E secara berurutan sebagai berikut.

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Jumlah simpul pada graf disebut kardinalitas graf dan dinyatakan dengan $|V|$, dan jumlah sisi dinyatakan dengan $|E|$. Pada Gambar 1, $|V| = 4$ dan $|E| = 5$.

Definisi 1.9 *Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang berurusan dengan simpul tersebut.*

Notasi: $d(v)$ menyatakan derajat simpul v . Pada Gambar :

$$d(1) = 2$$

$$d(2) = 3$$

$$d(3) = 3$$

$$d(4) = 2$$

Lemma 1.1 (Jabat Tangan) *Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. jika $G = (V, E)$, maka:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

jabat tangan, jumlah semua simpul pada Gambar 1 adalah:

$$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$



Definisi 1.10 Total derajat suatu graf adalah jumlah dari semua derajat simpul pada graf tersebut. Jika suatu graf G memiliki n simpul dan derajat dari simpul v_i adalah $d(v_i)$, maka:

$$\text{Total derajat} = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2 \cdot |E|$$

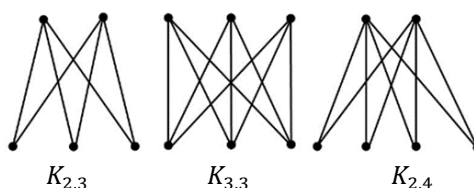
Dimana $|E|$ adalah jumlah sisi pada graf.

(Munir, 2016)

1.6.3 Graf Bipartit

Dalam teori graf, salah satu konsep dasar yang penting untuk dipahami adalah graf bipartit. Graf ini memiliki ciri khas bahwa himpunan simpulnya dapat dibagi menjadi dua himpunan bagian yang saling terpisah, yaitu V_1 dan V_2 , dengan ketentuan setiap sisi pada graf selalu menghubungkan simpul dari V_1 ke simpul dari V_2 . Hubungan antarsimpul di dalam himpunan yang sama tidak diperbolehkan. Definisi formalnya, sebagaimana dinyatakan pada Definisi 1.11 dan 1.12, adalah sebagai berikut:

Definisi 1.11 Graf yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut graf bipartit dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Jika setiap simpul di V_1 dan V_2 saling terhubung, maka graf tersebut disebut graf bipartit lengkap.

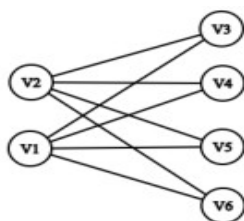


Gambar 2 Graf Bipartit Lengkap

(Munir, 2010)

Definisi 1.12 Sebuah graf G dikatakan bipartit jika $V(G)$ memuat suatu partisi menjadi dua kelas sedemikian sehingga titik-titik di kelas partisi yang sama tidak boleh bertetangga. Sebuah graf bipartit sederhana yang setiap dua titik dari kelas partisi berbeda bertetangga disebut graf bipartit lengkap. Misalkan $K_{m,n}$ notasi graf bi-partit lengkap atas dua himpunan terpisah tak kosong V_1 dan V_2 dengan $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$.





Gambar 3 Graf bipartit lengkap $K_{m,n}$

(Munir, 2016)

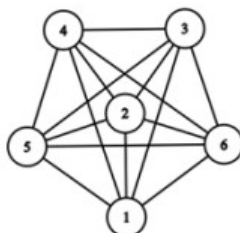
1.6.4 Graf Lengkap

Graf lengkap ini memiliki sifat unik dan sering digunakan sebagai dasar pembahasan dalam berbagai masalah kombinatorik dan graf.

Definisi 1.13 *Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan buah n simpul dilambangkan dengan K_n .*

(Munir, 2010)

Contoh 1.3 Graf K_6 yang terdiri dari 6 simpul dan 15 sisi



Gambar 4 Graf lengkap K_6

1.6.5 Graf Pembagi Nol

Graf pembagi nol merupakan salah satu konsep penting dalam teori graf yang menghubungkan struktur graf dengan konsep aljabar, khususnya pada gelanggang komutatif.



an R merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan ialah $\mathbb{Z}(R)$. sebuah graf pembagi nol, $\Gamma(R)$ adalah graf sederhana. Sempurnanya adalah anggota pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif. Misalkan x dan y dikatakan terhubung jika dan hanya jika $x \cdot y =$

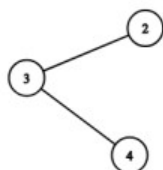
(Soleha, Setyowati, & Wicaksono, 2015)

Sebagai contoh, gelanggang $\mathbb{Z}_3$ yang beranggotakan $\{0, 1, 2\}$ tidak memiliki pembagi nol, sehingga gelanggang $\mathbb{Z}_3$ tidak memiliki bentuk graf pembagi nol atau grafnya adalah graf kosong. Sementara itu, untuk gelanggang $\mathbb{Z}_6$ memiliki anggota pembagi nol yaitu 2, 3 dan 4 dengan relasi pasangan sebagai berikut.

$$2 \cdot 3 = 0$$

$$3 \cdot 4 = 0$$

Dari anggota pembagi nol tersebut, diperoleh bentuk graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_6$ sebagai berikut.



Gambar 5 Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_6$

Dari Gambar 4 terlihat bahwa graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_6$ berbentuk bipartit lengkap $K_{1,2}$.

Definisi 1.15 *Relatif prima atau koprima adalah dua bilangan bulat yang memiliki faktor Persekutuan terbesar (FPB) = 1. Artinya, kedua bilangan tersebut tidak memiliki faktor pembagi selain 1.*

Misalnya, 8 dan 15 adalah relatif prima karena $\text{FPB}(8, 15) = 1$.

(Purwanto, 2015)



BAB II METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah penelitian menggunakan metode studi pustaka, yaitu kegiatan ilmiah dengan melakukan pengamatan fenomena, kajian pustaka, pengumpulan, pengolahan dan analisis data dari pustaka untuk mendapatkan kesimpulan terhadap fenomena yang sedang diteliti.

Dalam hal ini, dikumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, artikel, dan lain-lain. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji sumber referensi yang berkaitan dengan gelanggang komutatif dan teori graf, serta jurnal atau artikel yang mengkaji topik graf pembagi nol dari gelanggang komutatif.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian yang dilakukan bertempat di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Kota Makassar dan waktu penelitian dimulai sejak Juli 2025.

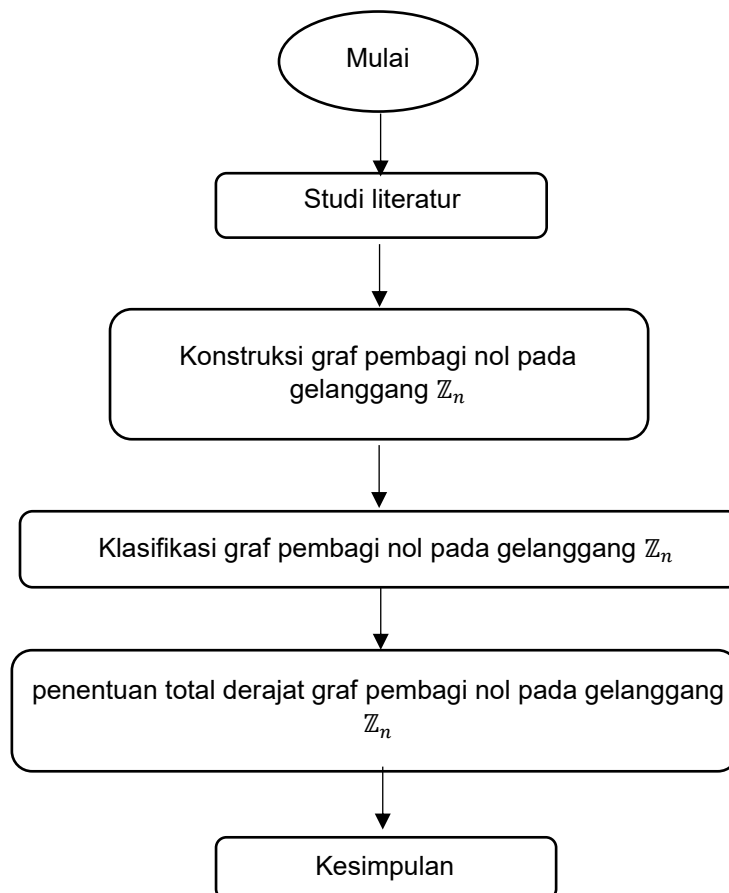
2.2 Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Pengumpulan Jurnal dan Literatur Terkait Penelitian
Studi literatur dengan mengumpulkan dan menganalisis berbagai buku, jurnal ilmiah dan artikel-artikel yang relevan dengan topik penelitian.
2. Analisis Literatur
Melakukan evaluasi terhadap berbagai sumber ilmiah yang telah dikumpulkan dalam studi literatur untuk memahami secara mendalam kontribusi, keterbatasan dan relevansi dari penelitian yang ada terhadap topik yang sedang diteliti.
3. Konstruksi Teori
Konstruksi teori ini akan dilakukan identifikasi masalah atau fenomena yang akan diteliti. Prinsip-prinsip penalaran secara induktif dan deduktif akan digunakan secara keseluruhan, mulai dari reduksi data, paparan data dan penarikan kesimpulan.
4. Verifikasi Hasil
Untuk memastikan bahwa hasil penelitian benar, dapat diandalkan, dan tidak dipengaruhi oleh faktor-faktor yang tidak terkendali serta menyajikan semua hasil pada tahap-tahap sebelumnya.
5. Penyempurnaan
Memperbaiki dan meningkatkan kualitas penelitian yang telah dilakukan serta akan tuk Skripsi menggunakan Microsoft Word



2.4 Alur kerja



Gambar 6 Diagram Penelitian

