

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistical Process Control (SPC) memiliki peran penting untuk mengendalikan, mengukur dan mendeteksi perubahan dalam suatu proses. Dalam kehidupan sehari-hari, terdapat banyak penerapan di berbagai bidang seperti industri (Goecks et al., 2024), ilmu komputer dan telekomunikasi (Ishola & Olabode, 2024), ekonomi dan keuangan (Golosnoy et al., 2010), kesehatan (Perez-Benitez et al., 2023), dan lain-lain. Peningkatan proses dan teknologi modern dikembangkan untuk menilai kualitas sekaligus mengurangi jumlah ketidaksesuaian atau cacat. Untuk mengetahui tingginya angka kecacatan masih dalam batas kontrol atau tidak diperlukan suatu metode statistik, yaitu dengan menggunakan alat berupa peta kendali.

Peta kendali pertama kali diperkenalkan oleh Dr. Walter A. Shewhart dari Bell Telephone Laboratories, Amerika Serikat, tahun 1924. Peta kendali terdiri dari dua jenis, yaitu peta kendali variabel dan peta kendali atribut. Secara umum terdapat dua jenis peta kendali yaitu peta kendali variabel dan peta kendali atribut. Peta kendali variabel digunakan jika karakteristik kualitas yang diamati dapat diukur (*measurable*), sedangkan peta kendali atribut digunakan jika karakteristik kualitas yang diamati hanya pada kategori (cacat atau tidak cacat) atau bersifat kualitatif. Peta kendali ini bekerja hanya dengan menggunakan informasi yang terkandung dalam titik pengamatan terakhir. Selain itu peta kendali Shewhart juga mengabaikan informasi dari seluruh barisan titik sampel sebelumnya. Hal ini membuat peta kendali Shewhart kurang efektif digunakan untuk mendeteksi adanya pergeseran rata-rata yang kecil ($\leq 1,5\sigma$) yang mengindikasikan adanya keadaan tidak terkendali pada proses produksi. Namun dalam proses produksi terdapat pergeseran-pergeseran nilai atau terjadi suatu rentang proses yang kecil maka peta kendali Shewhart kurang sensitif dalam mendeteksinya. Oleh karena itu, dibutuhkan peta kendali lain yang dapat mengatasi masalah keragaman hasil produksi saat adanya pergeseran kecil dalam produksi, dan peta kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) merupakan alternatif untuk masalah tersebut (Montgomery, 2014).

Peta kendali EWMA yang diperkenalkan oleh S. W. Roberts (1959) merupakan salah satu peta kendali yang digunakan untuk mendeteksi adanya pergeseran kecil dalam suatu proses (Montgomery, 2014). Pada peta kendali EWMA, data yang terbaru berhubungan dengan data yang telah ada sebelumnya dimana pada peta kendali EWMA setiap data diberi bobot λ . Dalam hal ini peta kendali EWMA diharapkan akan lebih baik daripada peta kendali Shewhart dalam memprediksi pergeseran kecil. Dari jenisnya data kualitas tidak selalu dalam bentuk data kontinu tapi juga dalam bentuk data atribut. Dalam prakteknya, data atribut sering dipakai karena lebih mudah dalam *monitoring* ketidaksesuaian. Data atribut dapat dihasilkan ketika *monitor* urutan jumlah diskrit seperti memeriksa jumlah item yang tidak sesuai per unit. Data hitungan ini sering dimodelkan dengan distribusi

Poisson (Abujiya et al., 2016). Pada umumnya, pengamatan dalam *statistical process control* diasumsikan bersifat saling bebas. Akan tetapi, asumsi ini sering dilanggar dalam prakteknya (Montgomery, 2014).

Peta kendali EWMA dan pengembangannya telah banyak digunakan dalam *monitoring* berbagai jenis proses, di antaranya Yu et al. (2020) yang menggunakan peta kendali EWMA dalam proses *forecasting*. Akhundjanov & Pascual (2017) juga mengaplikasikan pada data berdistribusi Poisson multivariat yang berkorelasi. Penelitian lainnya juga dilakukan untuk mengembangkan metode modifikasi peta kendali EWMA. Di antaranya Patel & Divecha (2011) yang memperkenalkan Peta Kendali Modified EWMA yang lebih sensitif untuk data dengan autokorelasi ataupun saling bebas. Kemudian Herdiani et al. (2018) dengan pengembangan peta kendali Modified EWMA yang dapat mendeteksi pergeseran lebih baik pada data yang berautokorelasi untuk AR(1) utamanya pada $\lambda < 0,5$. Anwar et al. (2021) mengkombinasikan Peta Kendali EWMA dan CUSUM yang disebut Peta Kendali *Combined Mixed EWMA–CUSUM Auxiliary Information Based* (CMECA_{AIB}) yang hasilnya lebih baik dari penggabungan lainnya antara EWMA dan CUSUM dalam mendapati sinyal *out of control*. Arslan et al. (2022) mengembangkan Adaptive EWMA dengan *Auxiliary Information Based* menjadi IAEWMA_{AIB} yang dirancang dengan mengestimasi pergeseran yang tidak diketahui menggunakan statistik Hybrid EWMA, dengan konstanta *smoothing* diperbarui secara adaptif. Alevizakos et al. (2024) juga menawarkan *Exponentiated EWMA* yang lebih efektif untuk pergeseran yang lebih banyak.

Tsai et al. (2006) menawarkan metode *Improved Square Root Transformation* (ISRT) untuk diterapkan pada peta kendali klasik atau Shewhart. Penelitiannya menyatakan bahwa penerapan metode baru berdasarkan ISRT hampir bertepatan dengan peta kendali Shewhart. Meskipun peta kendali dengan ISRT memplot statistik transformasi akar kuadrat dan bukan nilai aslinya, hubungan antara statistik yang diplot dan statistik yang diinginkan mudah untuk diinterpretasikan. Arumsari & Rifqi (2020) yang menggunakan metode ISRT untuk mengevaluasi performa peta kendali *p*-EWMA dalam mendeteksi pergeseran kecil dalam proses produksi sepatu di PT. Primarindo Asia Infrastruktur Tbk, dan menunjukkan bahwa *p*-EWMA lebih baik, dengan asumsi data berdistribusi normal. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Sukparungsee & Mititelu (2016) dalam penelitiannya pada data berdistribusi Poisson menyimpulkan bahwa peta kendali ISRT-c EWMA cocok digunakan sebagai peta kendali alternatif. Dengan batas kendali dihitung dan dimodifikasi yang mudah diterapkan dan berguna untuk *monitoring* perubahan parameter. Hasil perhitungan numerik menunjukkan bahwa kinerja peta kendali ISRT-c EWMA lebih unggul dari ISRT-c dan Poisson EWMA untuk nilai pergeseran kecil dan sedang. Sebaliknya grafik ISRT-c memiliki kinerja yang lebih baik pada nilai pergeseran yang besar.

Dalam konteks penerapan peta kendali EWMA untuk data kualitas udara, khususnya pada Indeks Standar Pencemar Udara (ISPU) parameter karbon monoksida (CO), metode ini dapat memberikan wawasan penting. Data ISPU sering kali menunjukkan pola musiman atau tren yang dapat menandakan pergeseran dalam tingkat polusi udara, yang mungkin tidak terdeteksi hanya dengan analisis sederhana. Peta kendali EWMA, dengan kemampuannya untuk mengidentifikasi pergeseran kecil dalam data, sangat relevan dalam hal ini, karena dapat memonitor perubahan konsentrasi indeks CO antar waktu dengan lebih sensitif dibandingkan peta kendali Shewhart (Ahmad, 2015). Peta kendali EWMA dapat memberikan indikasi awal tentang perubahan signifikan dalam kualitas udara, yang memungkinkan pihak terkait untuk mengambil langkah mitigasi lebih cepat. Penerapan metode ini diharapkan tidak hanya mengidentifikasi lonjakan konsentrasi CO secara tepat, tetapi juga bisa menjadi acuan untuk mengkaji pengaruh faktor-faktor lain seperti kondisi cuaca, kebijakan lingkungan, dan aktivitas manusia, yang mungkin berkontribusi pada perubahan tingkat polusi (Liu & Zi, 2021).

Penelitian ini didorong oleh beberapa studi sebelumnya sebagaimana di atas yang menunjukkan efektivitas berbagai modifikasi peta kendali dalam penerapannya pada berbagai konteks dan jenis data. Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah Indeks Standar Pencemar Udara di Kota Jakarta. Analisis awal menunjukkan bahwa data ini berdistribusi Poisson. Berdasarkan karakteristik tersebut, peneliti akan mengkaji penerapan peta kendali Modified EWMA dengan ISRT-c pada data ini dengan judul **“Peta Kendali Improved Square Root – Poisson Modified Exponentially Weighted Moving Average.”**

1.2 Batasan Masalah

Ada pun batasan dalam penelitian ini adalah:

1. Data yang digunakan merupakan data Indeks Standar Pencemar Udara dengan parameter karbon monoksida (CO) di Kota Jakarta periode Januari – Juli 2024.
2. Nilai pembobot yang digunakan dalam penelitian ini di antaranya $\lambda = 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1; 0,2$.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan peta kendali *Poisson Modified Exponentially Weighted Moving Average* berdasarkan metode *Improved Square Root Transformation* untuk memantau Pencemaran Udara di Kota Jakarta periode Januari – Juli 2024.
2. Mendapatkan peta kendali yang lebih baik dalam penerapannya pada data Pencemaran Udara di Kota Jakarta periode Januari – Juli 2024.

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan wawasan untuk mengembangkan pengetahuan tentang peta kendali dengan metode yang ada, utamanya peta kendali *Modified*

Exponentially Weighted Moving Average berdasarkan metode *Improved Square Root Transformation* sehingga dapat digunakan oleh kalangan luas.

2. Memberikan informasi kepada Direktorat Pengendalian Pencemaran Udara Jakarta apabila terjadi tingkat ketidaksesuaian yang kecil, maka dapat diketahui peta kendali yang baik untuk memantau pencemaran udara.

1.4 Teori

Pada bagian ini, akan dibahas beberapa teori yang menjadi dasar dalam penelitian ini. Kajian teori ini mencakup konsep-konsep kunci seperti distribusi Poisson, Peta Kendali EWMA dan metode ISRT yang dirujuk dari berbagai literatur, termasuk buku oleh Walpole et al. (2012) dan Montgomery (2014). Selain itu, beberapa artikel ilmiah juga akan digunakan untuk mendukung dan memperluas pembahasan teori yang relevan dengan topik penelitian ini.

1.4.1 Distribusi Poisson

Dalam mempelajari teori peluang dikenal adanya distribusi peluang diskrit. Fungsi $f(x)$ merupakan fungsi massa peluang variabel acak diskrit X bila untuk setiap kemungkinan hasil x , berlaku:

1. $P(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = p(x)$

Distribusi Poisson adalah distribusi peluang diskrit yang menyatakan peluang jumlah peristiwa yang terjadi pada periode waktu tertentu apabila rata-rata kejadian tersebut diketahui dan dalam waktu yang saling bebas. Percobaan Poisson adalah percobaan yang terjadi selama selang waktu tertentu atau di area tertentu, dengan menghasilkan nilai untuk variabel acak X . Interval waktu yang dimaksud misalnya: satu menit, satu hari, satu minggu, satu bulan, satu tahun, dan seterusnya. Sedangkan yang dimaksud dengan area yang ditentukan adalah luas, volume, bagian material, dan lain-lain. Misalnya:

- a. Jumlah nasabah yang mengantri di bank X selama 3 jam;
- b. Jumlah pelanggar lalu lintas di Kota Makassar selama Februari 2024;
- c. Jumlah kejadian gempa bumi di Sulawesi selama 2023.

Karakteristik percobaan Poisson adalah sebagai berikut:

- a. Jumlah kejadian dalam satu interval waktu atau area tertentu tidak dipengaruhi oleh kejadian di interval waktu atau area lain yang terpisah. Ini berarti proses Poisson mengabaikan kejadian sebelumnya.
- b. Peluang terjadinya satu kejadian dalam interval waktu yang sangat singkat atau area kecil sebanding dengan panjang interval waktu atau ukuran area tersebut, dan tidak dipengaruhi oleh kejadian di luar interval waktu atau area tersebut.

- c. Peluang terjadinya lebih dari satu kejadian dalam interval waktu yang sangat singkat atau area kecil sangat kecil sehingga bisa diabaikan.

Bilangan X yang menyatakan banyaknya hasil percobaan dalam suatu percobaan Poisson disebut variabel acak Poisson dan distribusi peluangnya disebut distribusi Poisson. Karena nilai-nilai peluangnya hanya bergantung pada μ , yaitu rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau daerah yang diberikan.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, e = 2,71828 \dots$$

Keterangan:

X : Variabel acak

x : Jumlah kejadian

μ : Rata-rata banyaknya kejadian tiap satuan waktu

1.4.2 Peta Kendali *Exponentially Weighted Moving Average*

Peta kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) diperkenalkan pertama kali oleh S. W. Roberts pada tahun 1959 yang digunakan terutama untuk mendeteksi adanya pergeseran nilai *mean* yang kecil dalam suatu proses, dan optimal bagi proses dengan *mean*-nya dalam periode t yang berhubungan dengan *mean* dalam periode ke- $(t - 1)$. EWMA juga merupakan salah satu peta kendali yang banyak diterapkan khususnya pada kasus *time series* dengan asumsi pengamatan dari proses pada variabel $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Nilai EWMA didefinisikan sebagai berikut:

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Z_{t-1}$$

$$Z_0 = \mu$$

Keterangan:

Z_t : Nilai EWMA pada pengamatan ke- t

λ : Nilai pembobot yang bernilai antara $0 < \lambda < 1$.

X_t : Rata-rata banyaknya kejadian tiap satuan waktu

t : Nilai pada pengamatan ke- t

Z_{t-1} : Nilai EWMA sebelumnya

Z_0 : Nilai awal

μ : Rata-rata

Upper Control Limit (UCL), *Center Line* (CL), dan *Lower Control Limit* (LCL) peta kendali EWMA dapat ditulis:

$$UCL_{EWMA} = \mu + L\sqrt{\text{Var}(Z_t)} \quad (1)$$

$$CL_{EWMA} = E(Z_t) \quad (2)$$

$$LCL_{EWMA} = \mu - L\sqrt{Var(Z_t)} \quad (3)$$

Dengan rata-rata dan variansi EWMA masing-masing adalah:

$$E(Z_t) = \mu \quad (4)$$

$$Var(Z_t) = \frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda))^{2t} \quad (5)$$

Setelah mensubstitusikan Persamaan (1), (2), dan (3) ke Persamaan (4) dan (5), didapatkan CL, UCL, dan LCL peta kendali EWMA:

$$UCL_{EWMA} = \mu + L \sqrt{\left(\frac{\mu\lambda}{2-\lambda}\right) (1 - (1-\lambda)^{2t})}$$

$$CL_{EWMA} = \mu$$

$$LCL_{EWMA} = \mu - L \sqrt{\left(\frac{\mu\lambda}{2-\lambda}\right) (1 - (1-\lambda)^{2t})}$$

Keterangan:

- μ : Rata-rata
 t : Pengamatan ke- t

1.4.3 Peta Kendali *Modified Exponentially Weighted Moving Average*

Peta kendali Modified EWMA dikembangkan oleh Patel pada tahun 2011. Sifat-sifat yang diinginkan dari peta kendali adalah mudah untuk diterapkan dan efektif untuk mendeteksi pergeseran dari semua ukuran sesuai spesifikasi. Patel mengkombinasikan peta kendali Shewart dan EWMA yang berguna untuk mendeteksi perubahan kecil dari proses industri. Peta kendali Modified EWMA menurut Patel & Divecha (2011) adalah:

$$Z_t = \lambda X_t + (1-\lambda)Z_{t-1} + (X_t - X_{t-1}) \quad (6)$$

$$Z_0 = \mu \quad (7)$$

Dengan *control limits* berupa UCL, CL, dan LCL peta kendali Modified EWMA dapat ditulis (Silpakob et al., 2023):

$$UCL_{Mod EWMA} = \mu + L\sqrt{Var(Z_t)} \quad (8)$$

$$CL_{Mod EWMA} = E(Z_t) \quad (9)$$

$$LCL_{Mod\ EWMA} = \mu - L\sqrt{Var(Z_t)} \quad (10)$$

dengan rata-rata dan variansi Modified EWMA adalah:

$$E(Z_t) = \mu \quad (11)$$

$$Var(Z_t) = \frac{\lambda}{2 - \lambda} + \frac{2\lambda(1 - \lambda)}{2 - \lambda} \quad (12)$$

Setelah mensubstitusikan Persamaan (6), (7), dan (8) ke Persamaan (9) dan (10), didapatkan UCL, CL, dan LCL peta kendali Modified EWMA:

$$UCL_{Mod\ EWMA} = \mu + L\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} + \frac{2\lambda(1 - \lambda)}{2 - \lambda}} \quad (13)$$

$$CL_{Mod\ EWMA} = \mu \quad (14)$$

$$LCL_{Mod\ EWMA} = \mu - L\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} + \frac{2\lambda(1 - \lambda)}{2 - \lambda}} \quad (15)$$

1.4.4 Deret Taylor

Metode ISRT yang diperkenalkan oleh Tsai Tzong-ru pada tahun 2006 memerlukan Deret Taylor dalam membentuk batas kendali baru pada peta kendali atribut. Deret Taylor merupakan representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi disuatu titik, yang digunakan untuk menurunkan metode numerik. Salah satu kegunaan deret Taylor yaitu memberikan solusi hampiran dari suatu fungsi $f(x)$ dalam bentuk polinom, sehingga nilai dari suatu fungsi dapat didekati seperti terdapat beberapa fungsi $f(x)$ yang kompleks sehingga nilai eksaknya tidak dapat ditentukan dengan cara yang sederhana. Misalkan fungsi $f(x) = \ln(a)$ akan sulit untuk dihitung tanpa bantuan kalkulator atau komputer. Oleh karena itu, $f(\hat{x})$ dapat diestimasi oleh deret Taylor (Barrio et al., 2011). Andaikan f dan semua turunannya $f', f'', f''', \dots$ adalah fungsi di dalam selang tertutup $[a, b]$. Misalkan $x \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar a dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diekspansi ke dalam deret Taylor (Chang, 2014):

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Deret Taylor orde ke-2 dapat ditulis:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + R_n(x) \quad (16)$$

untuk,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad x < c < \hat{x}$$

dengan $R_n(x)$ disebut galat.

Hasil dengan metode numerik adalah nilai pendekatan terhadap nilai eksak. Oleh karena itu, nilai numerik mengandung galat. Galat adalah selisih antara nilai eksak dan nilai numerik, atau nilai kesalahan yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\varepsilon = \hat{x} - x$$

Keterangan:

- ε : Galat
- x : Nilai eksak (sebenarnya)
- $\hat{x}$: Nilai numerik (pendekatan)

Apabila tingkat besaran dari nilai yang diperiksa diabaikan, maka dikenal sebagai galat absolut (ε_A) yang dapat didefinisikan:

$$\varepsilon_A = |x - \hat{x}|$$

Untuk mengatasi interpretasi nilai galat, maka galat harus dinormalkan terhadap nilai eksaknya yang dinamakan galat relatif dengan definisi:

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon_A}{x}$$

Dalam prakteknya, kadang tidak diketahui nilai eksaknya sehingga galat harus dinormalkan terhadap nilai pendekatan yang disebut galat relatif pendekatan, yaitu:

$$\varepsilon_{RP} = \frac{\varepsilon_A}{\hat{x}}$$

1.4.5 Improved Square Root Transformation

Tsai et al. (2006) memperkenalkan metode *Improved Square Root Transformation* (ISRT) untuk mengatasi kinerja yang kurang dari peta kendali klasik pada umumnya. Pada dasarnya, penggunaan metode ini memplot nilai statistik berupa akar kuadrat dari nilai aslinya.

Misalkan X variabel acak dengan ukuran sampel n dan parameter μ , maka $\hat{\mu} = \frac{\bar{x}}{n}$ adalah ketidaksesuaian berdistribusi Poisson dengan rata-rata μ dan standar deviasi $\sqrt{\mu}$. Ketika nilai ketidaksesuaian kecil, maka pendekatan normal menjadi kurang memadai karena memiliki kemiringan (*skewness*) yang menyebabkan asimetris. Oleh karena itu, untuk memperbaiki kemiringan, akan digunakan metode *Improved Square Root Transformation* dalam membentuk peta kendali untuk meningkatkan akurasi.

Misalkan proses pengamatan diambil dari data dimana x_t adalah nilai pengamatan ke- t dan μ yang merupakan rata-rata ketidaksesuaian, diubah ke dalam bentuk akar kuadrat yaitu $\sqrt{x_t}$ dan $\sqrt{\mu}$. Selain itu, batas kendali yang pada umumnya hanya menggunakan ukuran 3σ diekspansi menggunakan deret Taylor orde 2. Jika $g(\hat{\mu}) = \sqrt{\hat{\mu}}$, maka berdasarkan Persamaan (16), diperoleh:

$$g(\hat{\mu}) = g(\mu) + g'(\mu)(\hat{\mu} - \mu) + \frac{g''(\mu)}{2}(\hat{\mu} - \mu)^2$$

$$(\sqrt{n})g'(\mu)(\hat{\mu} - \mu) = \sqrt{n} \left[g(\hat{\mu}) - g(\mu) + \frac{1}{2}g''(\mu)(\hat{\mu} - \mu)^2 \right]$$

Berdasarkan teorema limit pusat diketahui,

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_x)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

dengan,

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_x) \sim N(0, \sigma^2)$$

Dalam hal ini, didapatkan bahwa,

$$\sqrt{n} \left[g(\hat{\mu}) - g(\mu) + \frac{1}{2}g''(\mu)(\hat{\mu} - \mu)^2 \right]$$

dan,

$$\sqrt{n} g'(\mu)(\hat{\mu} - \mu)$$

memiliki distribusi asimtotik yang sama, yaitu:

$$\sqrt{n} \left[g(\hat{\mu}) - g(\mu) + \frac{1}{2}g''(\mu)(\hat{\mu} - \mu)^2 \right] \sim N(0, (n)[g'(\mu)]^2 \mu)$$

Serta diketahui $\varepsilon = |\hat{\mu} - \mu|$ sebagai kesalahan estimasi absolut, dan $\sigma_{\hat{\mu}} = \sqrt{Var(\hat{\mu})} = \sqrt{\mu}$ sebagai standar deviasi dari jumlah ketidaksesuaian. Sehingga persamaan standarisasi:

$$Z = \frac{g(\hat{\mu}) - g(\mu)}{[g'(\mu)] \sigma_{\hat{\mu}}} - \frac{g''(\mu)\varepsilon^2}{2[g'(\mu)] \sigma_{\hat{\mu}}} \sim N(0, 1)$$

Dengan demikian, hasil penerapan ISRT membentuk peta kendali dengan *center line* dan *control limit*,

$$UCL_{ISRT-c} = g(\mu) + 3[g'(\mu)] \sigma_{\hat{\mu}} + \frac{g''(\mu)}{2} \varepsilon^2$$

$$CL_{ISRT-c} = g(\mu)$$

$$LCL_{ISRT-c} = g(\mu) - 3[g'(\mu)] \sigma_{\hat{\mu}} + \frac{g''(\mu)}{2} \varepsilon^2$$

Sehingga didapatkan,

$$UCL_{ISRT-c} = \sqrt{\mu} + \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{8\sqrt{\mu}} \right)$$

$$CL_{ISRT-c} = \sqrt{\mu}$$

$$LCL_{ISRT-c} = \sqrt{\mu} - \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{8\sqrt{\mu}} \right)$$

1.4.6 Average Run Length Markov Chain

Average Run Length (ARL) adalah jumlah rata-rata titik sampel yang harus diplot pada peta kendali sebelum suatu titik menunjukkan keadaan tak terkendali. Semakin kecil ARL, maka semakin kecil pula ekspektasi jumlah sampel yang diperlukan sampai terdapat sinyal *out of control*. Hal ini berarti semakin kecil ARL, semakin cepat peta kendali mendeteksi adanya pergeseran. ARL merupakan ukuran yang sering digunakan dalam pengendalian kualitas statistik untuk mengevaluasi dan membandingkan kinerja berbagai peta kendali (Han & Tsung, 2009). Dengan adanya ARL, jenis peta kendali terbaik dapat dipilih. Jika ARL dalam kendali, semakin besar nilai ARL maka semakin baik jenis peta kendali yang bersangkutan.

ARL juga dapat digunakan untuk membandingkan akurasi untuk lebih dari satu jenis peta kendali pada suatu distribusi. Hal ini dapat dilakukan dengan menilai tingkat sensitivitas peta kendali untuk mendeteksi keadaan *in control* (dalam kendali) maupun *out of control* (di luar kendali). Pada keadaan *out of control*, ARL yang semakin kecil menunjukkan akurasi atau sensitivitas dalam mendeteksi keadaan di luar kendali yang lebih baik. Sebaliknya, pada keadaan *in control*, ARL yang semakin besar menunjukkan akurasi atau sensitivitas dalam mendeteksi keadaan *in control* yang lebih baik (Talordphop et al., 2023).

Bila pengamatan yang diambil dari proses itu independen, maka penentuan ARL mudah ditentukan untuk peta kendali Shewhart karena titik-titik yang diplot pada grafik bersifat independen. Berbeda halnya dengan urutan titik-titik yang diplot pada peta kendali EWMA yang tidak independen, sehingga dibutuhkan pendekatan lain untuk menemukan nilai ARL. Menurut Patel & Divecha (2011), salah satu metode yang banyak digunakan dalam menentukan nilai ARL pada peta kendali CUSUM dan EWMA yaitu metode *markov chain*. Prosedur dalam metode ini melibatkan pembagian sub-interval sebanyak $N = 2m + 1$. Sub-interval ke- j adalah L_j, U_j di mana:

$$L_j = LCL + \frac{(j-1)(UCL - LCL)}{N}$$

dan,

$$U_j = LCL + \frac{j(UCL - LCL)}{2N}$$

Ada pun titik tengah m_i pada subinterval ke- i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$m_i = LCL + \frac{(2i-1)(UCL - LCL)}{2N}$$

Dari informasi tersebut akan ditentukan matriks $\mathbf{Q}$ yang elemennya ditandai sesuai dengan banyaknya pengamatan N . Sehingga matriks $\mathbf{Q}$ berukuran $N \times N$ berisi:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{-2,-2} & Q_{-2,-1} & Q_{-2,0} & Q_{-2,1} & Q_{-2,2} \\ Q_{-1,-2} & Q_{-1,-1} & Q_{-1,0} & Q_{-1,1} & Q_{-1,2} \\ Q_{0,-2} & Q_{0,-1} & Q_{0,0} & Q_{0,1} & Q_{0,2} \\ Q_{1,-2} & Q_{1,-1} & Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,-2} & Q_{2,-1} & Q_{2,0} & Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Dengan entri $Q = [Q_{ij}]$ matriks ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= P\left(L_j < Z_t < U_j \mid Z_{t-1} = m_i\right) \\ &= P\left(L_j < \lambda X_t + (1-\lambda)Z_{t-1} < U_j \mid Z_{t-1} = m_i\right) \\ &= P\left(L_j < \lambda X_t + (1-\lambda)m_i < U_j\right) \\ &= P\left(LCL + \frac{(j-1)(UCL - LCL)}{N} \right. \\ &\quad \left. < \lambda X_t + (1-\lambda)\left(LCL + \frac{(2i-1)(UCL - LCL)}{2N}\right) \right. \\ &\quad \left. < LCL + \frac{j(UCL - LCL)}{2N}\right) \\ &= P\left(LCL + \left(\frac{UCL - LCL}{2N\lambda}\right)(2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1)) < X_t < LCL \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{UCL - LCL}{2N\lambda}\right)(2j - (1-\lambda)(2i-1))\right) \\ Q_{ij} &= P\left(LCL + \left(\frac{UCL - LCL}{2N\lambda}\right)(2j - (1-\lambda)(2i-1))\right) \\ &\quad - P\left(LCL + \left(\frac{UCL - LCL}{2N\lambda}\right)(2(j-1) - (1-\lambda)(2i-1))\right) \end{aligned} \quad (18)$$

Sehingga nilai ARL diperoleh dengan rumus sebagai berikut:

$$ARL = (\mathbf{Q}^T \mathbf{1})^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} \quad (19)$$

Keterangan:

$\mathbf{I}$: Matriks identitas berukuran $N \times N$

$\mathbf{1}$: Vektor kolom berukuran $N \times 1$ dengan semua elemennya 1

1.4.7 Polusi Udara

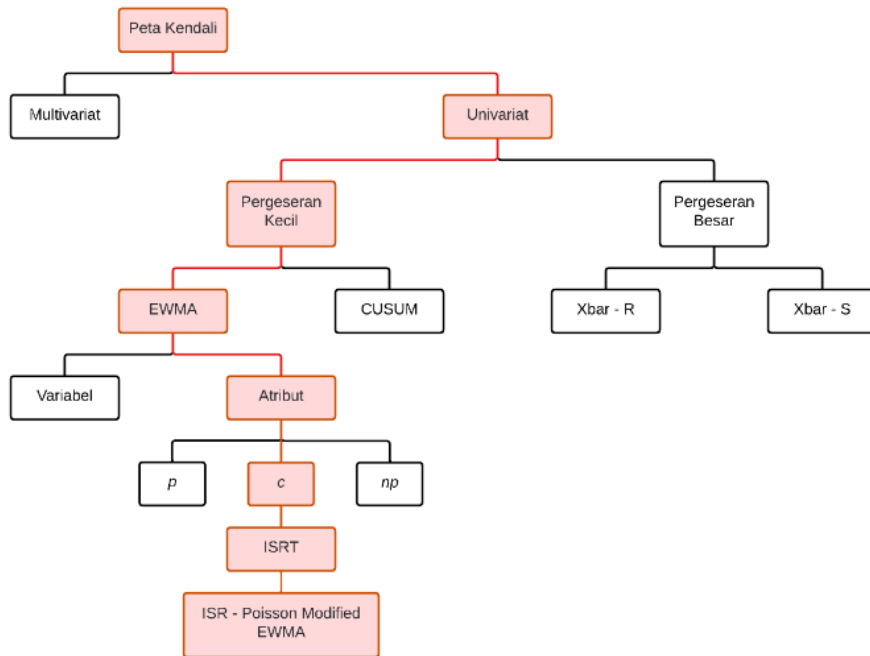
Polusi udara merupakan perubahan komposisi udara akibat pencampuran seperti *particular matter* (PM), sulfur dioksida (SO₂), karbon monoksida (CO) atau logam berat lainnya (Kingsy et al., 2016). Emisi polutan yang tidak terkendali seperti PM dan CO menjadi sumber utama polusi udara luar ruangan. Dengan penyebabnya dapat berasal dari alam, seperti kekeringan meteorologis (Auliana et al., 2024), ataupun aktivitas industri dan transportasi (Alves, 2023).

CO telah lama dikenal sebagai polutan udara di dalam dan luar ruangan. Keadaan ini tentu saja merugikan dalam penilaian kualitas udara dalam ruangan yang terkait dengan kesehatan, karena paparan karbon monoksida sering dikaitkan dengan keracunan serius atau bahkan fatal (Salthammer, 2024). Kementerian Lingkungan Hidup dan Kehutanan telah mengeluarkan Peraturan Menteri Lingkungan Hidup dan Kehutanan Republik Indonesia No.14 Tahun 2020 Tentang Indeks Standar Pencemar Udara sebagai gambaran kondisi mutu ambien di lokasi tertentu dan didasarkan kepada dampak terhadap kesehatan manusia, nilai estetika dan makhluk hidup lainnya.

Tabel 1. Parameter ISPU Karbon Monoksida (CO)

Kategori	ISPU	CO ($\mu\text{g}/\text{m}^3$)
Baik	0 – 50	4000
Sensitif	51 – 100	8000
Tidak sehat	101 – 200	15000
Sangat Tidak sehat	201 – 300	30000
Berbahaya	> 300	45000

1.5 Kerangka Konseptual



Gambar 1. Kerangka Konseptual Peta Kendali ISR – Poisson Modified EWMA