

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring perkembangan teknologi informasi, masalah yang kompleks juga sudah bisa diselesaikan dengan mudah. Setiap masalah dapat disimulasikan terlebih dahulu sebelum diimplementasikan. Simulasi merupakan suatu prosedur kuantitatif, yang menggambarkan sebuah sistem, dengan mengembangkan sebuah model dari sistem tersebut dan melakukan sederetan uji coba untuk memperkirakan perilaku sistem pada kurun waktu tertentu. (Hutahaean, 2018). Dalam dunia statistika dan komputasi modern, simulasi Monte Carlo merupakan salah satu metode yang sangat penting dan luas penggunaannya, khususnya dalam menghasilkan bilangan acak dari distribusi probabilitas tertentu. Simulasi ini digunakan dalam berbagai bidang seperti keuangan, fisika, biostatistika, dan ilmu data untuk menyelesaikan masalah yang tidak mudah dipecahkan secara analitik.

Untuk dapat melakukan simulasi dengan benar, salah satu langkah penting adalah menghasilkan bilangan acak. Bilangan acak adalah bilangan yang tidak dapat diprediksi kemunculannya, tetapi dapat dibangkitkan dengan pola tertentu (distribusi). Untuk membangkitkan bilangan acak bisa menggunakan banyak algoritma atau metode distribusi (Dewi dan Sumijan, 2021). Dua metode utama yang sering digunakan untuk keperluan ini adalah Transformasi Invers (*Inverse Transform Method*) dan Algoritma *Accept-Reject* (*Accept-Reject Algorithm*). Transformasi invers bekerja berdasarkan prinsip bahwa jika kita memiliki fungsi distribusi kumulatif (*CDF*) dari suatu peubah acak, maka kita dapat menggunakan invers dari fungsi tersebut untuk menghasilkan nilai-nilai acak dari distribusi yang bersangkutan (Ross, 2013). Metode ini sangat efisien bila fungsi invers dari distribusi tersebut dapat dihitung secara eksplisit.

Namun, dalam banyak kasus, distribusi yang digunakan memiliki bentuk fungsi distribusi kumulatif yang rumit atau tidak memiliki invers yang dapat dihitung secara eksplisit (Okagbue dkk, 2020). Dalam situasi tersebut, algoritma *Accept-Reject Generation* menjadi alternatif yang andal. Metode ini menggunakan fungsi pembanding (*proposal distribution*) dan konstanta pengali untuk menerima atau menolak bilangan acak yang dihasilkan, sehingga tetap mengikuti distribusi target



(Okagbue dkk, 2020). Algoritma *Accept-Reject* telah banyak digunakan untuk an acak menggunakan distribusi dasar yang sesuai. Dalam dua bilangan berdisitribusi uniform dihasilkan dan diterapkan obabilitas menggunakan distribusi yang mendasarinya. Rasio eroleh menggunakan bilangan berdisitribusi uniform pertama dingkan dengan bilangan berdisitribusi uniform kedua dalam an acak (Aslam dan Alamri, 2023).

Pemahaman mendalam tentang kedua metode ini sangat penting karena keduanya menjadi fondasi utama dalam banyak simulasi berbasis Monte Carlo. Oleh karena itu, melalui tugas akhir ini, penulis bertujuan untuk membahas prinsip kerja serta penerapan dari metode transformasi invers monte-carlo dan algoritma *accept-reject generation*.

Dalam dunia statistik, sering kali kita dihadapkan pada situasi di mana suatu nilai probabilitas harus ditentukan, tetapi nilainya tidak diketahui secara pasti. Salah satu bentuk ilustrasi dari masalah ini dapat dilihat dalam sebuah permainan bernama *Das Statistische Spiel*, yang diperkenalkan oleh H. Steinhaus pada tahun 1957. Permainan ini melibatkan dua pemain, yaitu pemain D dan pemain S. Pemain D memiliki banyak koin, dan setiap koin memiliki peluang berbeda-beda untuk muncul sisi “kepala”. Pemain D akan memilih satu koin, dan membiarkan pemain S melakukan lemparan sebanyak n kali. Setelah itu, pemain S harus menebak nilai peluang dari koin yang digunakan.

Dalam permainan ini, peran pemain D harus berfikir strategis. Tujuan pemain D adalah memilih nilai peluang dari suatu distribusi sehingga tebakan pemain S menjadi tidak akurat. Oleh karena itu, pemain D perlu menentukan distribusi probabilitas seperti apa yang akan digunakan saat memilih koin. Salah satu distribusi yang bisa digunakan adalah distribusi uniform pada interval $(0,1)$, tetapi dalam praktiknya, bisa juga digunakan distribusi yang lebih kompleks agar strategi pemain D menjadi lebih kuat.

Untuk menghasilkan nilai peluang secara acak dari suatu distribusi tertentu, pemain D dapat menggunakan metode simulasi Monte Carlo. Dua metode yang paling umum digunakan dalam konteks ini adalah metode transformasi invers dan algoritma *accept-reject*. Penggunaan algoritma ini memberi keleluasaan bagi pemain D untuk menyusun strategi yang membuat pemain S kesulitan dalam memperkirakan nilai peluang yang sebenarnya. Hal ini menjadikan peran pemain D sangat penting dalam mengendalikan jalannya permainan, karena ia memiliki kendali atas proses pembangkitan data yang menjadi dasar estimasi bagi lawannya.

Dengan demikian, permainan “*Das Statistische Spiel*” bukan hanya menjadi alat untuk memahami proses estimasi dalam statistik, tetapi juga menggambarkan bagaimana metode Monte Carlo seperti transformasi invers dan *accept-reject algorithm* dapat digunakan secara strategis oleh pihak yang mengendalikan sumber ketidakpastian. Ini menunjukkan bahwa simulasi bukan hanya soal teknis, melainkan juga dalam pengambilan keputusan statistik.



Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas, maka penulis ingin melakukan penelitian mengenai cara untuk membangkitkan data menggunakan metode transformasi invers monte carlo dan *accept reject generation*, sehingga kita mendapat data dari hasil simulasi ini, dan dituangkan dalam tugas akhir iniyang berjudul **“Penerapan *Accept-Reject Generation Algorithm* Untuk Membangkitkan Distribusi Permainan “*Das Statische Spiel*””**

1.2 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini terdapat beberapa batasan masalah, antara lain:

1. Instrumental PDF dalam penelitian ini memiliki bentuk $g(w) = 4w^3$
2. Nilai n yang digunakan dalam penelitian ini harus lebih besar dari 64 diantaranya; $n = 72,81,100,135,180$.
3. Banyaknya simulasi yang dilakukan yaitu 10.000 kali
4. Fokus penelitian pada permainan “Das Statische Spiel” terdapat pada pemain D, dan dalam hal ini permainan baru akan dimulai.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, tujuan penelitian ini diantaranya

1. Menerapkan algoritma *Accept-Reject Generation* sebagai alternatif metode pembangkitan bilangan acak dari distribusi probabilitas yang kompleks, khususnya distribusi strategi terbaik dalam permainan *Das Statistische Spiel* yang tidak memiliki bentuk invers tertutup dari fungsi distribusi kumulatif (CDF).
2. Mengevaluasi efektivitas dan efisiensi algoritma *Accept-Reject Generation* dalam menghasilkan distribusi target, melalui simulasi Monte Carlo pada berbagai nilai parameter n , dengan meninjau pola distribusi hasil bangkitan dan tingkat penerimaan (*acceptance rate*).
3. Mengidentifikasi batasan penerapan algoritma, khususnya pengaruh pemilihan distribusi instrumental terhadap keberhasilan simulasi.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini diantaranya

1. Menambah wawasan dan pengetahuan mengenai penggunaan Algoritma *Accept-Reject Generation* dalam membangkitkan data acak dari distribusi yang kompleks, khususnya distribusi yang tidak memiliki invers dari fungsi kumulatif (CDF) dalam bentuk tertutup. Dapat digunakan sebagai referensi dan bahan ajar dalam pengembangan pembelajaran khususnya di bidang simulasi Monte Carlo, pembangkitan data acak, dan algoritma *accept-reject*.



3. Menunjukkan bagaimana pemilihan distribusi instrumental yang sesuai dapat memengaruhi efisiensi simulasi dalam algoritma *accept-reject*, sehingga penelitian ini juga dapat menjadi acuan dalam optimasi desain simulasi.
4. Meningkatkan pemahaman terhadap konsep strategi terbaik (*best strategy*) dalam permainan "*Das Statistische Spiel*", serta memberikan gambaran penerapan teori probabilitas dalam konteks teori permainan.

1.5 Teori

1.5.1 Peubah Acak

Definisi 1.1 Misalkan eksperimen acak dengan ruang sampel C . Suatu fungsi X , yang memasangkan setiap elemen $c \in C$ secara satu-satu $X(c) = x$, dinamakan sebagai Peubah Acak. Ruang atau Range dari X adalah himpunan semua bilangan riil $D\{x: x = X(c), c \in C\}$ (Hogg, dkk, 2019).

1.5.2 Peubah Acak Kontinu

Suatu peubah acak dikatakan peubah acak kontinu jika *cumulative distribution function* (*cdf*)-nya adalah fungsi kontinu untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Adapun *cdf* didefinisikan sebagai

Definisi 1.2 (*Cumulative Distribution Function*). Misalkan X merupakan peubah acak, dengan C menyatakan ruang sampel dari X . Maka *cdf* didefinisikan oleh $F_X(x)$, dengan

$$F(x) = P((-\infty, x]) = P(\{c \in C: X(c) \leq x\}) = P(X \leq x) \quad (1)$$

Jika X kontinu, maka $P(X = x) = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Kebanyakan peubah acak kontinu merupakan absolut kontinu, yaitu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (2)$$

untuk suatu fungsi $f(t)$. Fungsi $f(t)$ dinamakan *probability density function* (*pdf*) dari X . Jika $f(x)$ juga kontinu, maka berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus mengimplikasikan bahwa

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad (3)$$

(Hogg, dkk, 2019).



orm

tinu U dikatakan memiliki distribusi *uniform* pada interval (a, b) untuk

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b \quad (4)$$

Selanjutnya, distribusi ini akan dinotasikan oleh $U \sim \text{Unif}(a, b)$. Ini merupakan *pdf* yang valid karena luas di bawah kurva $f(x)$ merupakan luas dari persegi Panjang dengan lebar $(b - a)$ dan tinggi $\frac{1}{b-a}$. Sedangkan *cdf*-nya memiliki bentuk

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jika } a < x < b \\ 1, & \text{jika } x \geq b \end{cases} \quad (5)$$

Distribusi *uniform* yang sering digunakan adalah $\text{Unif}(0,1)$, yang juga dikenal sebagai distribusi *uniform* standar (Blitzstein, 2015).

1.5.4 Metode Transformasi Invers Monte-Carlo

Misalkan $X = F_X^{-1}(U)$ adalah peubah acak dengan fungsi distribusi F_X dan $U \sim \text{Unif}(0,1)$ yang memiliki fungsi distribusi $P[U \leq u] = F_U(u) = u$, $u \in (0,1)$. Asumsikan F_X monoton dan kontinu sehingga F_X memiliki invers yaitu F_X^{-1} , maka distribusi dari X adalah (Hogg, dkk, 2019)

$$P[X \leq x]$$

$$P[F_X^{-1}(U) \leq x]$$

$$P[F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(x)]$$

$$P[U \leq F_X(x)]$$

$$F_U(F_X(x))$$

$$F_X(x)$$

Jadi, untuk membangkitkan peubah acak X dengan fungsi distribusi F_X , ambil $U \sim \text{Unif}(0,1)$ dan pilih $X = F_X^{-1}(u)$ (Rubinstein, 2017).

1.5.5 Algoritma Accept-Reject Generation Monte-Carlo

Metode accept-rejection adalah salah satu metode standar yang digunakan untuk membangkitkan distribusi. Misalkan kita ingin membangkitkan data dari densitas $f(x)$ dengan distribusi kumulatif $F(x)$, dan terdapat densitas lain $g(w)$ dengan fungsi distribusi kumulatif $G(w)$ yang mana kita sudah mengetahui cara mengambil sampelnya (misalnya dengan menggunakan metode transformasi invers). (Nauven, 2016)



bahwa kedua fungsi $f(x)$ dan $g(w)$ memiliki *support* yang $\mathbb{R}$ dan terdapat sebuah konstanta hingga M sedemikian

$$M \geq \sup_{\{x,w \in (a,b)\}} \frac{f(x)}{g(w)} \quad (6)$$

Prosedur ini dapat digunakan untuk membangkitkan peubah acak yang mana fungsi invers dari distribusinya tidak dapat diperoleh dalam bentuk tertutup. Misalkan X adalah peubah acak dengan densitas $f(x)$, yang kemudian disebut sebagai *target pdf*. Asumsikan bahwa dimiliki pembangkit distribusi $U \sim Unif(0,1)$ dan W yang memiliki densitas $g(w)$ dan independent terhadap U , yang kemudian disebut sebagai *instrumental pdf*. Selanjutnya pilih suatu konstan M sehingga

$$f(x) \leq M \cdot g(w) \quad (7)$$

Maka algoritma *Accept-Reject* adalah sebagai berikut (Hogg, dkk, 2019):

1. Bangkitkan observasi dari W dan U
2. Jika $U \leq \frac{f(W)}{M \cdot g(W)}$, maka pilih $X = W$. Jika tidak, kembali ke langkah pertama
3. X memiliki densitas $f(x)$

1.5.6 Distribusi Beta

Distribusi Beta merupakan salah satu distribusi probabilitas kontinu yang didefinisikan pada interval $(0,1)$. Distribusi ini bersifat sangat fleksibel karena bentuknya sangat bergantung pada dua parameter bentuk, yaitu α dan β . Distribusi ini umum digunakan dalam pemodelan proporsi, statistik Bayesian, serta simulasi Monte Carlo (DeGroot & Schervish, 2012).

Fungsi densitas probabilitas (PDF) dari distribusi Beta didefinisikan sebagai:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, 0 < x < 1$$

di mana $B(\alpha, \beta)$ merupakan fungsi beta:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

(Kotz, Johnson, & Balakrishnan, 1995).

Berdasarkan (Steinhaus, 1957), strategi terbaik dalam permainan “*das statische*” memilih estimasi titik.



$$\hat{p} = \frac{y + \frac{\sqrt{n}}{2}}{n + \sqrt{n}}$$

Adapun distribusi terbaik yang bersesuaian dengan estimasi adalah distribusi beta yang menggunakan parameter $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{n}}{2}$, yaitu:

$$f(x) = (x(1-x))^{\frac{\sqrt{n}}{2}-1} \cdot \frac{\Gamma(\sqrt{n})}{\left(\Gamma\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dengan, $0 < x < 1$



BAB II METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari sebuah permainan bernama "*Das Statistische Spiel*". Permainan ini melibatkan dua pemain, yaitu pemain S dan pemain D. Pemain D memiliki sejumlah besar koin, di mana setiap koin memiliki probabilitas tertentu x untuk menghasilkan sisi "kepala" saat dilempar. Diasumsikan bahwa pemain D memiliki banyak koin dengan peluang x yang dapat bernilai apa pun dalam interval $(0,1)$. Dalam permainan, D memilih salah satu koin sesuai keinginannya, kemudian S melempar koin tersebut sebanyak n kali. Hasilnya menunjukkan jumlah kemunculan "kepala" sebanyak y kali. Berdasarkan hasil tersebut, pemain S diminta untuk memberikan sebuah estimasi terhadap nilai x , yang sebenarnya hanya diketahui oleh D. Fokus dalam penelitian ini mengenai bagaimana pemain D akan memilih koin yang akan digunakan dalam permainan, atau dengan kata lain fokus penelitian ini adalah membangkitkan data peluang berdasarkan distribusi tertentu yang mengambil nilai pada interval $(0,1)$.

Distribusi yang dipakai dalam penelitian ini terambil dari distribusi strategi terbaik dalam permainan "*Das Statistische Spiel*". Adapun penelitian ini berfokus pada pemain D, yaitu memilih koin yang memiliki peluang tertentu untuk menghasilkan "kepala" atau dengan kata lain memilih p yang mengambil nilai dalam interval $(0,1)$.

2.2 Variabel Penelitian

Peubah acak yang digunakan dalam penelitian ini adalah distribusi Best Strategy permainan *Das Statistische Spiel*. Peubah acak ini selanjutnya dinamakan X yang kontinu dan memiliki densitas:

$$f(x) = (x(1-x))^{\frac{\sqrt{n}}{2}-1} \cdot \frac{\Gamma(\sqrt{n})}{\left(\Gamma\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

dengan $0 < x < 1$.



2.3 Tahapan Analisis Data

Adapun tahapan analisis data dalam penelitian ini diantaranya:

1. Tentukan instrumental pdf $g(w)$ yang akan digunakan dalam algoritma accept-reject, dengan syarat bahwa $g(w)$ memiliki support yang sama dengan target pdf $f(x)$ serta $g(w)$ dapat dengan mudah dibangkitkan nilainya.
2. Bangkitkan data $U_1 \sim Unif(0,1)$
3. Gunakan U_1 untuk membangkitkan W menggunakan metode transformasi invers Monte-Carlo.
4. Bangkitkan data $U_2 \sim Unif(0,1)$
5. Pilih M sedemikian sehingga

$$f(x) \leq M \cdot g(x)$$

6. Gunakan data hasil bangkitan W dan U_2 secara bersama-sama untuk membangkitkan distribusi dengan densitas $f(x)$ menggunakan *Algoritma Accept-Reject Generation*:

Jika $U_2 \leq \frac{f(W)}{M \cdot g(W)}$ maka ambil $X = W$. Jika tidak, Kembali ke langkah pertama.

7. Data yang diperoleh memiliki distribusi dengan densitas $f(x)$.



2.4 Diagram Alir (Flowchart)

