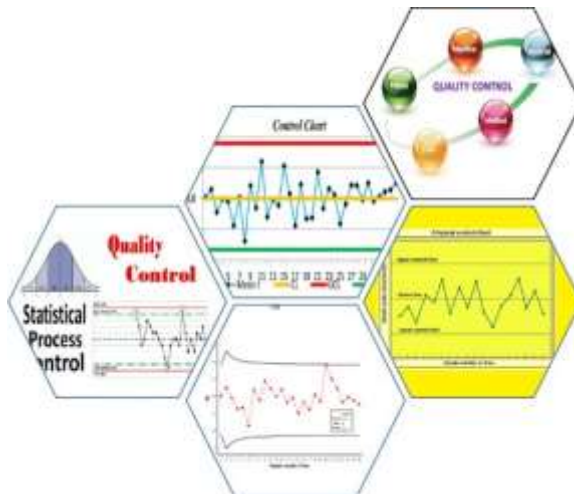


**PETA KENDALI HOMOGENEOUSLY WEIGHTED MOVING AVERAGE
BERDASARKAN DISTRIBUSI GENERALIZED CONWAY-MAXWELL
POISSON DATA OVERDISPERSI LONG-TAILED**

**HOMOGENEOUSLY WEIGHTED MOVING AVERAGE CONTROL CHART
BASED ON GENERALIZED CONWAY-MAXWELL POISSON DISTRIBUTION
FOR OVERDISPERSI LONG-TAILED DATA**



**FITRIANA
H062202001**



**PROGRAM STUDI MAGISTER STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2025**

**PETA KENDALI HOMOGENEOUSLY WEIGHTED MOVING AVERAGE
BERDASARKAN DISTRIBUSI GENERALIZED CONWAY-MAXWELL
POISSON DATA OVERDISPERSI LONG-TAILED**

**FITRIANA
H062202001**



**PROGRAM STUDI MAGISTER STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2025**

**PETA KENDALI HOMOGENEOUSLY WEIGHTED MOVING AVERAGE
BERDASARKAN DISTRIBUSI GENERALIZED CONWAY- MAXWELL
POISSON DATA OVERDISPERSI LONG-TAILED**

Tesis
sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar magister

Program Studi Magister Statistika

Disusun dan diajukan oleh

FITRIANA
H062202001

Kepada

**PROGRAM STUDI MAGISTER STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2025**

TESIS

PETA KENDALI *HOMOGENEOUSLY WEIGHTED MOVING AVERAGE*
BERDASARKAN DISTRIBUSI *GENERALIZED CONWAY-MAXWELL POISSON*
DATA OVERDISPERSI LONG-TAILED

FITRIANA
H062202001

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Ujian Magister pada 14 Januari 2025 dan
dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Magister Statistika
Departemen Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:

Pembimbing Utama



Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.
NIP. 19750429 200003 2 001

Pembimbing Pendamping



Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si.
NIP. 19620926 198702 2 001

Dekan Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin



Prof. Dr. Basri Hasanuddin, M.Si.
NIP. 19720518 199702 1 002

Ketua Program Studi
Magister Statistika



Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si.
NIP. 19750429 200003 2 001

PERNYATAAN KEASLIAN TESIS DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini menyatakan bahwa, tesis berjudul "Peta Kendali *Homogeneously Weighted Moving Average* Berdasarkan Distribusi *Generalized Conway-Maxwell Poisson* Data Overdispersi *Long-Tailed*" adalah benar karya saya dengan arahan tim pembimbing (Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. dan Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si.). Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi manapun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang telah diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka tesis ini. Sebagian dari tesis ini akan dipublikasikan di *Quality and Reliability Engineering International* dengan judul "*Homogeneously Weighted Moving Average Control Chart Based on Generalized Conway-Maxwell Poisson Distribution for Overdispersi Long-Tailed Data*"

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya berupa tesis ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar , 14 Januari 2025



Fitriana

NIM. H062202001

UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji bagi Allah *Subhanahu Wa ta'ala Rabb* semesta alam, shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi yang paling dimuliakan, pemimpin orang-orang bertakwa yakni Rasulullah Muhammad *Shallallahu Alaihi Wasallam* dan kepada para keluarga serta sahabat beliau yang senantiasa kita rindukan perjumpaan dengannya. Dengan berkat rahmat dan kemudahan dari Allah Subhanahu Wa Ta'ala, penulis dapat menyelesaikan tesis berjudul " Peta Kendali Homogeneously Weighted Moving Average Berdasarkan Distribusi Generalized Conway-Maxwell Poisson Data Overdispersi Long-Tailed" " sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar magister pada Program Studi Magister Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Dalam penyelesaian tesis ini, penulis telah melewati perjuangan panjang dan pengorbanan yang tidak sedikit. Namun berkat dan izinNya serta dukungan dan bantuan dari berbagai pihak sehingga akhirnya tesis ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan *terima kasih yang tiada tara dan penghargaan yang setinggi-tingginya* kepada Ayahanda dan Ibunda tercinta **H. Baharuddin** dan **Hj. Tanda** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan kasih sayang serta penuh ketulusan hati dan kesungguhannya dalam memberikan dukungan moril dan materil serta doanya yang tak ternilai harganya demi keberhasilan penulis selama menjalani proses pendidikan. Untuk kakak-kakakku tercinta (**Marwah, Syamsul Samad, Ishaq, Suarni, Ulfah, dab Bakri**), serta para keponakan (**Andra, Arya, Rasya, dan Alea**) terima kasih atas doa dan semangat yang telah kalian berikan.

Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang senantiasa membantu baik berupa materi, tenaga dan dukungan moral selama proses penyelesaian tulisan ini. Penghargaan yang tulus dan terima kasih juga penulis ucapkan kepada:

1. Bapak **Prof. Dr. Ir. Jamaluddin Jompa, M.Sc.** selaku Rektor Universitas Hasanuddin.selaku Rektor Universitas Hasanuddin.
2. Bapak **Prof. Dr. Eng. Amiruddin** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.
3. Ibu **Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.** selaku Ketua Departemen Statistika, segenap dosen pengajar dan staf Departemen Statistika yang telah membekali ilmu dan kemudahan-kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika.
4. Ibu **Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si** selaku Pembimbing Utama yang telah dengan sabar dan ikhlas meluangkan begitu banyak waktunya untuk membimbing dan memberikan masukan serta motivasi dalam penulisan tesis ini.

5. Ibu **Prof. Dr. Dr, Georgina Maria Tinungki, M.Si.** selaku dosen Pembimbing Pertama yang juga telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk memberikan arahan dan motivasi dalam penulisan tesis ini.
6. Ibu **Prof. Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si, Dr. Nirwan, M.Si** dan Ibu **Dr. Anna Islamiyati, S.Si., M.Si.** dan selaku Anggota Tim Penguji, yang telah meluangkan waktunnya memberikan saran dan kritikan yang membangun dalam penyempurnaan penyusunan tesis ini serta waktu yang telah diberikan kepada Penulis.
7. Teman-teman Mahasiswa Program Magister Statistika, terima kasih atas bantuan dan dukungan yang luar biasa kepada penulis.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang banyak memberi dukungan kepada penulis.

Semoga perbuatan baik dari semua pihak yang dengan tulus memberikan kontribusi terhadap penyusunan tesis ini mendapatkan pahala dari Allah *subhaanahu wata'aalaa*. Akhir kata semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan dan terutama untuk penulis.

Makassar, 14 Januari 2025

Penulis

ABSTRAK

Fitriana . **Peta Kendali *Homogeneously Weighted Moving Average* Berdasarkan Distribusi *Generalized Conway-Maxwell Poisson* Data Overdispersi *Long-Tailed*** (dibimbing oleh Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. dan Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si.)

Statistik pengendalian kualitas (*statistical quality control*) adalah pendekatan berbasis statistik untuk memantau, mengendalikan, dan memperbaiki kualitas proses dan produk. Peta kendali *Homogeneously Weighted Moving Average* menawarkan keunggulan dalam mendeteksi pergerakan kecil dalam proses dengan distribusi variabel yang lebih fleksibel. Pada data atribut, distribusi Poisson sering digunakan untuk memodelkan data hitung. Namun, distribusi ini tidak dapat menangani kasus overdispersi atau underdispersi. Sebagai solusinya, distribusi *Conway-Maxwell Poisson* (CMP) yang lebih fleksible telah digunakan, meskipun kurang efektif untuk menangani data dengan perilaku berekor panjang (*long-tailed*). Distribusi *Generalized Conway-Maxwell Poisson* (GCMP) diperkenalkan sebagai perluasan dari CMP untuk mengatasi keterbatasan tersebut. Penelitian ini bertujuan mengembangkan peta kendali HWMA berbasis distribusi GCMP untuk memonitor data atribut dengan sifat overdispersi dan berekor panjang. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai ARL_1 pada peta kendali HWMA-GCMP lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARL_1 pada peta kendali HWMA-CMP. Dari hasil penelitian, penggunaan peta kendali HWMA-GCMP yang diusulkan lebih unggul dibandingkan peta kendali HWMA-CMP dalam menangani data yang memiliki overdispersi *long-tailed*.

Kata kunci: *Homogeneously Weighted Moving Average, Generalized Conway-Maxwell Poisson, Average Run Length, Overdispersi, Long-tailed characteristics*

ABSTRACT

Fitriana . **Homogeneously Weighted Moving Average Control Chart Based on Generalized Conway-Maxwell Poisson Distribution for Overdispersi Long-Tailed Data** (supervised by Dr. Erna Tri Herdiani, S.Si., M.Si. dan Prof. Dr. Dr. Georgina Maria Tinungki, M.Si.)

Statistical quality control is a statistical approach used to monitor, control, and improve the quality of processes and products. The Homogeneously Weighted Moving Average control chart offers advantages in detecting small *shifts* in processes with more flexible variable distributions. For attribute data, the Poisson distribution is often used to model count data. However, this distribution cannot handle cases of overdispersion or underdispersion. As a solution, the more flexible Conway-Maxwell Poisson (CMP) distribution has been used, although it is less effective in handling data with long-tailed behavior. The Generalized Conway-Maxwell Poisson (GCMP) distribution was introduced as an extension of the CMP to address these limitations. This study aims to develop an HWMA control chart based on the GCMP distribution to monitor attribute data with overdispersion and long-tailed characteristics. The results show that the ARL_1 value for the HWMA-GCMP control chart is smaller compared to the ARL_1 value for the HWMA-CMP control chart. From the research results, the use of the proposed HWMA-GCMP control chart is superior to the HWMA-CMP control chart in handling data that has long-tailed overdispersion.

Keyword: Homogeneously Weighted Moving Average, Generalized Conway-Maxwell Poisson, Average Run Length, Overdispersion, Long-tailed characteristics

DAFTAR ISI

SAMPUL	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
PERNYATAAN PENGAJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TESIS	v
UCAPAN TERIMA KASIH	vi
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Distribusi Poisson	3
1.7 Distribusi Conway Maxwell Poisson	5
1.8 Distribusi Generalized Conway Maxwell Poisson.....	6
1.9 Peta Kendali Homogeneosly Weighted Moving Average	6
1.10 Average Run Length.....	7
1.11 Long-Tailed Data	8
1.12 Penelitian Terdahulu	9
1.13 Kerangka Konseptual	10
BAB II METODE PENELITIAN	11
2.1 Rancangan Penelitian.....	11
2.2 Objek Penelitian.....	11

2.3 Objek Penelitian.....	11
2.4 Metode Analisis.....	11
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	12
3.1 Distribusi Conway Maxwell Poisson	12
3.1.1 Fungsi Massa Peluang.....	12
3.1.2 Mean dan Variansi	13
3.2 Distribusi Generalized Conway Maxwell Poisson.....	16
3.2.1 Fungsi Massa Peluang.....	16
3.2.2 Mean dan Variansi	19
3.3 Peta Kendali Homogeneously Weighted Moving Average	20
3.3.1 Peta Kendali Homogeneously Weighted Moving Average GCMP.....	21
3.3.2 Peta Kendali Homogeneously Weighted Moving Average CMP	24
3.4 Studi Kasus.....	24
3.4.1 Nilai Batas Kendali HWMA-GCMP.....	27
3.4.2 Nilai Batas Kendali HWMA-CMP.....	29
3.4.3 Perbandingan peta kendali HWMA-GCMP dan HWMA-CMP	30
BAB IV PENUTUP	43
4.1 Kesimpulan	43
4.2 Saran	43
DAFTAR PUSTAKA	44

DAFTAR TABEL

Tabel 3. 1 Deskriptif Statistik Data Berdistribusi GCMP	25
Tabel 3. 2 Nilai LH pada batas kendali peta kendali HWMA-GCMP.....	28
Tabel 3. 3 Batas kendali Peta kendali HWMA-GCMP	28
Tabel 3. 4 Nilai parameter Distribusi CMP	29
Tabel 3. 5 Nilai LH Batas kendali Peta kendali HWMA-CMP.....	29
Tabel 3. 6 Batas kendali Peta kendali HWMA-CMP	30
Tabel 3. 7 Nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP (n=3)	30
Tabel 3. 8 Nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP (n=15)	33
Tabel 3. 9 Nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP (n=50)	35
Tabel 3. 10 Nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP (n=100)	37
Tabel 3. 11 Nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP (n=500)	39
Tabel 3. 12 Nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP (n=1000)	41

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Visualisasi dari data simulasi distribusi GCMP	27
Gambar 3.2 Perbandingan nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP ($n=3$)	32
Gambar 3.3 Perbandingan nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP ($n=50$)	34
Gambar 3.4 Perbandingan nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP ($n=50$)	36
Gambar 3.5 Perbandingan nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP ($n=100$)	38
Gambar 3.6 Perbandingan nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP ($n=500$)	40
Gambar 3.7 Perbandingan nilai ARL_1 HWMA-GCMP dan HWMA-CMP ($n=1000$) ..	42

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistical quality control atau statistik pengendalian kualitas merupakan teknik penyelesaian masalah yang digunakan untuk memonitor, mengendalikan, menganalisis, mengolah dan memperbaiki produk dan proses menggunakan metode-metode statistik. Salah satu metode untuk melakukan pengendalian statistik yaitu peta kendali. Peta kendali awalnya dirancang untuk mengevaluasi perbaikan atau perubahan proses dalam industri manufaktur dan diterapkan secara bertahap di sektor kesehatan.

Peta kendali pertama kali diperkenalkan oleh Dr. Walter A. Shewhart dari *Bell Telephon Laboratories*, Amerika Serikat tahun 1924 (Montgomery, 2009). Peta kendali ini dikenal dengan nama peta kendali Shewhart. Peta kendali shewhart adalah peta kendali *memoryless-type* yang menggunakan informasi proses terbaru dan mengabaikan pengamatan sebelumnya dan sangat tidak efisien dalam mendeteksi pergeseran kecil dalam vektor rata-rata proses. Untuk meningkatkan sensitivitas peta kendali dalam mendeteksi pergerakan kecil dibutuhkan peta kendali *memory-type* yang menggunakan informasi proses terbaru dan sebelumnya. Peta kendali *memory-type* dikenal cepat mendeteksi pergerakan kecil dan sedang dalam parameter proses. *Exponential Weighted Moving Average* (EWMA) yang diusulkan oleh Roberts (1959) dan *Cumulative Sum* (CUSUM) yang diusulkan oleh Page (1954) adalah contoh utama dari peta kendali *memory-type*.

Contoh lain peta kendali *memory-type* adalah peta kendali *Homogeneously Weighted Moving Average* (HWMA) yang diusulkan oleh Abbas (2018). HWMA diusulkan untuk mengatasi masalah variasi bobot yang terkait dengan diagram EWMA. Peta kendali HWMA memberikan bobot khusus untuk pengamatan saat ini dan bobot tersisa didistribusikan secara merata diantara pengamatan sebelumnya. Sedangkan peta kendali EWMA memberikan bobot paling besar pengamatan saat ini dan pengamatan sebelumnya mendapatkan bobot kecil yang berkurang secara eksponensial. Salah satu cara untuk mengevaluasi kinerja peta kendali adalah dengan menggunakan *Average Run Length*. *Average Run Length* (ARL) adalah rata-rata jumlah titik sampel yang harus diplot pada peta kendali sebelum suatu titik menunjukkan keadaan *out of control* atau tidak terkendali. ARL digunakan sebagai ukuran kinerja peta kendali dalam mendeteksi perubahan atau pergeseran dalam proses yang diawasi. Semakin kecil nilai ARL, semakin cepat peta kendali dapat mendeteksi adanya perubahan dalam proses tersebut. (Montgomery, 2009). Peta kendali HWMA ini menunjukkan kinerja yang unggul dibandingkan peta kendali pesaingnya berdasarkan perbandingan nilai ARL, khususnya untuk mendeteksi pergerakan kecil dalam vektor rata-rata proses.

Pengkajian peta kendali HWMA juga telah dibahas oleh beberapa peneliti seperti Adegoke et al. (2019) yang mengusulkan peta kendali HWMA menggunakan variabel proses dan variabel tambahan untuk membentuk penduga regresi yang menghasilkan perkiraan rata-rata variabel proses yang efisien dan tidak bias. Hasil

simulasi menunjukkan bahwa peta kendali HWMA mendeteksi perubahan rata-rata proses lebih cepat dibandingkan dengan metode lainnya. Selain itu, perbandingan ARL menunjukkan bahwa peta kendali HWMA lebih efisien dibandingkan peta kendali pesaingnya terutama dalam mendeteksi pergeseran kecil dalam rata-rata proses. Raza et al. (2020) mengusulkan peta kendali HWMA pada distribusi nonparametrik. Peta kendali ini didasarkan pada uji tanda dan uji peringkat bertanda Wilcoxon untuk memantau proses di bawah distribusi miring dan simetris. Hasil simulasi menunjukkan bahwa peta kendali HWMA lebih unggul dibandingkan dengan peta kendali lainnya. Berdasarkan pemaparan tersebut, penelitian ini akan difokuskan membahas mengenai peta kendali HWMA.

Peta kendali dapat diklasifikasikan menjadi dua tipe, yaitu peta kendali variabel dan peta kendali atribut. Peta kendali variabel dirancang untuk mengontrol karakteristik produk dan parameter proses yang diukur dalam skala kontinu sedangkan peta kendali atribut dirancang untuk mengontrol proses yang diukur dalam skala diskrit (Montgomery, 2009). Secara umum, peta kendali atribut dikembangkan berdasarkan dua macam distribusi, yaitu distribusi Binomial dan distribusi Poisson. Distribusi Poisson adalah salah satu distribusi yang biasa digunakan untuk menggambarkan peta kendali yang melibatkan proses perhitungan. Pada distribusi Poisson berlaku sifat equidisersi (mean dan varians bernilai sama). Sehingga distribusi Poisson tidak tepat digunakan untuk menganalisis data diskrit dengan kejadian overdispersi (nilai varians lebih besar dari mean) atau kejadian underdispersi (nilai varians lebih kecil dari mean). Salah satu distribusi yang dapat mengatasi masalah tersebut adalah distribusi *Conway-Maxwell Poisson* (CMP). Distribusi CMP merupakan generalisasi dari distribusi Poisson yang dikembangkan oleh Conway dan Maxwell pada tahun 1962 (Shmueli et al., 2005). Seller (2012) menggunakan distribusi CMP dalam peta kendali Shewhart univariat dan menunjukkan bahwa peta kendali berdasarkan distribusi CMP fleksibel untuk kumpulan data yang underdispersi atau overdispersi.

Penelitian terkait yang mencakup peta kendali berdasarkan distribusi CMP pernah dibahas oleh Saghir dan Lin (2014) yang mengusulkan peta kendali EWMA dan CUSUM berdasarkan distribusi CMP. Saghir dan Lin (2014) mengusulkan peta kendali distribusi CMP pada data multivariat atribut. Aslam et al. (2016) mengusulkan peta kendali EWMA berdasarkan distribusi CMP menggunakan pengambilan sampel berulang. Aslam et al. (2017) mengusulkan peta kendali EWMA yang dimodifikasi untuk memantau proses berdistribusi CMP. Chen (2020) menyelidiki kinerja peta kendali GWMA dasar dan ganda untuk memantau proses berdistribusi CMP. Selain itu Adeoti et al. (2021) juga telah mengusulkan peta kendali HWMA berdasarkan distribusi CMP.

Perkembangan dan penggunaan teknologi terkini di berbagai bidang seperti teknik, kedokteran dan manufaktur telah menghasilkan proses dengan data acak berkarakteristik unik. Salah satu fenomena penting yang muncul adalah data yang memiliki distribusi dengan ekor lebih panjang. Distribusi ini sering terjadi karena hasil acak tidak lagi mengikuti pola eksponensial klasik atau asumsi distribusi tradisional seperti distribusi Poisson dan Normal. Perilaku *Long-Tailed* pada distribusi data merujuk pada karakteristik dimana bagian ekor distribusi menurun secara perlahan,

sehingga nilai ekstrem (nilai yang jauh dari rata-rata) memiliki probabilitas yang lebih besar dibandingkan distribusi dengan ekor pendek (*Sort-Tailed*).

Salah satu kekurangan signifikan yang terkait dengan model CMP adalah ketidakefektifannya dalam mempertimbangkan model *Long-Tailed*. Imoto (2014) mengusulkan distribusi GCMP dengan tiga parameter yang mencakup distribusi Binomial Negatif sebagai kasus khusus dan bisa menjadi model *Long-Tailed* dari distribusi CMP. Penerapan distribusi GCMP pada peta kendali telah dilakukan oleh Mustafa et al. (2024) untuk memonitor data hitung.

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut peta kendali atribut HWMA berdasarkan distribusi GCMP untuk mengatasi data overdispersi berekor panjang. Hal ini tersebut kemudian dinyatakan dalam tugas akhir ini dengan judul **“Peta Kendali *Homogeneously Weighted Moving Average* Berdasarkan Distribusi *Generalized Conway-Maxwell Poisson* Pada Data Overdispersi *Long-Tailed*”**.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana bentuk peta kendali HWMA-GCMP?
2. Bagaimana tingkat keakuratan Average Run Length (ARL) dari peta kendali HWMA-GCMP dan membandingkannya dengan HWMA CMP?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini akan dilakukan konstruksi batas kendali yaitu UCL dan LCL pada peta kendali HWMA. Simulasi data dilakukan dengan membangkitkan data yang berdistribusi Poisson yang mengalami overdispersi *long-tailed* dengan $\lambda = 1, v = 0.5, r = 1.5$. Untuk membatasi jumlah data dari simulasi akan dipilih $n = \{3, 15, 50, 100, 500, 1000\}$ dengan bobot $\omega = \{0.05, 0.1, 0.25\}$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Menentukan peta kendali HWMA-GCMP
2. Menganalisis keakuratan Average Run Length peta kendali HWMA-GCMP.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu memberikan pemahaman dan pengetahuan kepada pembaca khususnya penulis mengenai peta kendali HWMA pada data yang overdispersi *long-tailed* menggunakan distribusi *Generalized Conway Maxwell Poisson* (GCMP).

1.6 Distribusi Poisson

Cameron dan Trivendi (1998) menyatakan bahwa distribusi Poisson sering digunakan untuk memodelkan jumlah kemunculan dari suatu kejadian. Jika variabel random diskrit Y berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ maka variabel random Y mempunyai fungsi densitas probabilitas sebagai berikut.

$$P(Y = y; \lambda) = P(y; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

Atau

$$(1.1)$$

$$P(Y = y; \lambda) = \exp\left(\frac{[y \ln(\lambda) - \lambda]}{1} - \ln y!\right)$$

Menurut Mc Cullagh dan Nelder (1983), suatu fungsi probabilitas yang tergantung pada suatu parameter θ dari suatu variabel random Y dikatakan termasuk dalam keluarga distribusi eksponensial apabila dapat dituliskan sebagai berikut

$$P(y; \theta) = f(y; \theta, \phi) = \exp\left[\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y; \phi)\right] \quad (1.2)$$

dengan θ adalah parameter kanonik dan ϕ adalah parameter dispersi. Jadi distribusi Poisson termasuk keluarga distribusi keluarga eksponensial.

Pada distribusi Poisson dapat ditentukan nilai mean dan variansnya yaitu:

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = \lambda \quad (1.3)$$

dan

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} y^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} - \lambda^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned} \quad (1.4)$$

Uji statistik yang digunakan untuk mengetahui suatu data berdistribusi Poisson atau tidak adalah uji *Kolmogrov-Smirnov* dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Data berdistribusi Poisson

H_1 : Data tidak berdistribusi Poisson

Statistik uji :

$$D_{hitung} = maks|F_n(Y) - F_0(Y)| \quad (1.5)$$

dengan

$F_0(Y)$ = fungsi distribusi kumulatif yang dihipotesiskan

$F_n(Y)$ = fungsi distribusi kumulatif yang diamati

Kriteria pengujiannya yaitu tolak H_0 apabila nilai $D_{hitung} > D_{tabel}$ atau $p - value < \alpha = 0.05$ (Daniel, 1989).

Distribusi Poisson mensyaratkan equidispersi, yaitu kondisi dimana nilai mean dan variansi dari variabel respon bernilai sama. Namun, adakalanya terjadi fenomena overdispersi dalam data yang dimodelkan dengan distribusi Poisson. Overdispersi berarti variansi lebih besar daripada mean. Fenomena dapat dituliskan:

$$Var(Y) > E(Y) \quad (1.6)$$

Pengujian hipotesis tentang kasus overdispersi dilakukan sebagai berikut.

H_0 : $\phi = 0$ (tidak terjadi overdispersi)

H_1 : $\phi > 0$ (terjadi overdispersi)

Terdapat dua cara yang dapat digunakan untuk mendeteksi overdispersi, yaitu (Kusuma, 2013):

1. *Deviance*

$$\phi_1 = \frac{D^2}{db} ; D^2 = 2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \ln \left(\frac{y_i}{\mu} \right) \right\} \quad (1.7)$$

dimana $db = n - p$ dengan p merupakan banyak parameter termasuk konstanta, n merupakan banyaknya pengamatan dan D^2 adalah nilai *deviance*.

2. *Pearson Chi-Square*

Untuk menguji asumsi equidisersi pada distribusi Poisson dilakukan dengan melihat nilai statistik *Pearson Chi-Square* yang dibagi dengan derajat bebasnya.

$$\phi_2 = \frac{\chi^2}{db} ; \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu)^2}{var(y_i)} \quad (1.8)$$

dimana $db = n - p$ dengan p merupakan banyak parameter termasuk konstanta, n merupakan banyaknya pengamatan dan χ^2 adalah nilai *Pearson Chi-Square*.

Jika nilai ϕ_1 dan ϕ_2 bernilai lebih dari satu maka dapat disimpulkan data mengalami overdispersi.

1.7 Distribusi Conway Maxwell Poisson

Distribusi *Conway-Maxwell Poisson* merupakan pengembangan dari distribusi Poisson yang pertama kali dikenalkan oleh Conway dan Maxwell pada tahun 1962. Distribusi CMP memiliki dua parameter, yaitu parameter lokasi (λ) yang sama dengan parameter distribusi Poisson dan parameter dispersi (ν). Parameter dari distribusi CMP belum diketahui, sehingga perlu diestimasi. Menurut Sellers dan Shmueli (2010) distribusi CMP dapat mengatasi data yang mengalami overdispersi atau underdispersi. Bentuk fungsi densitas probabilitas distribusi CMP sebagai berikut.

$$P(Y = y; \lambda, \nu) = \frac{\lambda^y}{y!} \frac{1}{Z(\lambda, \nu)}, y = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

dengan $Z(\lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}$

Shmuelli et al. (2005) memberikan aproksimasi fungsi $Z(\lambda, \nu)$ dengan persamaan

$$Z(\lambda, \nu) \approx \frac{e^{\nu \lambda^{\frac{1}{\nu}}}}{\lambda^{\frac{\nu-1}{2\nu}} (2\pi)^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\nu}} \quad (1.10)$$

Hasil aproksimasi pada mulanya diturunkan untuk ν yang berupa bilangan bulat, namun studi numerik menyatakan hasil pendekatan juga terpenuhi untuk semua riil $\nu > 0$. Secara khusus persamaan (1.10) akurat untuk $\nu \leq 1$ atau $\lambda > 10^\nu$.

Jika persamaan (1.10) disubstitusikan ke persamaan (1.9) akan diperoleh fungsi densitas probabilitas sebagai berikut.

$$P(Y = y; \lambda, \nu) = f(y; \lambda, \nu) = \frac{\lambda^{y + \frac{\nu-1}{2\nu}} (2\pi)^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\nu}}{(y!)^\nu e^{\nu \lambda^{\frac{1}{\nu}}}} \quad (1.11)$$

Sellers dan Shmueli (2010) menyatakan bahwa untuk memperoleh nilai ekspektasi dan varians distribusi CMP dapat dinyatakan pada persamaan berikut

$$E(Y) = \frac{\partial \ln Z(\lambda, v)}{\partial \ln \lambda} = \lambda^{\frac{1}{v}} - \frac{v-1}{2} \quad (1.12)$$

dan

$$Var(Y) = \frac{\partial \ln E(Y)}{\partial \ln \lambda} = \frac{\lambda^{\frac{1}{v}}}{v} \quad (1.13)$$

1.8 Distribusi Generalized Conway Maxwell Poisson

Generalized Conway-Maxwell Poisson atau dapat disingkat GCMP diperkenalkan pertama kali oleh Imoto (2014). GCMP merupakan perluasan tiga parameter dari distribusi CMP konvensional dan dapat memodelkan perilaku ST dan LT dalam data hitungan. Selain itu, distribusi GCMP dapat memodelkan data ZI tanpa menggunakan properti ZI. Bentuk fungsi densitas probabilitas distribusi GCMP sebagai berikut (Mustafa et al., 2024).

$$P(Y = y; \lambda, v, r) = \frac{\Gamma(r+y)^v \lambda^y}{y! C(\lambda, v, r)}, y = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

$$\text{dengan } C(\lambda, v, r) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+z)^v}{z!} \lambda^z$$

dimana r adalah parameter kontrol yang mengontrol lebar ekor pada distribusi, λ adalah parameter lokasi, dan v adalah parameter dispersi. Distribusi ini mendefinisikan $v < 1$, $r > 0$ dan $\lambda > 0$ atau $v = 1$, $r > 0$ dan $0 < \lambda < 1$. Rentang $0 < v < 1$ menggambarkan overdispersi, sedangkan $v < 0$ menggambarkan underdispersi. Secara komparatif untuk $r > 1$ dan $0 < v < 1$, GCMP menunjukkan perilaku LT, sedangkan untuk $r > 1$ dan $v < 0$ menunjukkan perilaku ST. Imoto (2024) menyatakan bahwa distribusi GCMP akan mereduksi menjadi distribusi CMP jika dengan parameter $1 - v$ dan λ saat $r \rightarrow 1$.

Imoto (2014) memberikan aproksimasi fungsi $C(\lambda, v, r)$ dengan persamaan

$$C(\lambda, v, r) = \frac{\lambda^{\frac{(2r-1)v}{2(1-v)}} (2\pi)^{\frac{v}{2}} \exp\left\{(1-v)\lambda^{\frac{1}{1-v}}\right\}}{\sqrt{1-v}} \quad (1.15)$$

Nilai ekspektasi dan varians distribusi GCMP dapat dinyatakan pada persamaan berikut.

$$E(Y) = \lambda \frac{\partial \ln C(\lambda, v, r)}{\partial \lambda} = \lambda^{\frac{1}{1-v}} - \frac{(2r-1)v}{2(1-v)}$$

dan

$$Var(Y) = \lambda \frac{\partial E(Y)}{\partial \lambda} = \frac{\lambda^{\frac{1}{1-v}}}{(1-v)}$$

1.9 Peta Kendali Homogeneously Weighted Moving Average

Peta kendali Homogeneously Weighted Moving Average atau dapat disingkat HWMA diperkenalkan pertama kali oleh Abbas (2018). HWMA diusulkan untuk mengatasi masalah variasi bobot yang terkait dengan diagram EWMA. Peta kendali HWMA

memberikan bobot khusus untuk pengamatan saat ini dan bobot tersisa didistribusikan secara merata diantara pengamatan sebelumnya.

Rumus untuk titik plot Peta kendali HWMA dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$H_i = \omega Y_i + (1 - \omega) \bar{Y}_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.16)$$

dimana

H_i = nilai HWMA ke- i

ω = parameter bobot yang bernilai antara 0 dan 1.

Y_i = nilai pengamatan ke- i , $i = 1, 2, \dots$

i = banyaknya pengamatan

$\bar{Y}_{i-1}$ = nilai rata-rata dari proses sebelumnya

Batas kendali atas atau Upper Control Limit (UCL) dan batas kendali bawah atau Lower Control Limit (LCL) untuk peta kendali HWMA adalah

$$\begin{aligned} UCL &= E(H_i) + L\sqrt{\text{Var}(H_i)} \\ CL &= E(H_i) \\ LCL &= E(H_i) - L\sqrt{\text{Var}(H_i)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.10 Average Run Length

Average Run Length (ARL) adalah jumlah rata-rata titik sampel yang harus diplot pada bagan kendali sebelum suatu titik menunjukkan keadaan tak terkendali. Semakin kecil ARL, maka semakin kecil pula ekspektasi jumlah sampel yang diperlukan sampai terdapat sinyal *out of control*. Hal ini berarti semakin kecil ARL, semakin cepat grafik kendali mendeteksi adanya pergeseran (Montgomery, 2009). ARL merupakan ukuran yang sering digunakan dalam pengendalian kualitas statistik untuk mengevaluasi dan membandingkan kinerja berbagai peta kendali (Han & Tsung, 2009).

ARL merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengukur kinerja sebuah peta kendali. Kriteria yang digunakan untuk mengukur kinerja peta kendali ialah dengan mengukur seberapa cepat peta kendali tersebut mampu menangkap sinyal *out of control*. Peta kendali yang dapat mendeteksi sinyal *out of control* lebih cepat maka peta kendali tersebut disebut lebih sensitif terhadap perubahan proses.

Pada dasarnya ARL adalah banyaknya titik sampel rata-rata yang harus digambarkan sebelum suatu titik menunjukkan keadaan tak terkendali. Nilai ARL terbagi menjadi 2 yaitu ARL_0 (ARL *in control*) dan ARL_1 (ARL *out of control*) dengan rumus sebagai berikut:

$$\begin{aligned} ARL_0 &= \frac{1}{P(\text{Tolak } H_0 | H_0 \text{ benar})} = \frac{1}{\alpha} \\ ARL_1 &= \frac{1}{P(\text{Terima } H_0 | H_0 \text{ benar})} = \frac{1}{1 - \beta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

dengan H_0 merupakan proses dalam kondisi *in control*. Sehingga α disebut tipe kesalahan I pada uji hipotesis, yang berarti probabilitas memutuskan bahwa proses dalam kondisi *out of control* namun kenyataannya proses dalam kondisi *in control*. Sedangkan β adalah tipe kesalahan II pada uji hipotesis, yang berarti probabilitas memutuskan bahwa proses dalam kondisi *in control* namun pada kenyataannya

proses dalam kondisi *out of control*, sehingga $1 - \beta$ adalah probabilitas yang memutuskan bahwa proses dalam kondisi *out of control* sebagai proses yang *out of control*.

ARL_0 dapat diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang harus diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out of control*, pada saat proses berada pada kondisi *in control*. Sedangkan ARL_1 dapat diartikan sebagai rata-rata titik pengamatan yang diplot sampai ditemukannya pengamatan yang *out of control* pada proses dalam kondisi *out of control*.

ARL dapat ditentukan menggunakan beberapa pendekatan yaitu simulasi *Monte Carlo* (MC), pendekatan menggunakan rantai Markov (MCA), metode persamaan integral numerik (NIE), serta pendekatan dengan rumus eksplisit (Peerajit et al., 2017). Simulasi Monte Carlo telah banyak digunakan untuk mempelajari kinerja bagan kontrol, khususnya dalam memperkirakan nilai ARL (Schaffer & Kim, 2007). Nilai ARL yang diperoleh dari melalui simulasi Monte Carlo merupakan estimasi yang dihitung dengan cara mengambil rata-rata panjang run (RL) dari sejumlah simulasi. *Run length* (RL) yaitu jumlah pengamatan dalam satu siklus simulasi yang diperlukan untuk mendeteksi sinyal *out of control*. Simulasi *Monte Carlo* menawarkan fleksibilitas dan keandalan dalam menilai kinerja bagan kendali dalam berbagai kondisi proses.

1.11 Long-Tailed Data

Alzaid dan Al-Osh (1988) menyatakan bahwa distribusi peluang dapat diklasifikasikan berdasarkan nilai eksponen ekornya. Nilai eksponen ekor diperoleh dari perilaku ekor distribusi peluang saat mendekati nilai ekstrem. Secara umum, eksponen ekor mengukur seberapa cepat atau lambat probabilitas di ekor distribusi menurun.

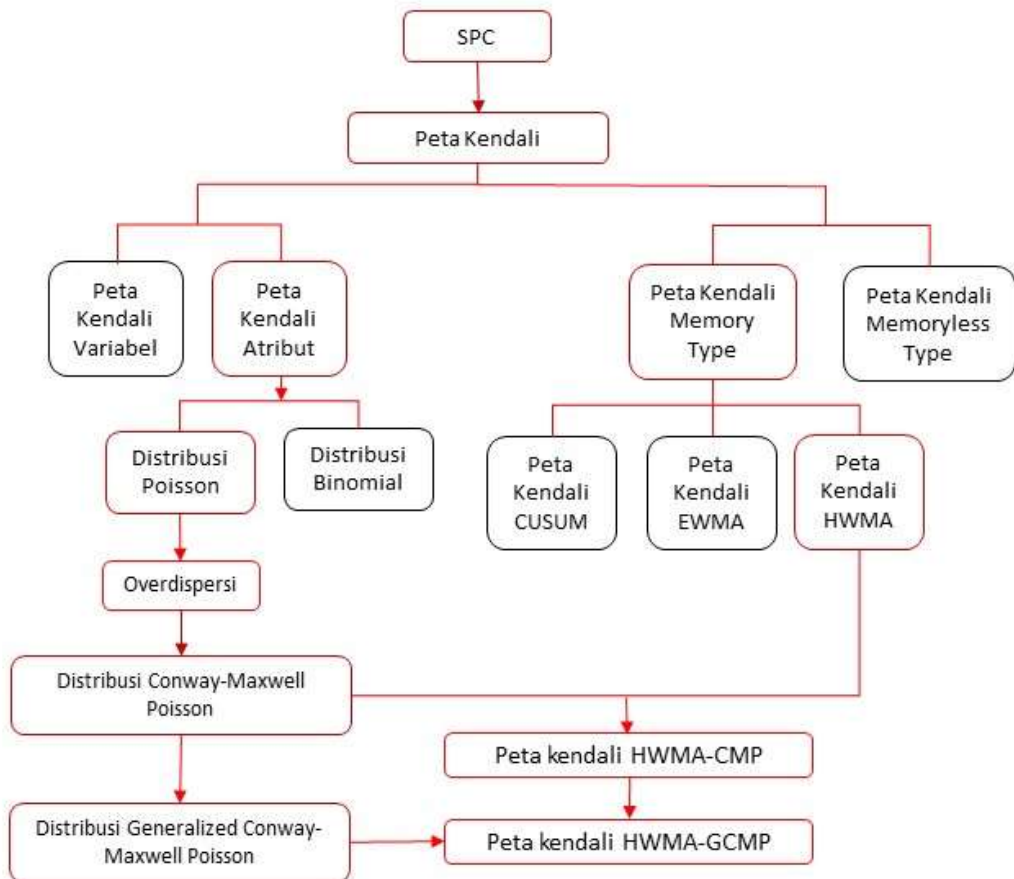
Adapun klasifikasinya berdasarkan perilaku ekornya yaitu *short-tailed*, *medium tailed*, dan *long-tailed*. *Short-tailed* adalah distribusi dengan eksponen ekor lebih kecil dari satu sehingga memiliki penurunan ekor yang sangat cepat. Untuk menemukan nilai ekstrem dalam distribusi ini sangat rendah karena ekornya terbatas atau menurun sangat cepat menuju nol. *Medium-tailed* adalah distribusi dengan eksponen ekornya sama dengan 1 yang memiliki penurunan ekor secara eksponensial. *Long-tailed* adalah distribusi dengan eksponen ekor lebih besar dari 1 yang memiliki penurunan ekor yang lambat. Nilai ekstrem lebih mungkin terjadi karena ekor distribusi menurun secara perlahan. Long-tailed pada distribusi data menggambarkan distribusi dengan ekor panjang yang mencerminkan adanya frekuensi kejadian yang relatif tinggi di bagian jauh dari pusat distribusi. *Long-tailed* data menunjukkan bahwa terdapat banyak nilai ekstrem dibandingkan dengan distribusi yang berekor pendek dan sedang.

1.12 Penelitian Terdahulu

Nama Peneliti	Tahun	Judul
Nasir Abbas	2018	Homogeneusly weighted moving average control chart with an application in substrate manufacturing process
Tomoaki Imoto	2014	A generalized Conway-Maxwell-Poisson distribution which includes the negative binomial distribution.
Olatunde Adebayo Adeoti, Majika Jean Claude Malela, Sandile Charles Shongwe, dan Muhammad Aslam.	2021	A homogeneously weighted moving average control chart for Conway–Maxwell Poisson distribution.
Fakhar Mustafa	2024	On Designing a New Control Chart Using the Generalized Conway–Maxwell Poisson Distribution to Monitor Count Data

1.13 Kerangka Konseptual

Kerangka konseptual penelitian adalah hubungan antara konsep satu dengan konsep lainnya dari masalah yang ingin diteliti. Kerangka konsep diperoleh dari konsep ilmu/teori yang dipakai sebagai landasan penelitian. Adapun gambaran kerangka konseptual dalam penelitian ini disajikan pada gambar berikut.



BAB II METODE PENELITIAN

2.1 Rancangan Penelitian

Penelitian ini merupakan kajian teoritis yang dilakukan pada peta kendali HWMA untuk data simulasi yang dibangkitkan dengan asumsi berdistribusi Poisson yang memiliki sifat overdispersi berekor panjang.

2.2 Objek Penelitian

Objek penelitian ini adalah konstruksi batas kendali pada peta kendali HWMA yaitu menentukan nilai UCL dan LCL. Untuk studi kasus digunakan data simulasi yang dibangkitkan dengan asumsi berdistribusi Poisson yang memiliki sifat overdispersi yang memiliki ekor panjang.

2.3 Objek Penelitian

Lokasi penelitian yaitu di Universitas Hasanuddin, Makassar, Sulawesi Selatan. Penelitian ini dilakukan dari bulan Februari 2024 sampai Januari 2025.

2.4 Metode Analisis

Penelitian ini merupakan jenis penelitian kajian literatur. Metode analisis dilakukan dengan berbagai literatur yang berkaitan dengan penelitian ini. Sedangkan untuk membangkitkan data dan pengolahan data simulasi menggunakan bantuan berupa software yaitu Software R.

Adapun prosedur pengolahan data adalah sebagai berikut.

1. Menentukan rumus mean dan varians dari distribusi CMP
2. Menentukan rumus mean dan varians dari distribusi GCMP
3. Mengkaji penentuan rata-rata dan varians dari proses peta kendali HWMA
4. Menentukan rumus UCL, CL, dan LCL pada peta kendali HWMA-CMP.
5. Menentukan rumus UCL, CL, dan LCL pada peta kendali HWMA-GCMP.
6. Menghitung nilai ARL pada peta kendali HWMA-CMP dan HWMA-GCMP menggunakan simulasi Monte Carlo.
7. Membandingkan nilai ARL peta kendali HWMA-CMP dengan peta kendali HWMA-GCMP.
8. Menarik kesimpulan