

BEBERAPA SIFAT MATRIKS JUMLAH TETAP



IRFAN ODDANIAL

H011181008



PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2025

BEBERAPA SIFAT MATRIKS JUMLAH TETAP

IRFAN ODDANIAL

H011181008



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR**

2025

BEBERAPA SIFAT MATRIKS JUMLAH TETAP

IRFAN ODDANIAL

H011181008

Skripsi

sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana



Program Studi Matematika

pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2025

SKRIPSI
BEBERAPA SIFAT MATRIKS JUMLAH TETAP

IRFAN ODDANIAL
H011181008

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana pada 15 april 2025
dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan
pada

Program Studi Matematika

Departemen Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin



Mengesahkan:

Pembimbing Utama,

Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.
NIP. 196808031992021001

Mengetahui:

Ketua Program Studi,

Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 196804292002121001

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul "Beberapa Sifat Matriks Jumlah Tetap" adalah benar karya saya dengan arahan dari Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc. sebagai Pembimbing Utama. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, 15 April 2025



UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur atas kehadiran Allah *Subhanahu Wa ta'ala* yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad *Sallallahu 'Alaihi Wasallam*.

Penulis menyadari bahwa skripsi yang berjudul “Beberapa Sifat Matriks Jumlah Tetap” ini dapat diselesaikan, karena adanya bantuan, dukungan, bimbingan, serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada orang tua penulis, **Sappewali** dan **Hupra**, serta seluruh keluarga yang telah memberikan doa dan dukungan dalam penyelesaian skripsi ini. Pada kesempatan ini pula, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya, serta Bapak **Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam beserta jajarannya.
2. Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Bapak **Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.** selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar, tulus, dan ikhlas banyak memberikan ilmu yang bermanfaat dan meluangkan waktu untuk membimbing dan memberi masukan serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
4. Ibu **Prof. Dr. Hasmawati, M.Sc.**, dan Ibu **Naimah Aris, S.Si., M. Math.** selaku Tim Penguji atas kesediaannya untuk memberikan kritik, saran dan dukungan yang membangun kepada penulis dalam perbaikan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu Dosen Departemen Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan pengetahuan kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Program Studi Matematika, serta Bapak dan Ibu Staff Departemen Matematika yang telah membantu dan memudahkan penulis dalam berbagai hal administrasi.
6. Teman-teman **Matematika angkatan 2018** yang telah berjuang bersama dari awal kuliah sampai selesai.
7. Teman-teman seperjuangan penulis, **Putri Ayuni, Ronaldo, Alya Sakinah Arif, Muhammad Fairil** dan **Andi Rahmat Hidayat** serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebut satu persatu yang senantiasa memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis, serta memberikan momen berharga bagi penulis selama masa studi sarjana.

Akhir kata, penulis berharap semoga segala bentuk kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan mendapatkan balasan dari Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*. Semoga skripsi ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Penulis

Irfan Oddanial

ABSTRAK

IRFAN ODDANIAL. **Beberapa Sifat Matriks Jumlah Tetap** (dibimbing oleh Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.)

Matriks jumlah tetap merupakan matriks yang setiap baris atau kolomnya memiliki jumlah elemen yang sama. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis beberapa sifat penting dari matriks jumlah tetap, termasuk sifat asosiatif dan seimbang, serta kestabilannya terhadap operasi tertentu seperti nilai eigen, vektor eigen dan rank. Berbeda halnya dengan matriks pada bilangan riil yang dapat menggunakan determinan matriks sebagai alat untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atau metode Gauss dalam menentukan rank matriks. Pada matriks jumlah tetap hanya dapat menggunakan metode representasi blok dari matriks berdimensi ganjil atau genap untuk mendapatkan vektor eigen, nilai eigen dan rank matriks. Hasil penelitian menunjukkan bahwa representasi blok dari matriks merupakan suatu metode dengan membentuk matriks jumlah sama terlebih dahulu, kemudian menentukan vektor eigen, nilai eigen dan rank matriks.

Kata kunci: Matriks Jumlah Tetap, asosiatif, seimbang, vektor eigen, nilai eigen, rank.

ABSTRACT

IRFAN ODDANIAL. **Some Properties of Constant Sum Matrices** (supervised by Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc.)

A constant sum matrices is a matrix in which each row or column has the same number of elements. This research aims to analyze several important properties of constant sum matrices, including associated and balanced properties, as well as their stability against certain operations such as eigenvalues, eigenvectors and rank. This is different from matrices on real numbers which can use the determinant of the matrix as a tool to determine the eigenvalues and eigenvectors of the matrix or the Gauss method for determining the rank of the matrix. In constant sum matrices you can only use the block representation method of odd or even dimensional matrices to obtain eigenvectors, eigenvalues and matrix ranks. The research results show that the block representation of the matrix is a method by forming a matrix of equal numbers first, then determining the eigenvector, eigenvalue and rank of the matrix.

Keywords: **Constant Sum Matrices, Associated, Balanced, Eigenvectors, Eigenvalue, Rank.**

DAFTAR ISI

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA.....	iv
UCAPAN TERIMA KASIH	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR NOTASI	x
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	1
1.3. Batasan Masalah	2
1.4. Tujuan Penelitian	2
1.5. Manfaat Penelitian	2
1.6. Landasan Teori	2
1.6.1. Definsi Matriks	2
1.6.2. Jenis-Jenis Matriks	3
1.6.3. Operasi Matriks	6
BAB II METODOLOGI PENELITIAN	13
2.1. Metode Penelitian	13
2.2. Lokasi dan Waktu Penelitian	13
2.3. Prosedur Penelitian	13
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	15
3.1. Matriks Jumlah Tetap	15
3.2. Matriks Jumlah Tetap Diagonal	26
BAB IV PENUTUP	43
4.1. Kesimpulan	43
4.2. Saran	43
DAFTAR PUSTAKA	44

DAFTAR GAMBAR

Nomor Urut

halaman

Gambar 3.1	14
------------------	----

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{R}$	Bilangan real
$A_{m \times n}$	Matriks A dengan m baris dan n kolom
A^T	Transpose matriks A
a_{ij}	Entri baris ke- i dan kolom ke- j
$\mathcal{O}_n$	Matriks nol
0_n	Vektor nol
$\mathcal{E}_n$	Matriks satu
1_n	Vektor satu
I_n	Matriks identitas
J_n	Matriks kebalikan identitas
ω	Bobot matriks
S_n	Himpunan semua matriks jumlah tetap
S_n^0	Himpunan semua matriks jumlah tetap dengan bobot 0
A_n	Himpunan bagian matriks jumlah tetap yang asosiatif
A_n^0	Himpunan bagian matriks jumlah tetap yang asosiatif dengan bobot 0
B_n	Himpunan bagian matriks jumlah tetap yang seimbang
B_n^0	Himpunan bagian matriks jumlah tetap yang seimbang dengan bobot 0
$tr(A)$	Trace Matriks A
$\det(A)$	Determinan matriks A
$rank(A)$	Rank dari matriks A
$nullity(A)$	Nullitas dari matriks A

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang keilmuan yang berkembang. Secara umum, matematika diklasifikasikan ke dalam dua bagian utama, yaitu matematika murni dan matematika terapan. Matematika terapan mencakup bidang-bidang seperti pemodelan, komputasi, riset operasi dan statistika. Sementara itu, matematika murni terbagi lagi ke dalam beberapa cabang, di antaranya matematika analisis, teori graf, aljabar, dan lain sebagainya (Sutojo dkk, 2010).

Salah satu cabang penting dalam matematika adalah aljabar, yang telah digunakan oleh para matematikawan sejak ribuan tahun yang lalu. Aljabar linier merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari tentang matriks, vektor, ruang vektor, transformasi linier dan sistem persamaan linier. Matriks pertama kali ditemukan oleh Arthur Cayley (1821- 1895), pada awalnya matriks hanya dianggap permainan sampai pada tahun 1925 matriks digunakan pada mekanika kuantum dan selanjutnya penggunaan matriks dalam bidang sains semakin berkembang (Sutojo dkk, 2010).

Matriks merupakan salah satu bahasan penting dari ilmu Aljabar Linear, yang mana merupakan salah satu bahasan penting dalam matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika sendiri maupun bagi disiplin ilmu yang lain. Penggunaan tersebut banyak dimanfaatkan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari, misalnya pada aplikasi perbankan, dalam dunia olahraga, dan dalam bidang ekonomi. Sedangkan dalam matematika, matriks dapat digunakan untuk menangani model-model linear, seperti mencari penyelesaian sistem persamaan linear (Sutojo dkk, 2010).

Ada banyak jenis matriks seperti, matriks bujur sangkar, matriks nol, matriks satu, matriks identitas, matriks positif, matriks transpose, matriks diagonal, dan lain-lain. Selain itu ada juga matriks jumlah tetap yang masing-masing baris dan kolomnya berjumlah sama.

Di sisi lain, banyak juga permasalahan yang sering muncul berkaitan dengan masalah matriks jumlah tetap itu sendiri, misalnya nilai eigen dan vektor eigen maupun rank matriks. Matriks jumlah tetap dapat bersifat asosiatif, seimbang atau bersifat keduanya. Berbeda halnya dengan matriks pada bilangan riil yang dapat menggunakan determinan matriks sebagai alat untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks. Pada matriks jumlah sama hanya dapat menggunakan metode representasi blok dari matriks berdimensi ganjil atau genap untuk mendapatkan vektor eigen. .

Berdasarkan uraian latar belakang dan penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian yang berjudul

“Beberapa Sifat Matriks Jumlah Tetap”

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana nilai eigen dan vektor eigen matriks jumlah tetap?
2. Bagaimana rank matriks jumlah tetap?
3. Bagaimana ciri-ciri matriks jumlah tetap yang asosiatif dan seimbang?

1.3 Batasan Penelitian

Adapun batasan masalah pada penelitian ini antara lain :

1. Sifat asosiatif dan seimbang matriks jumlah tetap
2. Nilai eigen dan vektor eigen serta rank matriks jumlah tetap

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari penelitian ini ialah antara lain :

1. Mengetahui nilai eigen dan vektor eigen matriks jumlah tetap
2. Mengetahui rank matriks jumlah tetap
3. Mengetahui ciri-ciri matriks jumlah tetap yang asosiatif dan seimbang

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Memperluas pengetahuan dan pengembangan keilmuan dalam bidang ilmu matematika, secara khusus dalam aljabar.
2. Sebagai sarana penulis dalam mengembangkan ilmu pengetahuan yang selama ini menjadi bidang ilmu yang dipelajari.
3. Sebagai rujukan bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat mengembangkan ilmu matematika di bidang aljabar khususnya tentang matriks jumlah tetap.

1.6 Landasan Teori

1.6.1 Definisi Matriks

Definisi 1.1 Menurut Eves (dalam Mursyidah H, 2017:2) Sebuah matriks berukuran $m \times n$ adalah himpunan beberapa bilangan yang tersusun dalam persegi panjang berukuran m baris dan n kolom yang dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan a_{ij} menyatakan entri matriks A pada baris ke- i kolom ke- j . Matriks A dengan banyak baris m dan kolom n dinotasikan $A_{m \times n}$.

Contoh 1.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.6.2 Jenis-jenis Matriks

Ada beberapa jenis matriks yaitu:

1. Matriks Nol

Matriks disebut matriks nol jika semua entri dari matriks tersebut sama dengan nol.

Matriks nol disimbolkan dengan O_n , dimana $O_n = (0)_{i,j=1}^n$ (Hill dkk, 2018).

Contoh 1.2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan digunakan notasi 0_n untuk vektor 0 di $\mathbb{R}^n$.

Contoh 1.3

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Satu

Matriks satu merupakan matriks $n \times n$ yang semua entrinya sama dengan 1.

Matriks satu disimbolkan dengan E_n , dimana $E_n = (1)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Hill dkk, 2018).

Contoh 1.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan digunakan notasi $1_n \in \mathbb{R}^n$ untuk vektor yang semua entri sama dengan 1.

Contoh 1.5

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks persegi dengan diagonal utamanya 1 dan lainnya nol. Matriks identitas disimbolkan dengan huruf kapital I , dan untuk menyertakan ukuran matriks identitas dituliskan I_n (Anton, dkk, 2019). Matriks identitas juga dapat dituliskan sebagai $I_n = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ untuk matriks satuan $n \times n$, dimana δ merupakan simbol dari delta kronecker (Hill dkk, 2018).

Contoh 1.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Kebalikan Identitas

Matriks kebalikan identitas dituliskan sebagai $J_n = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, menjadi matriks $n \times n$ yang memiliki entri 1 pada antidiagonal dan 0 untuk elemen lainnya (Hill dkk, 2018).

Contoh 1.7

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Vektor Kolom dan Vektor Baris

Perhatikan bahwa anggota dari $\mathbb{R}^n$ merupakan vektor kolom yaitu matriks dengan n baris dan 1 kolom. Vektor baris direpresentasikan dalam bentuk $v^T \in \mathbb{R}^n$ (Hill dkk, 2018). Vektor kolom disebut juga sebagai matriks kolom.

Contoh 1.8

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sedangkan vektor baris disebut sebagai matriks baris.

Contoh 1.9

$$[4 \quad 5 \quad 6]$$

6. Matriks Blok

Matriks blok atau matriks partisi adalah matriks yang dipartisi atau diblok menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil dengan memasukkan garis horizontal dan garis vertikal antara baris dan kolom matriks. Matriks-matriks kecil hasil partisi disebut submatriks (Purnama dkk, 2020). Matriks blok digunakan untuk menyederhanakan matriks yang ukurannya besar menjadi kecil sehingga lebih mudah dioperasikan untuk tujuan tertentu.

Contoh 1.10

Misalkan diberikan matriks persegi $A_{4 \times 4}$ sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriks A dapat dipartisi menjadi 4 buah matriks kecil atau dapat dinyatakan

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

dengan ukuran dari masing-masing matriks tersebut 2×2 , sehingga masing-masing matriks dapat dinyatakan :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

7. Matriks Nilpoten

Dalam aljabar linier, matriks nilpoten adalah matriks bujursangkar N sedemikian rupa

$$N^k = 0 \quad (1)$$

untuk beberapa bilangan bulat positif k . Dimana k disebut indeks N , atau derajat N (Pratama, 2021).

Contoh 1.11

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks N nilpoten dengan indeks 2, karena $N^2 = 0$. Secara lebih umum, matriks segitiga berdimensi n dengan nol di sepanjang diagonal utama adalah nilpoten, dengan indeks $\leq n$.

Contoh 1.12

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 19 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N \text{ merupakan matriks nilpoten karena } N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 19 & 165 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 152 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ indeks } N \text{ adalah } 4.$$

8. Matriks Jumlah Tetap

Sebuah matriks $n \times n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ disebut matriks jumlah tetap dengan bobot ω jika unsur masing-masing baris dan kolomnya berjumlah $n\omega$. Jika masing-masing dari dua diagonal utamanya berjumlah $n\omega$, disebut matriks jumlah tetap diagonal. M disebut matriks jumlah tetap tak diagonal jika matriks jumlah tetap bukan matriks jumlah tetap diagonal (Hill dkk, 2018).

Contoh 1.13

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Misalkan S_n adalah himpunan semua matriks jumlah tetap $n \times n$, dan A_n, B_n adalah masing-masing himpunan bagian dari matriks-matriks yang asosiatif dan seimbang dari matriks jumlah tetap. Maka S_n adalah subaljabar dari aljabar matriks standar $n \times n$, dan A_n dan B_n adalah subruang vektor dari S_n . Selain itu, B_n merupakan subaljabar dari S_n . Menandakan S_n^0 himpunan bagian dari matriks jumlah tetap bobot 0. A_n^0 merupakan himpunan bagian dari matriks jumlah tetap yang asosiatif dengan bobot 0, sedangkan B_n^0 merupakan himpunan bagian dari matriks jumlah tetap yang seimbang dengan bobot 0.

1.6.3 Operasi Matriks

Ada beberapa operasi matriks yang akan diperkenalkan yaitu :

1. Penjumlahan dan pengurangan

Definisi 1.2 Misalkan A dan B merupakan matriks yang memiliki ukuran sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri B ke entri-entri A yang bersesuaian, dan perbedaannya $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri B dari matriks yang bersesuaian entri dari A . Matriks yang berbeda ukuran tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, maka $A + B = C$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dan $A - B = D$ dengan $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (Anton, dkk., 2019).

Contoh 1.14

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Perkalian dengan skalar

Definisi 1.3 Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri matriks A dengan c . Matriks cA disebut skalar kelipatan A (Anton, dkk., 2019).

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij} \quad (2)$$

Contoh 1.15

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Definisi 1.4 Jika A merupakan matriks $m \times r$ dan B merupakan matriks $r \times n$, maka hasil kali AB merupakan matriks $m \times n$ yang entrinya ditentukan sebagai berikut: Untuk menentukan baris ke- i dan kolom ke- j dari AB , perhatikan baris ke- i dari matriks A dan kolom ke- j dari matriks B . Kemudian kalikan entri yang bersesuaian baris dan kolom secara bersama-sama, lalu jumlahkan hasil kali tersebut (Anton, dkk., 2019).

Contoh 1.16

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$AB = \begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 56 & 41 \end{bmatrix}$$

4. Operasi Baris/Kolom Elementer

Operasi baris/kolom elementer adalah operasi yang dilakukan terhadap matriks dengan aturan-aturan tertentu. Adapun aturan-aturan tersebut adalah (Anton, dkk. 2019):

- i. Mengalikan baris/kolom dengan konstanta tak nol.

Contoh 1.17

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Kalikan baris ke-2 dengan 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

- ii. Menukar antar baris/kolom.

Contoh 1.18

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tukar baris ke-1 dengan baris ke-2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- iii. Menambahkan kelipatan baris yang satu ke baris lainnya.

Contoh 1.19

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tambahkan 3 kali baris ke-1 ke baris ke-2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

5. Transpose Matriks

Definisi 1.5 Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka transpose dari matriks A , dilambangkan dengan A^T , didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang dihasilkan dengan menukar baris dan kolom dari A ; yaitu, kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A , kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A , dan seterusnya (Anton, dkk., 2019).

Contoh 1.20

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Trace Matriks

Definisi 1.6 Jika A adalah matriks persegi, maka trace A yang dilambangkan dengan $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri pada diagonal utama A . Trace A tidak terdefinisi jika A bukan matriks persegi (Anton, dkk., 2019).

Contoh 1.21

Misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$tr(A) = 1 + 4 = 5$$

7. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Sebuah matriks persegi $n \times n$ memiliki nilai dan vektor karakteristik yang lebih sering disebut sebagai nilai dan vektor eigen.

Definisi 1.7 Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A (atau operasi matriks T_A) jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x yaitu :

$$Ax = \lambda x \quad (3)$$

untuk sebarang skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A (atau dari T_A), dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ (Anton & Rorres, 2014).

Secara umum, bayangan vektor x dikalikan dengan matriks bujur sangkar A berbeda dari x baik dalam besaran maupun arahnya. Namun, dalam kasus khusus dimana x adalah vektor eigen dari A , perkalian dengan A membuat arahnya tidak berubah. Misalnya, dalam $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ perkalian dengan A memetakan setiap vektor eigen x dari A (jika ada) sepanjang garis yang sama melalui titik asal sebagai x . Tergantung pada tanda dan besarnya nilai eigen λ yang bersesuaian dengan x , operasi $Ax = \lambda x$ menekan atau meregangkan x dari sebuah faktor dari λ dengan pembalikan arah dalam kasus dimana λ negatif.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A berukuran $n \times n$. Perhatikan terlebih dahulu bahwa persamaan $Ax = \lambda x$ dapat ditulis ulang sebagai dapat ditulis sebagai $Ax = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan

$$\det(\lambda I - A)x = 0 \quad (4)$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen dari A , persamaan ini harus terdapat paling sedikit satu solusi tak nol untuk x . Jika A merupakan matriks $n \times n$, maka x merupakan nilai eigen dari A jika dan hanya jika memenuhi persamaan

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (5)$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik matriks A (Anton & Rorres, 2014).

Contoh 1.22

Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

$$\det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \text{ dan } \lambda_3 = 6$$

$$\text{Untuk } \lambda = 0$$

$$\lambda I - M = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi Gauss diperoleh solusi umum yaitu :

$$X = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_3 = t$ maka diperoleh persamaan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika $s = 1$ dan $t = 1$, didapatkan vektor eigen

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

untuk $\lambda_2 = 6$

$$\lambda I - M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi Gauss diperoleh solusi umum yaitu :

$$X = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_3 = t$ maka diperoleh persamaan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika $t = 1$, didapatkan vector eigen

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss digunakan untuk mengembangkan prosedur sistematis dalam menyelesaikan sistem persamaan linear. Prosedur ini didasarkan pada gagasan untuk melakukan operasi tertentu pada baris matriks yang diperbesar yang menyederhanakannya kebentuk solusi sistem (Anton & Rorres, 2014). Prosedur penyelesaian dari metode ini adalah dengan melakukan operasi baris menjadi matriks eselon-baris. Metode ini mengubah persamaan linear tersebut ke dalam matriks augmentasi dan mengoperasikannya.

Metode eliminasi gauss digunakan untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan linier dengan mengubah sistem persamaan linear tersebut ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan Operasi Baris Elementer (OBE), yakni koefisien dibawah diagonal utamanya bernilai nol. Bentuk segitiga atas ini dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi (penyulihan) balik (Febri dkk, 2019).

Menurut Anton & Rorres (2014) Ciri Matriks Eselon Baris tereduksi yaitu :

- i. Pada setiap baris, entri tak nol yang pertama adalah satu. Dan satu ini disebut satu utama.
- ii. Jika terdapat baris nol diletakkan pada baris yang terbawah.
- iii. Pada dua baris yang berurutan, letak satu utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih ke kanan.
- iv. Pada setiap kolom jika terdapat satu utama, entri yang lain nol jika hanya memenuhi 3 cara pertama saja maka disebut Matriks Eselon Baris.

9. Rank dan Nullitas

Definisi 1.8 Dimensi tak nol ruang baris dan ruang kolom suatu matriks A disebut rank A dan dilambangkan dengan $\text{rank}(A)$; dimensi ruang nol A disebut nullitas dari A dan dilambangkan dengan $\text{nullity}(A)$ (Anton, dkk., 2019).

Contoh 1.23

Menentukan rank dan nullitas dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka $\text{Rank}(A) = 2$ dan $\text{Nullity}(A)=1$.

10. Block Representasi Matriks Jumlah Tetap Dimensi Genap

Matriks X_{2n} disebut representasi blok dari matriks jumlah tetap berdimensi genap dengan persamaan sebagai berikut :

$$X_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & J_n \\ J_n & -I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}. \quad (6)$$

Jelas $X_{2n}^2 = I_{2n}$ dan $X_{2n}^T = X_{2n}$, jadi X_{2n} merupakan involusi simetris ortogonal. Konjugasi dengan matriks X_{2n} menimbulkan representasi blok matriks pada S_{2n} yang simetri jenisnya dapat dengan mudah dibaca. Ini juga menyediakan cara yang mudah dan sistematis untuk membangun konstanta jumlah matriks dengan (atau tanpa) simetri titik pusat.

Teorema 1.1 Misalkan $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

- a. Matriks $M \in A_{2n}^0$ jika dan hanya jika

$$M = X_{2n} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & V^T \\ W & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} X_{2n} \quad (7)$$

dimana $V, W \in A_{2n}^0$ memiliki jumlah baris 0, sehingga

$$V1_n = 0, W1_n = 0$$

- b. Matriks $M \in B_{2n}^0$ jika dan hanya jika

$$M = X_{2n} \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{O}_n & Z \end{pmatrix} X_{2n} \quad (8)$$

dimana $Y \in S_n^0$ dan $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

c. Bobot matriks $\mathcal{E}_{2n}$ memenuhi

$$\mathcal{E}_{2n} = X_{2n} \begin{pmatrix} 2\mathcal{E}_n & \mathcal{O}_n \\ \mathcal{O}_n & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} X_{2n} \quad (9)$$

(Hill dkk, 2018).

11. Block Representasi Matriks Jumlah Tetap Dimensi Ganjil

Matriks X_{2n+1} disebut representasi blok dari matriks jumlah tetap berdimensi ganjil dengan persamaan sebagai berikut :

$$: \quad X_{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & 0_n & \frac{1}{\sqrt{2}}J_n \\ 0_n^T & 1 & 0_n^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}}J_n & 0_n & -\frac{1}{\sqrt{2}}I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}. \quad (10)$$

Matriks X_{2n+1} berubah menjadi X_{2n} jika baris dan kolom tengahnya dihapus. Matriks X_{2n+1} adalah simetris involusi, yaitu $X_{2n+1}^T = X_{2n+1}$ dan $X_{2n+1}^2 = I_{2n+1}$. Konjugasi dengan X_{2n+1} menimbulkan representasi blok berikut dari matriks jumlah konstan berdimensi ganjil. Hal ini penting untuk penerapan konstruksi matriks persegi semi ajaib.

Teorema 1.2 Misalkan $M \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}$ (Hill dkk, 2018).

a. Matriks $M \in A_{2n}^0$ jika dan hanya jika

$$M = X_{2n+1} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & 0_n & V^T \\ 0_n^T & 0 & -\sqrt{2}W1_n^T \\ W & -\sqrt{2}W1_n & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} X_{2n+1} \quad (11)$$

dengan matriks $V, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Terlebih lagi, M memiliki entri rasional jika dan hanya jika V dan W memiliki entri rasional.

b. Matriks $M \in B_{2n}^0$ jika dan hanya jika

$$M = X_{2n+1} \begin{pmatrix} Y & -\sqrt{2}Y1_n & \mathcal{O}_n \\ -\sqrt{2}(Y^T 1_n)^T & 21_n^T Y 1_n & 0_n^T \\ \mathcal{O}_n & 0_n & Z \end{pmatrix} X_{2n+1} \quad (12)$$

dengan matriks $Y, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Terlebih lagi, M memiliki entri rasional jika dan hanya jika Y dan Z memiliki entri rasional.

c. Matriks $\mathcal{E}_{2n+1}$ memenuhi

$$\mathcal{E}_{2n+1} = X_{2n+1} \begin{pmatrix} 2\mathcal{E}_n & \sqrt{2}1_n & \mathcal{O}_n \\ \sqrt{2}1_n^T & 1 & 0_n^T \\ \mathcal{O}_n & 0_n & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} X_{2n+1} \quad (13)$$

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dibahas mengenai metodologi penelitian yang mencakup metode penelitian, lokasi dan waktu penelitian, serta prosedur penelitian.

2.1 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah penelitian Pustaka (*library research*) dan analisis deskriptif, yakni melakukan penelitian terhadap beberapa literatur-literatur yang ada seperti dari buku, jurnal ilmiah, dan artikel di internet atau literatur lainnya yang terkait dengan matriks jumlah tetap.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

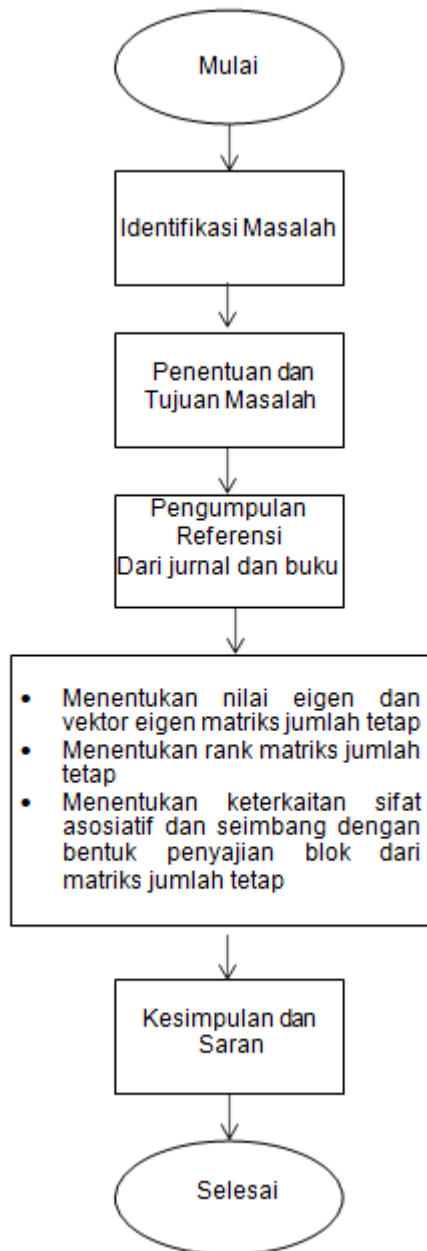
Penelitian ini dilakukan di Universitas Hasanuddin tepatnya di Laboratorium Aljabar dan Kombinatorika Departemen Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin. Waktu penelitian berlangsung sejak Agustus 2024.

2.3 Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Pengumpulan Jurnal dan Literatur Terkait Penelitian. Studi literatur dengan referensi berasal dari buku, jurnal ilmiah, artikel, dan sumber lain yang berhubungan dengan pokok bahasan yang diteliti.
2. Analisis Literatur. Analisa data dimulai dengan menelaah seluruh konstruksi teoritis dari analisis mengenai matriks jumlah tetap yang telah ada. Target pada tahap ini adalah dapat melakukan pemetaan terhadap hasil-hasil terdahulu, mengetahui dan memahami Teknik/metode pembuktian yang digunakan oleh peneliti terdahulu.
3. Konstruksi Teori. Pada proses konstruksi teori baru ini semua prinsip-prinsip penalaran baik secara induktif dan deduktif akan digunakan secara penuh, mulai dari reduksi data, paparan data, dan penarikan kesimpulan.
4. Verifikasi Hasil. Tahap akhir dilakukan verifikasi semua hasil yang telah dicapai dengan menyajikan semua hasil pada tahap-tahap sebelumnya.
5. Penyempurnaan. Pada tahap ini, hasil penelitian yang telah diperoleh akan ditulis dalam bentuk Skripsi menggunakan *Microsoft Word*.

Langkah-langkah dalam penelitian ini dapat digambarkan melalui diagram alur penelitian sebagai berikut:



Gambar 3.1 Alur kerja

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Matriks Jumlah Tetap

Definisi 3.1 Sebuah matriks $n \times n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ disebut matriks jumlah tetap dengan bobot ω jika unsur masing-masing baris dan kolomnya berjumlah $n\omega$ (Hill dkk, 2018).

Contoh 3.1 Matriks jumlah tetap dengan $n = 4$ dan $\omega = 2,5$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jika masing-masing dari dua diagonal utamanya berjumlah $n\omega$, disebut matriks jumlah tetap diagonal. M disebut matriks jumlah tetap tak diagonal jika matriks jumlah tetap bukan matriks jumlah tetap diagonal.

Contoh 3.2 Matriks jumlah tetap diagonal dengan $n = 4$ dan $\omega = 2$

$$M = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -8 & 12 \\ -4 & 8 & 12 & -8 \\ 12 & -8 & -4 & 8 \\ -8 & 12 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Definisi 3.2 Misalkan M merupakan matriks jumlah tetap $n \times n$ dengan bobot ω .

a). Matriks M disebut asosiatif jika setiap entri dan entri cerminannya terhadap pusat matiks berjumlah 2ω , yaitu :

$$m_{ij} + m_{n+1-i, n+1-j} = 2\omega \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}) \quad (14)$$

(Hill dkk, 2018).

Contoh 3.3

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$n = 4, \quad \omega = \frac{1}{2}$$

$$m_{ij} + m_{4+1-i, 4+1-j} = 2\omega = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$m_{11} + m_{44} = 2 + (-1) = 1$$

$$m_{12} + m_{43} = (-1) + 2 = 1$$

$$m_{13} + m_{42} = (-2) + 3 = 1$$

$$m_{14} + m_{41} = 3 + (-2) = 1$$

$$m_{21} + m_{34} = (-1) + 2 = 1$$

$$m_{22} + m_{33} = 2 + (-1) = 1$$

$$m_{23} + m_{32} = 3 + (-2) = 1$$

$$m_{24} + m_{31} = (-2) + 3 = 1$$

$$m_{31} + m_{24} = 3 + (-2) = 1$$

$$m_{32} + m_{23} = (-2) + 3 = 1$$

$$m_{33} + m_{22} = (-1) + 2 = 1$$

$$m_{34} + m_{21} = 2 + (-1) = 1$$

$$m_{41} + m_{14} = (-2) + 3 = 1$$

$$m_{42} + m_{13} = 3 + (-2) = 1$$

$$m_{43} + m_{12} = 2 + (-1) = 1$$

$$m_{44} + m_{11} = (-1) + 2 = 1$$

b). Matriks M disebut seimbang jika setiap entri sama dengan entri cerminannya terhadap pusat matriks, yaitu:

$$m_{ij} - m_{n+1-i, n+1-j} = 0 \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}) \quad (15)$$

(Hill dkk, 2018).

Contoh 3.4

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m_{ij} - m_{4+1-i, 4+1-j} = 0$$

$$m_{11} - m_{44} = 2 - 2 = 0$$

$$m_{12} - m_{43} = 3 - 3 = 0$$

$$m_{13} - m_{42} = (-2) - (-2) = 0$$

$$m_{14} - m_{41} = (-1) - (-1) = 0$$

$$m_{21} - m_{34} = (-2) - (-2) = 0$$

$$m_{22} - m_{33} = (-1) - (-1) = 0$$

$$m_{23} - m_{32} = 2 - 2 = 0$$

$$m_{24} - m_{31} = 3 - 3 = 0$$

$$m_{31} - m_{24} = 3 - 3 = 0$$

$$m_{32} - m_{23} = 2 - 2 = 0$$

$$m_{33} - m_{22} = (-1) - (-1) = 0$$

$$m_{34} - m_{21} = (-2) - (-2) = 0$$

$$m_{41} - m_{14} = (-1) - (-1) = 0$$

$$m_{42} - m_{13} = (-2) - (-2) = 0$$

$$m_{43} - m_{12} = 3 - 3 = 0$$

$$m_{44} - m_{11} = 2 - 2 = 0$$

Lemma 3.1 Dimisalkan $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- a) Pernyataan berikut ekuivalen
 - (i) M merupakan sebuah matriks jumlah tetap dengan bobot ω ;
 - (ii) $M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n$;
 - (iii) 1_n merupakan vektor eigen, dengan nilai eigen $n\omega$, untuk kedua matriks M dan matriks transpose M^T .
- b) Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat asosiatif jika dan hanya jika $M + \mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n = 2\omega\mathcal{E}_n$.
- c) Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat seimbang jika dan hanya jika $M = \mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n$. (Hill dkk, 2018).

Bukti. Diberikan matriks jumlah tetap M dengan bobot ω .

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diketahui :

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = n\omega$$

$$a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} = n\omega$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} = n\omega$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1} = n\omega$$

$$a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2} = n\omega$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn} = n\omega$$

Akan ditunjukkan :

a) Pernyataan berikut ekuivalen

- (i) M merupakan sebuah matriks jumlah tetap dengan bobot ω ;
- (ii) $M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n$;
- (iii) 1_n merupakan vektor eigen, dengan nilai eigen $n\omega$, untuk kedua matriks M dan matriks transpose M^T .

Karena pernyataan bersifat ekuivalen, maka akan diselidiki kebenaran tiap pernyataan berikut.

- Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap dengan bobot ω , maka $M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n$.

Karena M merupakan sebuah matriks jumlah tetap dengan bobot ω , maka akan dibuktikan $M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n$, dengan $\mathcal{E}_n$ merupakan matriks $n \times n$ yang semua entrinya adalah 1.

$$\begin{aligned}
 M\mathcal{E}_n &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) & \cdots & (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) & \cdots & (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) & \cdots & (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \\ n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$n\omega\mathcal{E}_n = n\omega \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \\ n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 M^T\mathcal{E}_n &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) & (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) & \cdots & (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) \\ (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2}) & (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2}) & \cdots & (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}) & (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}) & \cdots & (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \\ n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\omega & n\omega & \cdots & n\omega \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Diperoleh $M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n$.

Karena M merupakan sebuah matriks jumlah tetap dengan bobot ω maka $M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n$.

- Jika $M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n$, maka 1_n merupakan vektor eigen dengan nilai eigen $n\omega$ untuk kedua matriks M dan matriks transpose M^T .

$$M\mathcal{E}_n = n\omega\mathcal{E}_n = M^T\mathcal{E}_n = \begin{bmatrix} n\omega & n\omega & \dots & n\omega \\ n\omega & n\omega & \dots & n\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\omega & n\omega & \dots & n\omega \end{bmatrix}$$

Agar 1_n merupakan vektor eigen dengan nilai eigen $n\omega$ dari sebuah matriks jumlah tetap M berukuran $n \times n$. Perhatikan terlebih dahulu bahwa persamaan $M1_n = \lambda 1_n$.

$$M1_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\omega \\ n\omega \\ \vdots \\ n\omega \end{bmatrix} = \lambda 1_n$$

1_n merupakan vektor eigen dari matriks M dan matriks transpose M^T yang bersesuaian nilai eigen $\lambda = n\omega$. Sehingga $n\omega$ dapat menjadi nilai eigen dari M dan M^T , dan 1_n merupakan solusi tak nol untuk vektor eigen dari M dan M^T .

- Jika 1_n merupakan vektor eigen dengan nilai eigen $n\omega$, untuk kedua matriks M dan matriks transpose M^T , maka M merupakan sebuah matriks jumlah tetap dengan bobot ω .

Diketahui 1_n merupakan vektor eigen dari matriks M dan matriks transpose M^T yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = n\omega$, maka

$$\begin{aligned} M1_n &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) \\ (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n}) \\ \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n\omega \\ n\omega \\ \vdots \\ n\omega \end{bmatrix} \\ &= n\omega \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M1_n = \lambda 1_n.$$

Karena 1_n merupakan vektor eigen dengan nilai eigen $n\omega$ dari matriks M matriks transpose M^T , maka M merupakan matriks jumlah tetap dengan bobot ω .

Karena setiap pernyataan ini terbukti maka ketiga pernyataan tersebut ekuivalen. ■

- b) Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat asosiatif jika dan hanya jika $M + J_n M J_n = 2\omega \mathcal{E}_n$.

Asumsikan M merupakan matriks jumlah tetap. Akan ditunjukkan hubungan ekuivalen pernyataan berikut :

- Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap bersifat asosiatif maka $M + J_n M J_n = 2\omega \mathcal{E}_n$.

M merupakan sebuah matriks jumlah tetap asosiatif. Sesuai dengan definisi 3.2 (a), diperoleh :

$$a_{11} + a_{nn} = 2\omega$$

$$a_{21} + a_{n-1,n} = 2\omega$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} + a_{1n} = 2\omega$$

$$a_{12} + a_{n,n-1} = 2\omega$$

$$a_{22} + a_{n-1,n-1} = 2\omega$$

$$\vdots$$

$$a_{n2} + a_{n,n-1} = 2\omega$$

$$a_{1n} + a_{n1} = 2\omega$$

$$a_{2n} + a_{n-1,1} = 2\omega$$

$$\vdots$$

$$a_{nn} + a_{11} = 2\omega$$

maka

$$\begin{aligned} J_n M J_n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M + J_n M J_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{nn}) & (a_{12} + a_{n,n-1}) & \cdots & (a_{1n} + a_{n1}) \\ (a_{21} + a_{n-1,n}) & (a_{22} + a_{n-1,n-1}) & \cdots & (a_{2n} + a_{n-1,1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + a_{1n}) & (a_{n2} + a_{n,n-1}) & \cdots & (a_{nn} + a_{11}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\omega & 2\omega & \cdots & 2\omega \\ 2\omega & 2\omega & \cdots & 2\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\omega & 2\omega & \cdots & 2\omega \end{bmatrix} \\
&= 2\omega \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$M + J_n M J_n = 2\omega \mathcal{E}_n.$$

Pernyataan Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap bersifat asosiatif maka $M + J_n M J_n = 2\omega \mathcal{E}_n$ benar.

- Jika $M + J_n M J_n = 2\omega \mathcal{E}_n$ maka M merupakan sebuah matriks jumlah tetap asosiatif.

Diketahui $\mathcal{E}_n$ memiliki semua entri yang sama, yaitu 1. Artinya semua entri pada matriks $2\omega \mathcal{E}_n$ adalah konstan, yaitu :

$$(2\omega \mathcal{E}_n)_{ij} = 2\omega, \quad \forall_{i,j}.$$

Artinya, untuk setiap entri (i,j) , diperoleh :

$$m_{ij} + (J_n M J_n)_{ij} = 2\omega.$$

Dari sifat J_n , diketahui :

$$(J_n M J_n)_{ij} = m_{n+1-1, n+1-j}.$$

Akibatnya

$$m_{ij} + m_{n+1-1, n+1-j} = 2\omega$$

yang memenuhi sifat asosiatif. Sehingga diperoleh matriks M merupakan matriks jumlah tetap asosiatif.

Pernyataan jika $M + J_n M J_n = 2\omega \mathcal{E}_n$, maka M merupakan matriks jumlah tetap asosiatif benar.

Sehingga pernyataan jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat asosiatif jika dan hanya jika $M + J_n M J_n = 2\omega \mathcal{E}_n$ benar. ■

- c) Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat seimbang jika dan hanya jika $M = J_n M J_n$.

Asumsikan M merupakan matriks jumlah tetap. Akan ditunjukkan hubungan ekuivalen pernyataan berikut :

- Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap bersifat seimbang maka $M = \mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n$

Karena M merupakan sebuah matriks jumlah tetap seimbang, sesuai dengan definisi 3.2 (b), diperoleh :

$$a_{11} - a_{nn} = 0, a_{11} = a_{nn}$$

$$a_{21} - a_{n-1,n} = 0, a_{21} = a_{n-1,n}$$

$\vdots$

$$a_{n1} - a_{1n} = 0, a_{n1} = a_{1n}$$

$$a_{12} + a_{n,n-1} = 0, a_{12} = a_{n,n-1}$$

$$a_{22} + a_{n-1,n-1} = 0, a_{22} = a_{n-1,n-1}$$

$\vdots$

$$a_{n2} + a_{n,n-1} = 0, a_{n2} = a_{n,n-1}$$

maka

$$M = \mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} = \mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n.$$

Pernyataan Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap bersifat seimbang maka $M = \mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n$ benar.

- Jika $M = \mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n$ maka M merupakan sebuah matriks jumlah tetap seimbang

Dari persamaan tersebut, untuk setiap entri (i, j) diperoleh :

$$m_{ij} = (\mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n)_{ij}.$$

Dari sifat $\mathcal{J}_n$, diketahui :

$$(\mathcal{J}_n M \mathcal{J}_n)_{ij} = m_{n+1-i, n+1-j}.$$

Akibatnya

$$m_{ij} = m_{n+1-i, n+1-j}$$

$$m_{ij} - m_{n+1-i, n+1-j} = 0$$

yang memenuhi sifat seimbang. Sehingga diperoleh matriks M merupakan matriks jumlah tetap seimbang.

Terbukti pernyataan Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat seimbang jika dan hanya jika $M = J_n M J_n$. ■

Contoh 3.5 Diberikan matriks M

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Pernyataan berikut ekuivalen

(i) M merupakan matriks jumlah tetap dengan bobot $\omega = 2$

$$8 = n \omega$$

$$8 = 4\omega$$

$$\omega = 2$$

(ii) $M\mathcal{E}_4 = 4\omega\mathcal{E}_4 = M^T\mathcal{E}_4$

$$M\mathcal{E}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$4\omega\mathcal{E}_4 = 4 \times 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M^T\mathcal{E}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka $M\mathcal{E}_4 = 4\omega\mathcal{E}_4 = M^T\mathcal{E}_4$.

(iii) 1_4 merupakan vektor eigen, dengan nilai eigen 8, untuk kedua matriks M dan transpose M^T .

Karena $M = M^T$, maka

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3(\lambda - 8) = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0 \text{ dan } \lambda_4 = 8$$

Untuk $\lambda = 0$

$$\lambda I - M = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi Gauss diperoleh solusi umum yaitu :

$$X = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Misalkan $x_2 = s$, $x_3 = t$ dan $x_4 = u$ maka diperoleh persamaan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t - u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika $s = 1$, $t = 1$ dan $u = 1$, didapatkan vektor eigen

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 0$ tidak memenuhi.

Untuk $\lambda = 8$

$$\lambda I - M = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi Gauss diperoleh solusi umum yaitu :

$$X = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Misalkan $x_4 = s$ maka diperoleh persamaan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika $s = 1$ didapatkan vector eigen

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1_4$$

Maka 1_4 merupakan vektor eigen dengan nilai eigen 8 untuk kedua matriks M dan matriks transpose M^T .

- b) Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat asosiatif jika dan hanya jika $M + J_4 M J_4 = 2\omega \mathcal{E}_4$.

$$\begin{aligned} J_4 M J_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ M + J_4 M J_4 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ 2\omega \mathcal{E}_4 &= 2 \times 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Maka $M + J_4 M J_4 = 2\omega \mathcal{E}_4$.

- c) Jika M merupakan sebuah matriks jumlah tetap, maka bersifat seimbang jika dan hanya jika $M = J_4 M J_4$.

$$\begin{aligned} M &= J_4 M J_4 \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2. Matriks Jumlah Tetap Diagonal

Dalam matriks jumlah tetap diagonal, dua diagonal utamanya juga perlu dijumlahkan dengan jumlah baris dan kolom. Untuk matriks jumlah tetap yang asosiatif, hal ini selalu terjadi. Namun, untuk matriks jumlah tetap yang seimbang, dimana $\mathcal{E}_n$ adalah matriks jumlah tetap diagonal, kita dapat mengasumsikan tanpa kehilangan keumuman memiliki bobot 0, hal ini memberikan kondisi tambahan (Hill dkk, 2018).

Jumlah entri diagonal matriks M sama dengan trace, $tr M$; jumlah entri pada diagonal kedua adalah trace matriks setelah refleksi sepanjang garis tengah horizontal (atau vertikal), yaitu, sama dengan $tr(J_n M)$. Karena trace produk matriks bersifat invarian di bawah permutasi siklik faktor-faktornya, dan karenanya, trace matriks jumlah tetap sama dengan trace representasi bloknya, kita melihat bahwa untuk matriks jumlah tetap seimbang bobot 0 M , menggunakan representasi

$$tr M = tr(X_n \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & Z \end{pmatrix} X_n) = tr \tilde{Y} + tr Z \quad (16)$$

dan dengan

$$tr(J_n M) = tr\left(X_n \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -Z \end{pmatrix} X_n\right) = tr \tilde{Y} - tr Z \quad (17)$$

Karena keduanya harus saling menghilangkan agar matriks menjadi matriks jumlah tetap diagonal dengan bobot 0, ini berarti bahwa trace $\tilde{Y}$ dan Z harus secara terpisah bernilai 0. Hal ini memunculkan pernyataan berikut.

Teorema 3.1 (a) *Suatu matriks M , $2n \times 2n$ merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot ω jika dan hanya jika*

$$M = X_{2n} \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & Z \end{pmatrix} X_{2n} \quad (18)$$

di mana Y adalah matriks jumlah tetap $n \times n$ dengan bobot 2ω dan $tr Y = 2n\omega$, dan Z adalah sembarang matriks $n \times n$ dengan $tr Z = 0$.

(Hill dkk, 2018).

Bukti. Untuk $n = 2$. Diberikan matriks 4×4 , merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot ω sebagai berikut :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

akan ditunjukkan

$$M = X_4 \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O}_2 \\ \mathcal{O}_2 & Z \end{pmatrix} X_4$$

di mana Y adalah matriks jumlah tetap 2×2 dengan bobot 2ω dengan $tr Y = 4\omega$, dan Z adalah sembarang matriks 2×2 dengan $tr Z = 0$.

Dengan menggunakan sifat X_{2n} , yaitu :

$$X_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & J_n \\ J_n & -I_n \end{pmatrix}$$

Dengan mengalikan matriks M dengan X_4 diperoleh :

$$X_4 M X_4 = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{14} & a_{12} + a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} + a_{24} & a_{22} + a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} - a_{23} & a_{21} - a_{24} \\ 0 & 0 & a_{12} - a_{13} & a_{11} - a_{14} \end{bmatrix}$$

Dapat ditulis dalam matriks blok sebagai berikut

$$X_4 M X_4 = \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O}_2 \\ \mathcal{O}_2 & Z \end{pmatrix}$$

dengan

$$X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{14} & a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{24} & a_{22} + a_{23} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} a_{22} - a_{23} & a_{21} - a_{24} \\ a_{12} - a_{13} & a_{11} - a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan matriks diatas dengan X_4 diperoleh:

$$X_4 (X_4 M X_4) X_4 = X_4 \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O}_2 \\ \mathcal{O}_2 & Z \end{pmatrix} X_4 = M$$

Maka diperoleh $M = X_4 \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O}_2 \\ \mathcal{O}_2 & Z \end{pmatrix} X_4$. Secara umum untuk matriks $2n \times 2n$ dapat ditulis sebagai

$$M = X_{2n} \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & Z \end{pmatrix} X_{2n}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan jika $M = X_{2n} \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & Z \end{pmatrix} X_{2n}$, maka M $2n \times 2n$ merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot ω . Diberikan matriks jumlah tetap Y berukuran $n \times n$ dengan bobot 2ω dengan $\text{tr} Y = 2n\omega$, serta Z adalah sembarang matriks $n \times n$ dengan $\text{tr} Z = 0$.

$$Y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = 2n\omega$$

$$a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} = 2n\omega$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} = 2n\omega$$

$$a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1} = 2n\omega$$

$$a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2} = 2n\omega$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} = 2n\omega$$

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 2n\omega$$

$$\text{tr} Y = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 2n\omega$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $\text{tr} Z = z_{11} + z_{22} + \cdots + z_{nn} = 0$

akan ditunjukkan

$$M = X_{2n} \begin{pmatrix} Y & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & Z \end{pmatrix} X_{2n}$$

maka

$$M = X_{2n} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} X_{2n}$$

$$M = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

Dengan

$$X_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{a_{11} + z_{nn}}{2} & \frac{a_{12} + z_{n,n-1}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n} + z_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21} + z_{n-1,n}}{2} & \frac{a_{22} + z_{n-1,n-1}}{2} & \cdots & \frac{a_{2n} + z_{n-1,1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1} + z_{1n}}{2} & \frac{a_{n2} + z_{1,n-1}}{2} & \cdots & \frac{a_{nn} + z_{11}}{2} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{a_{1n} - z_{n1}}{2} & \cdots & \frac{a_{12} - z_{n,n-1}}{2} & \frac{a_{11} - z_{nn}}{2} \\ \frac{a_{2n} - z_{n-1,1}}{2} & \cdots & \frac{a_{22} - z_{n-1,n-1}}{2} & \frac{a_{21} - z_{n-1,n}}{2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{nn} - z_{11}}{2} & \cdots & \frac{a_{n2} - z_{1,n-1}}{2} & \frac{a_{n1} - z_{1n}}{2} \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{a_{n1} - z_{1n}}{2} & \frac{a_{n2} - z_{1,n-1}}{2} & \cdots & \frac{a_{nn} - z_{11}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{21} - z_{n-1,n}}{2} & \frac{a_{22} - z_{n-1,n-1}}{2} & \cdots & \frac{a_{2n} - z_{n-1,1}}{2} \\ \frac{a_{11} - z_{nn}}{2} & \frac{a_{12} - z_{n,n-1}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n} - z_{n1}}{2} \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{a_{nn} + z_{11}}{2} & \cdots & \frac{a_{n2} + z_{1,n-1}}{2} & \frac{a_{n1} + z_{1n}}{2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{2n} + z_{n-1,1}}{2} & \cdots & \frac{a_{22} + z_{n-1,n-1}}{2} & \frac{a_{21} + z_{n-1,n}}{2} \\ \frac{a_{1n} + z_{n1}}{2} & \cdots & \frac{a_{12} + z_{n,n-1}}{2} & \frac{a_{11} + z_{nn}}{2} \end{bmatrix}$$

dimana setiap entri matriks M sama dengan entri cerminannya terhadap pusat matriks. Karena setiap entri matriks M sama dengan entri cerminannya, maka M $2n \times 2n$ merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot ω . ■

Contoh 3.6 Diberikan matriks matriks jumlah tetap Y berukuran 4×4

$$Y = \begin{bmatrix} 16 & -8 & -16 & 24 \\ -8 & 16 & 24 & -16 \\ 24 & -16 & -8 & 16 \\ -16 & 24 & 16 & -8 \end{bmatrix}$$

dengan bobot 4, dan $\text{tr} Y = 16$, dan Z adalah sembarang matriks 4×4 dengan $\text{tr} Z = 0$

$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 4 \\ 5 & -2 & -4 & 8 \\ 12 & 1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

akan ditunjukkan

$$M = X_8 \begin{pmatrix} Y & O \\ O & Z \end{pmatrix} X_8$$

maka

$$M = X_8 \begin{bmatrix} 16 & -8 & -16 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 24 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & -16 & -8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 24 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 7 & -3 \end{bmatrix} X_8$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{23}{2} & \frac{25}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{19}{2} \\ 1 & \frac{19}{2} & \frac{25}{2} & -2 & -14 & \frac{23}{2} & \frac{13}{2} & -9 \\ 16 & -10 & -5 & \frac{21}{2} & \frac{11}{2} & -3 & -6 & 8 \\ -6 & \frac{33}{2} & \frac{23}{2} & -3 & -5 & \frac{9}{2} & \frac{15}{2} & -10 \\ -10 & \frac{15}{2} & \frac{9}{2} & -5 & -3 & \frac{23}{2} & \frac{33}{2} & -6 \\ 8 & -6 & -3 & \frac{11}{2} & \frac{21}{2} & -5 & -10 & 16 \\ -9 & \frac{13}{2} & \frac{23}{2} & -14 & -2 & \frac{25}{2} & \frac{19}{2} & 1 \\ \frac{19}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{25}{2} & \frac{23}{2} & \frac{-13}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan } X_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan definisi 3.2 (b), Matriks M disebut seimbang jika setiap entri sama dengan entri cerminannya terhadap pusat matriks. Karena setiap entri matriks M sama dengan entri cerminannya, maka M 8×8 merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot 4.

(b) suatu Matriks M $(2n + 1) \times (2n + 1)$ merupakan matriks jumlah tetap diagonal yang seimbang dengan bobot ω jika dan hanya jika

$$M = X_{2n+1} \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{n+1,n} \\ \mathcal{O}_{n+1,n} & Z \end{pmatrix} X_{2n+1} \quad (19)$$

dimana

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y + 2\omega \mathcal{E}_n & \sqrt{2}(\omega I_n - Y)1_n \\ \sqrt{2}((\omega I_n - Y)1_n)^T & \omega + 21_n^T Y 1_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

Y, Z adalah sembarang matriks $n \times n$ yang memiliki $\text{tr} Y = -21_n^T Y 1_n$ (sesuai dengan $\text{tr} \tilde{Y} = (2n+1)\omega$ dan $\text{tr} Z = 0$. (Hill dkk, 2018)

Bukti. Untuk $n = 2$. Diberikan matriks M berukuran 5×5 yang merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot ω

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

dengan $\sum_{j=1}^5 a_{ij} = 5\omega \quad \forall_i$ dan $\sum_{i=1}^5 a_{ii} = 5\omega$.

Dengan menggunakan sifat dari matriks X_{2n+1} yaitu

$$X_{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & 0_n & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{J}_n \\ 0_n^T & 1 & 0_n^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{J}_n & 0_n & -\frac{1}{\sqrt{2}}I_n \end{pmatrix}$$

Dengan mengalikan matriks M dengan X_5 diperoleh :

$$X_5 M X_5 = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{15} & a_{12} + a_{14} & \sqrt{2}a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} + a_{25} & a_{22} + a_{24} & \sqrt{2}a_{23} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}a_{31} & \sqrt{2}a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} - a_{24} & a_{21} - a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} - a_{14} & a_{11} - a_{15} \end{bmatrix}$$

Dapat ditulis dalam matriks blok sebagai berikut

$$X_5 M X_5 = \begin{bmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{32} \\ \mathcal{O}_{23} & Z \end{bmatrix}$$

Dimana

$$X_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{15} & a_{12} + a_{14} & \sqrt{2}a_{13} \\ a_{21} + a_{25} & a_{22} + a_{24} & \sqrt{2}a_{23} \\ \sqrt{2}a_{31} & \sqrt{2}a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{tr}\tilde{Y} = 5\omega$$

$$\mathcal{O}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} a_{22} - a_{24} & a_{21} - a_{25} \\ a_{12} - a_{14} & a_{11} - a_{15} \end{bmatrix}, \text{tr}Z = 0.$$

Dengan mengalikan matriks diatas dengan X_5 diperoleh :

$$X_5(X_5 M X_5)X_5 = X_5 \begin{bmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{32} \\ \mathcal{O}_{23} & Z \end{bmatrix} X_5 = M$$

Maka diperoleh $M = X_5 \begin{bmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{32} \\ \mathcal{O}_{23} & Z \end{bmatrix} X_5$. Secara umum untuk matriks $(2n+1) \times (2n+1)$ dapat ditulis sebagai

$$M = X_{2n+1} \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{n+1,n} \\ \mathcal{O}_{n+1,n} & Z \end{pmatrix} X_{2n+1}$$

Selanjutnya akan dibuktikan jika $M = X_{2n+1} \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{n+1,n} \\ \mathcal{O}_{n+1,n} & Z \end{pmatrix} X_{2n+1}$ maka Matriks M $(2n+1) \times (2n+1)$ merupakan matriks jumlah tetap diagonal yang seimbang dengan bobot ω .

Diberikan matriks Y dan Z yang merupakan sebarang matriks $n \times n$ yang memiliki $\text{tr}Y = -21_n^T Y 1_n$ (sesuai dengan $\text{tr}\tilde{Y} = (2n+1)\omega$) dan $\text{tr}Z = 0$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

dimana

$$\text{tr}Y = -2\mathbf{1}_n^T Y \mathbf{1}_n$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(y_{11} + y_{21} + \cdots + y_{n1} + y_{12} + y_{22} + \cdots + y_{n2} + \cdots + y_{1n} + y_{2n} + \cdots + y_{nn})$$

$$= y_{11} + y_{22} + \cdots + y_{nn}$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

dengan $\text{tr}Z = z_{11} + z_{22} + \cdots + z_{nn} = 0$.

akan ditunjukkan

$$M = X_{2n+1} \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{n+1,n} \\ \mathcal{O}_{n+1,n} & Z \end{pmatrix} X_{2n+1}$$

Menentukan blok matriks $\tilde{Y}$, dimana

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y + 2\omega \mathcal{E}_n & \sqrt{2}(\omega I_n - Y)\mathbf{1}_n \\ \sqrt{2}((\omega I_n - Y)\mathbf{1}_n)^T & \omega + 2\mathbf{1}_n^T Y \mathbf{1}_n \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad Y + 2\omega \mathcal{E}_n &= \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega & 2\omega & \cdots & 2\omega \\ 2\omega & 2\omega & \cdots & 2\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\omega & 2\omega & \cdots & 2\omega \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{11} + 2\omega & y_{12} + 2\omega & \cdots & y_{1n} + 2\omega \\ y_{21} + 2\omega & y_{22} + 2\omega & \cdots & y_{2n} + 2\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} + 2\omega & y_{n2} + 2\omega & \cdots & y_{nn} + 2\omega \end{bmatrix} \\ \blacksquare \quad \sqrt{2}(\omega I_n - Y)\mathbf{1}_n &= \sqrt{2} \left(\begin{bmatrix} \omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\omega - y_{11} - y_{12} - \cdots - y_{1n}) \\ \sqrt{2}(\omega - y_{21} - y_{22} - \cdots - y_{2n}) \\ \vdots \\ \sqrt{2}(\omega - y_{n1} - y_{n2} - \cdots - y_{nn}) \end{bmatrix} \\ \blacksquare \quad \sqrt{2}((\omega I_n - Y)\mathbf{1}_n)^T &= [\omega'_1 \quad \omega'_2 \quad \cdots \quad \omega'_n], \text{ dengan} \end{aligned}$$

$$\omega'_1 = \sqrt{2}(\omega - y_{11} - y_{12} - \cdots - y_{1n})$$

$$\omega'_2 = \sqrt{2}(\omega - y_{21} - y_{22} - \cdots - y_{2n})$$

$$\vdots$$

$$\omega'_n = \sqrt{2}(\omega - y_{n1} - y_{n2} - \cdots - y_{nn})$$

$$\begin{aligned} \omega + 21_n^T Y 1_n &= \omega + 2(y_{11} + y_{21} + \cdots + y_{n1} + y_{12} + y_{22} + \cdots + y_{n2} + \cdots + \\ &\quad y_{1n} + y_{2n} + \cdots + y_{nn}) \end{aligned}$$

diperoleh

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y' & \gamma \\ \gamma^T & \mathcal{Y} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} Y' &= \begin{bmatrix} y_{11} + 2\omega & y_{12} + 2\omega & \cdots & y_{1n} + 2\omega \\ y_{21} + 2\omega & y_{22} + 2\omega & \cdots & y_{2n} + 2\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} + 2\omega & y_{n2} + 2\omega & \cdots & y_{nn} + 2\omega \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\omega - y_{11} - y_{12} - \cdots - y_{1n}) \\ \sqrt{2}(\omega - y_{21} - y_{22} - \cdots - y_{2n}) \\ \vdots \\ \sqrt{2}(\omega - y_{n1} - y_{n2} - \cdots - y_{nn}) \end{bmatrix}, \text{ dan} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= [\omega + 2(y_{11} + y_{21} + \cdots + y_{n1} + y_{12} + y_{22} + \cdots + y_{n2} + \cdots + y_{1n} + y_{2n} + \cdots + \\ &\quad y_{nn})] \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks M

$$\begin{aligned} M &= X_{2n+1} \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \mathcal{O}_{n+1,n} \\ \mathcal{O}_{n+1,n} & Z \end{pmatrix} X_{2n+1} \\ &= X_{2n+1} \begin{bmatrix} & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & Y' & \gamma & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & Y^T & \mathcal{Y} & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} X_{2n+1} \\ &= \begin{bmatrix} A' & E' & B' \\ (E')^T & G & (F')^T \\ C' & F' & D' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{y_{11} + 2\omega + z_{nn}}{2} & \frac{y_{12} + 2\omega + z_{n,n-1}}{2} & \dots & \frac{y_{1n} + 2\omega + z_{n1}}{2} \\ \frac{y_{21} + 2\omega + z_{n-1,n}}{2} & \frac{y_{22} + 2\omega + z_{n-1,n-1}}{2} & \dots & \frac{y_{2n} + 2\omega + z_{n-1,1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_{n1} + 2\omega + z_{1n}}{2} & \frac{y_{n2} + 2\omega + z_{1,n-1}}{2} & \dots & \frac{y_{nn} + 2\omega + z_{11}}{2} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{y_{1n} + 2\omega - z_{n1}}{2} & \dots & \frac{y_{12} + 2\omega - z_{n,n-1}}{2} & \frac{y_{11} + 2\omega - z_{nn}}{2} \\ \frac{y_{2n} + 2\omega - z_{n-1,1}}{2} & \dots & \frac{y_{22} + 2\omega - z_{n-1,n-1}}{2} & \frac{y_{21} + 2\omega - z_{n-1,n}}{2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{nn} + 2\omega - z_{11}}{2} & \dots & \frac{y_{n2} + 2\omega - z_{1,n-1}}{2} & \frac{y_{n1} + 2\omega - z_{1n}}{2} \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{y_{n1} + 2\omega - z_{1n}}{2} & \frac{y_{n2} + 2\omega - z_{1,n-1}}{2} & \dots & \frac{y_{nn} + 2\omega - z_{11}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_{21} + 2\omega - z_{n-1,n}}{2} & \frac{y_{22} + 2\omega - z_{n-1,n-1}}{2} & \dots & \frac{y_{2n} + 2\omega - z_{n-1,1}}{2} \\ \frac{y_{11} + 2\omega - z_{nn}}{2} & \frac{y_{12} + 2\omega - z_{n,n-1}}{2} & \dots & \frac{y_{1n} + 2\omega - z_{n1}}{2} \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{y_{nn} + 2\omega + z_{11}}{2} & \dots & \frac{y_{n2} + 2\omega + z_{1,n-1}}{2} & \frac{y_{n1} + 2\omega + z_{1n}}{2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{2n} + 2\omega + z_{n-1,1}}{2} & \dots & \frac{y_{22} + 2\omega + z_{n-1,n-1}}{2} & \frac{y_{21} + 2\omega + z_{n-1,n}}{2} \\ \frac{y_{1n} + 2\omega + z_{nn}}{2} & \dots & \frac{y_{12} + 2\omega + z_{n,n-1}}{2} & \frac{y_{11} + 2\omega + z_{nn}}{2} \end{bmatrix}$$

$$E' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(\omega - y_{11} - y_{12} - \dots - y_{1n})}{2} \\ \frac{\sqrt{2}(\omega - y_{21} - y_{22} - \dots - y_{2n})}{2} \\ \vdots \\ \frac{\sqrt{2}(\omega - y_{n1} - y_{n2} - \dots - y_{nn})}{2} \end{bmatrix}$$

$$F' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}(\omega - y_{n1} - y_{n2} - \dots - y_{nn})}{2} \\ \vdots \\ \frac{\sqrt{2}(\omega - y_{21} - y_{22} - \dots - y_{2n})}{2} \\ \frac{\sqrt{2}(\omega - y_{11} - y_{12} - \dots - y_{1n})}{2} \end{bmatrix}$$

$$G' = \left[\frac{\omega + 2(y_{11} + y_{21} + \dots + y_{n1} + y_{12} + y_{22} + \dots + y_{n2} + \dots + y_{1n} + y_{2n} + \dots + y_{nn})}{2} \right]$$

Sesuai dengan definisi 3.2 (b), Matriks M disebut seimbang jika setiap entri sama dengan entri cerminannya terhadap pusat matriks. Karena setiap entri matriks M sama dengan entri cerminannya, maka M $2n + 1 \times 2n + 1$ merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot ω . ■

Contoh 3.7

Diberikan matriks Y dan Z yang merupakan sebarang matriks 2×2

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan } trY = -2[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2, trZ = 5 + (-5) = 0$$

selanjutnya menentukan matriks $\tilde{Y}$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -8\sqrt{2} \\ -10 & 1 & 9\sqrt{2} \\ 9\sqrt{2} & -8\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh matriks M berikut

$$M = X_5 \begin{bmatrix} 1 & 7 & -8\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 9\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 9\sqrt{2} & -8\sqrt{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -5 \end{bmatrix} X_5 = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -8 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 9 & -2 & -8 \\ 9 & -8 & -2 & -8 & 9 \\ -8 & -2 & 9 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan } X_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Matriks M merupakan matriks jumlah tetap diagonal seimbang dengan bobot $\omega = 0$.

Definisi 3.3 Matriks jumlah tetap diagonal $n \times n$ disebut *trivial* jika matriks tersebut merupakan kelipatan dari matriks $\mathcal{E}_n$ (Hill dkk, 2018).

Contoh 3.8

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 99 & 99 \\ 99 & 99 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.2. Perhatikan matriks jumlah tetap diagonal asosiatif (non-trivial, bobot 0) $2n \times 2n$

$$M = X_{2n} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & V^T \\ W & \mathcal{O}_n \end{pmatrix} X_{2n} \quad (21)$$

dengan V, W merupakan matriks dengan rank 1. Maka tepat satu dari pernyataan berikut ini benar.

- a) M^2 memiliki rank 2 dan merupakan matriks jumlah tetap non-diagonal, dan semua pangkatnya adalah matriks jumlah tetap non-diagonal.
- b) M^2 memiliki rank 0 atau 1 dan merupakan matriks jumlah tetap diagonal nilpotent, pada kenyataannya $M^k = \mathcal{O}_{2n}$.

(Hill dkk, 2018).

Bukti. Diberikan sebarang matriks V dan W dengan rank 1.

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$M = X_4 \begin{pmatrix} \mathcal{O}_2 & V^T \\ W & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} X_4$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{2} & \frac{v_1}{2} & -\frac{v_1}{2} & -\frac{v_2}{2} \\ \frac{w_1}{2} & \frac{w_2}{2} & \frac{w_2}{2} & \frac{w_1}{2} \\ -\frac{w_1}{2} & -\frac{w_2}{2} & -\frac{w_2}{2} & -\frac{w_1}{2} \\ \frac{v_2}{2} & \frac{v_1}{2} & -\frac{v_1}{2} & -\frac{v_2}{2} \end{bmatrix}$$

M merupakan matriks jumlah tetap diagonal asosiatif dengan bobot 0, dan bukan kelipatan dari matriks $\mathcal{E}_n$ sehingga matriks M merupakan non-trivial. Selanjutnya akan ditentukan rank dari matriks M^2 .

$$\text{Rank}(M^2) = \text{Rank} \begin{bmatrix} \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & \frac{v_2 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_2 w_1}{2} \\ -\frac{v_2 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_2 w_2}{2} & \frac{v_2 w_1}{2} \\ \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}(M^2) = \begin{cases} 2 & v_1 \neq 0, w_1 \neq 0, v_1 w_1 - v_2 w_2 \neq 0 \\ 2 & v_1 \neq 0, w_1 \neq 0, v_1 w_1 - v_2 w_2 = 0 \\ 1 & v_1 = 0, v_2 \neq 0, w_1 \neq 0 \\ 1 & w_1 = 0, v_1 \neq 0, w_2 \neq 0 \\ 0 & v_1 w_1 = 0, v_2 w_1 = 0, v_1 w_2 = 0 \end{cases}$$

- Untuk $v_1 \neq 0, w_1 \neq 0, v_1 w_1 - v_2 w_2 \neq 0$, diperoleh matriks M^2 berikut

$$M^2 = \begin{bmatrix} \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ -\frac{v_2 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_2 w_1}{2} \\ \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan rank dari matriks M^2 menggunakan eliminasi gauss

$$\begin{aligned} \text{Rank}(M^2) &= \text{Rank} \begin{bmatrix} \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_2 w_1}{2} \\ -\frac{v_2 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_2 w_1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \text{Rank} \begin{bmatrix} \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \\ 0 & \frac{v_1 w_1 - v_2 w_2}{2} & -\frac{v_1 w_1 - v_2 w_2}{2} & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

M^2 memiliki rank 2 dan merupakan matriks jumlah tetap non-diagonal, dan semua pangkatnya adalah matriks jumlah tetap non-diagonal.

- Untuk $v_1 \neq 0, w_1 \neq 0, v_1 w_1 - v_2 w_2 = 0$, diperoleh matriks M^2 berikut

$$M^2 = \begin{bmatrix} \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ -\frac{v_2 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_2 w_1}{2} \\ \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan rank dari matriks M^2 menggunakan eliminasi gauss

$$\begin{aligned}
\text{Rank}(M^2) &= \text{Rank} \begin{bmatrix} \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & \frac{v_2 w_2}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & -\frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_2 w_2}{2} & \frac{v_2 w_1}{2} \\ -\frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \text{Rank} \begin{bmatrix} \frac{v_1 w_1}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_1 w_1 - v_2 w_2}{2} & -v_2 w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

M^2 memiliki rank 2 dan merupakan matriks jumlah tetap non-diagonal, dan semua pangkatnya adalah matriks jumlah tetap non-diagonal.

- Untuk $v_1 = 0, v_2 \neq 0, w_1 \neq 0$, diperoleh matriks M^2 berikut

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_2 w_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ -\frac{v_2 w_1}{2} & 0 & 0 & \frac{v_2 w_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan rank dari matriks M^2 menggunakan eliminasi gauss

$$\begin{aligned}
\text{Rank}(M^2) &= \text{Rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_2 w_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ \frac{v_2 w_1}{2} & 0 & 0 & \frac{v_2 w_1}{2} \\ -\frac{v_2 w_1}{2} & 0 & 0 & \frac{v_2 w_1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \text{Rank} \begin{bmatrix} \frac{v_2 w_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{v_2 w_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}$$

M^2 memiliki rank 1 dan merupakan matriks jumlah tetap diagonal nilpotent.

- Untuk $w_1 = 0, v_1 \neq 0, w_2 \neq 0$, diperoleh matriks M^2 berikut

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan rank dari matriks M^2 menggunakan eliminasi gauss

$$\text{Rank}(M^2) = \text{Rank} \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Rank} \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_1 w_2}{2} & \frac{v_1 w_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

M^2 memiliki rank 1 dan merupakan matriks jumlah tetap diagonal nilpotent.

- Untuk $v_1 w_1 = 0, v_2 w_1 = 0, v_1 w_2 = 0$, diperoleh matriks M^2 berikut

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditentukan rank dari matriks M^2 menggunakan eliminasi gauss

$$\text{Rank}(M^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

M^2 memiliki rank 0 dan merupakan matriks jumlah tetap diagonal nilpotent.

Contoh 3.9

Diberikan matriks V dan W dengan rank 1.

$$V = \begin{bmatrix} 19 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -27 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$M = X_4 \begin{pmatrix} \mathcal{O}_2 & V^T \\ W & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} X_4$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.5 & 9.5 & -9.5 & -1.5 \\ -13.5 & 4 & 4 & -13.5 \\ 13.5 & -4 & -4 & 13.5 \\ 1.5 & 9.5 & -9.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh matriks jumlah tetap diagonal asosiatif (non-trivial, bobot 0). Selanjutnya akan ditentukan rank dari matriks M^2 .

$$\begin{aligned} \text{Rank}(M^2) &= \text{Rank} \begin{bmatrix} -256.5 & 76 & 76 & -256.5 \\ -40.5 & -256.5 & 256.5 & 40.5 \\ 40.5 & 256.5 & -256.5 & -40.5 \\ -256.5 & 76 & 76 & -256.5 \end{bmatrix} \\ &= \text{Rank} \begin{bmatrix} -256.5 & 76 & 76 & -256.5 \\ 0 & -268.5 & 244.5 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

M^2 memiliki rank 2 dan merupakan matriks jumlah tetap non-diagonal, dan semua pangkatnya adalah matriks jumlah tetap non-diagonal.

Contoh 3.10

Diberikan matriks V dan W dengan rank 1.

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$M = X_4 \begin{pmatrix} \mathcal{O}_2 & V^T \\ W & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} X_4$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ -9 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 4.5 & 0 & 0 & -4.5 \\ -9 & 4.5 & 4.5 & 0 \\ 0 & -4.5 & -4.5 & 9 \\ 4.5 & 0 & 0 & -4.5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh matriks jumlah tetap diagonal asosiatif (non-trivial, bobot 0). Selanjutnya akan ditentukan rank dari matriks M^2 .

$$\text{Rank}(M^2) = \text{Rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -81 & 0 & 0 & 81 \\ 81 & 0 & 0 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Rank} \begin{bmatrix} -81 & 0 & 0 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

M^2 memiliki rank 1 dan merupakan matriks jumlah tetap diagonal nilpotent, pada kenyataannya $M^4 = \mathcal{O}_4$.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian pada bab III dapat disimpulkan beberapa sifat matriks jumlah tetap sebagai berikut:

1. 1_n merupakan vektor eigen, dengan nilai eigen $n\omega$, untuk matriks jumlah tetap M dan transpose matriks jumlah tetap M^T .
2. Jika M merupakan matriks jumlah tetap diagonal asosiatif $2n \times 2n$, non-trivial dengan bobot 0, maka M^2 memiliki *rank* 2 dan merupakan matriks jumlah tetap non-diagonal, sebaliknya M^2 memiliki *rank* 0 atau 1 dan merupakan matriks jumlah tetap nilpotent.
3. Matriks jumlah tetap bersifat asosiatif jika tiap entri dan entri cerminannya terhadap pusat matriks berjumlah 2ω . Setiap matriks jumlah tetap asosiatif merupakan matriks jumlah tetap diagonal, dengan kuadratnya berupa matriks jumlah tetap seimbang. Matriks jumlah tetap bersifat seimbang jika tiap entri sama dengan entri cerminannya terhadap pusat matriks.

4.2 Saran

Untuk melanjutkan pembahasan mengenai penelitian ini, penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian ini pada beberapa sifat matriks jumlah tetap dengan rank n blok. Karena masih banyak sifat yang belum diperoleh dalam penelitian ini, sehingga masih terbuka bagi peneliti lain untuk membahas lebih jauh tentang matriks jumlah tetap.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard & Chris, Rorres. (2014). *Elementary Linear Algebra (11th edition)*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Anton, Howard & Kaul, Anton. (2019). *Elementary Linear Algebra (12th edition)*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Dian Pratama, Jovian., Udjiani, Titi (2020). Struktur Aljabar Matriks Nilpoten dan Idempoten. 1.
- Eka Pratiwi, Yuyun., Kiftiah, Mariatul., & Wulan Ramadhani, Eka. (2017). Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen matriks Interval Menggunakan Metode Pangkat. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 6(2), 18.
- Febri Sr, Dhimas., Triono, Eko., & Anapranata, Heru. (2019). Implementasi Metode Eliminasi Gaus Pada Sistem Informasi Investasi Emas Menggunakan Octave. *Jurnal Informatika Polinema*, 5(2), 53-53.
- Herstein, I. N. (1996). *Abstract Algebra (3rd edition)*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Hill, S.L., Lettington, M.C., & Schmidt, K.M. (2016). On Block Representations and Spectral Properties of Semimagic Square Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 1-9.
- Hill, S.L., Lettington, M.C., & Schmidt, K.M. (2018). Blok Representation and Spectral Properties of Constant Sum Matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 34, 170-171.
- Mursyidah, Himmatul. (2017). Algoritma Polinomial Minimum Untuk Membentuk Matriks Diagonal dari Matriks Persegi. *Aksioma Jurnal Pendidikan Matematika FKIP Univ. Muhammadiyah Metro*, 6(2), 284-285.
- Purnama Sari, Wulan., Noliza Bakar, Nova., & Yanita. (2020). Menghitung Determinan Matriks Blok Menggunakan Ekspansi Laplace Dan Komplemen Schur. *Jurnal Matematika UNAND*, 9(2), 139.
- T. Sutojo, dkk. (2010). *Teori dan Aplikasi Aljabar Linier dan Matriks*. Yogyakarta: Andi.