

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Transformasi Fourier adalah teknik analisis sinyal yang sangat mendasar, yang mengubah sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi. Dalam bidang matematika terapan, transformasi Fourier telah berkembang menjadi teknik matematika yang penting, terutama sebagai metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Teknik analisis Fourier memungkinkan identifikasi komponen frekuensi dari sinyal, namun memiliki keterbatasan dalam resolusi waktu. Artinya, informasi tentang kapan komponen frekuensi terjadi dalam sinyal tidak dapat diketahui dengan tepat. Teknik analisis Fourier dapat bekerja dengan baik pada sistem dengan sinyal stasioner. Namun, pada sistem non-stasioner teknik analisis Fourier memiliki performa yang kurang baik. Keterbatasan ini mendorong pengembangan teknik-teknik analisis yang lebih lanjut untuk menangani sinyal yang lebih kompleks dan non-stasioner [Bahri, 2022]. Keterbatasan dalam resolusi waktu dan frekuensi pada transformasi Fourier merupakan refleksi dari prinsip ketidakpastian, yang mengindikasikan bahwa semakin akurat kita mengukur salah satu variabel (waktu atau frekuensi), semakin kabur pengukuran variabel lainnya.

Prinsip ketidakpastian Heisenberg, yang diperkenalkan pada tahun 1927 oleh Werner Heisenberg, menyatakan bahwa posisi dan momentum suatu elektron tidak bisa ditentukan dalam waktu yang bersamaan. Prinsip ini memiliki analogi dalam analisis sinyal, dimana terdapat *trade-off* antara resolusi waktu dan resolusi frekuensi. Dalam konteks analisis sinyal, prinsip ini menggarisbawahi pentingnya metode yang mampu menangani ketidakpastian dalam pengukuran waktu dan frekuensi.

Banyak peneliti yang tertarik untuk mempelajari lebih jauh perkembangan dari formulasi prinsip ketidakpastian Heisenberg. Ozawa (2005) telah memodifikasi prin-

sip ketidakpastian Heisenberg dengan cara melakukan peninjauan terhadap standar deviasi posisi dan standar deviasi momentum dari operasi kesalahan pengukuran posisi dan operator gangguan pada momentum. Rahmah (2022) membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier. Topan (2023) membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Fourier fraksional *coupled* dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional *coupled*. Berdasarkan penelitian yang ada, terdapat ketertarikan yang mendalam untuk meneliti dan memodifikasi prinsip ketidakpastian Heisenberg dalam konteks analisis sinyal, khususnya melalui transformasi Fourier dan transformasi Fourier fraksional. Namun, dengan semakin kompleksnya sinyal yang dihadapi, muncul kebutuhan untuk menggunakan metode lain, seperti transformasi Stockwell, yang menawarkan keunggulan dalam analisis waktu-frekuensi. Hal ini mendorong penulis untuk mengkaji lebih lanjut hubungan antara prinsip ketidakpastian Heisenberg dan transformasi Stockwell yang telah dimodifikasi, sebuah bidang yang menawarkan potensi signifikan untuk pengembangan dan pemahaman yang lebih baik dalam analisis sinyal.

Transformasi Stockwell merupakan salah satu metode yang diajukan untuk keperluan analisis *time-frequency* dari sebuah sinyal. Metode ini diperkenalkan pertama kali oleh Stockwell, Mansinha dan Lowe (1996) sebagai bentuk koreksi fasa dari metode *Continuous Wavelet Transform* (CWT). Tidak seperti transformasi Fourier yang memiliki waktu tetap, transformasi Stockwell menawarkan resolusi yang progresif serta mampu memberikan informasi fase absolut dan respons amplitudo frekuensi yang konstan. Transformasi ini juga memiliki hubungan erat dengan transformasi Fourier melalui invers transformasi Stockwell, menjadikannya berguna dalam berbagai aplikasi, seperti dalam bidang geofisika, biofisika, pengolahan sinyal medis, dan lainnya [Stockwell, 1996]. Seiring berkembangnya kebutuhan analisis sinyal yang semakin kompleks, para peneliti mulai mengembangkan berbagai modifikasi dari transformasi Stockwell untuk mengatasi keterbatasan yang telah diidentifikasi dalam penerapannya. Modifikasi ini bertujuan untuk meningkatkan resolusi waktu-frekuensi dan akurasi dalam analisis sinyal non-stasioner.

Dengan demikian, evolusi dari transformasi Fourier ke-transformasi Stockwell dan modifikasinya memberikan landasan konseptual yang relevan untuk penelitian

ini. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji lebih lanjut transformasi Stockwell modifikasi dalam konteks prinsip ketidakpastian Heisenberg, dengan harapan dapat memberikan kontribusi yang signifikan dalam analisis sinyal yang lebih akurat dan efisien.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Stockwell modifikasi dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Stockwell modifikasi 1D?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah ruang $L^1(\mathbb{R})$ dan $L^2(\mathbb{R})$.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu membuktikan prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Stockwell yang dimodifikasi dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Stockwell modifikasi 1D.

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan sumbangan ilmu pengetahuan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Stockwell modifikasi khususnya pada prinsip ketidakpastian Heisenberg.

1.6. Sistematika Penulisan Tesis

Sistematika penulisan tesis ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini, meliputi: je-

nis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB III HASIL

Bab ini memuat data penelitian dan hasil-hasil dari kajian yang telah dilakukan.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini memuat nilai penting dari hasil yang diperoleh. Menguraikan dan memberikan jawaban atas pertanyaan yang dikemukakan pada Bab Pendahuluan.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi kesimpulan dan saran berdasarkan hasil bab-bab sebelumnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah-istilah sebagai teori pendukung atau landasan dalam penulisan tugas akhir ini. Sebelum membahas tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg pada transformasi Stockwell modifikasi, terlebih dahulu akan dibahas tentang ruang Lebesgue untuk transformasi Fourier. Selanjutnya, akan dibahas teori pendukung yaitu transformasi Stockwell dan prinsip ketidakpastian Heisenberg.

2.1. Ruang Lebesgue

Pada subbab ini, didefinisikan ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 1 (Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$) Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur yang terintegralkan p pada $\mathbb{R}$ ($L^p(\mathbb{R})$), dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty \right\}, \quad (2.1)$$

maka norma dari f dalam $L^p(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.2)$$

Contoh 1. Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{selainnya,} \end{cases}$$

akan ditunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 1. Berdasarkan definisi ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan $p = 1$ pada persamaan (2.2),

diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-1} |f(x)| dx + \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^{\infty} |f(x)| dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^1 1 dx + \int_1^{\infty} 0 dx \\
 &= 0 + x|_{-1}^1 + 0 \\
 &= 1 - (-1) \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Karena $2 < \infty$, maka $f(x)$ ada dalam ruang $L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2. Misalkan $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Kemudian akan ditunjukkan apakah fungsi f ada dalam fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan mencari integralnya ada.

Solusi 2. Berdasarkan definisi ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan $p = 2$ pada persamaan (2.2), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |e^{-|x|}| dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} (e^{-|x|})^2 dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 (e^x)^2 dx + \int_0^{\infty} (e^{-x})^2 dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 (e^x)^2 dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (e^{-x})^2 dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 e^{2x} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2} e^{2x} \right|_{-a}^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{2} e^{-2x} \right|_0^b \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2a} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} - 0 - 0 + \frac{1}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Karena $1 < \infty$, maka $f(x)$ ada dalam ruang $L^2(\mathbb{R})$.

2.2. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier merupakan bentuk kontinu dari deret Fourier. Transformasi Fourier adalah suatu model tranformasi yang memindahkan domain waktu menjadi

domain frekuensi. Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pemrosesan sinyal digital atau analisis sinyal.

Definisi 2 (Transformasi Fourier) Misalkan diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ terdefinisi pada $\mathbb{R}$, transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\mathcal{F}\{f\}(\xi)$ dan didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx. \quad (2.3)$$

Dalam hal ini, $i^2 = -1$ merupakan satuan imajiner dan faktor perkalian dari fungsi eksponensial $e^{-ix\xi}$ disebut kernel dari transformasi Fourier. Karena

$$e^{ix\xi} = \cos \xi x + i \sin \xi x, \quad (2.4)$$

maka persamaan (2.3) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) (\cos \xi x - i \sin \xi x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos \xi x dx - i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin \xi x dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hasil kali dalam di ruang $L^2(\mathbb{R})$ adalah

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (2.6)$$

Selanjutnya, transformasi Fourier dari sebuah fungsi $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad (2.7)$$

dan memenuhi Parseval formula yaitu,

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \mathcal{F}\{f\}, \mathcal{F}\{g\} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.8)$$

Definisi 3 (Invers Transformasi Fourier) Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (2.9)$$

2.2.1. Sifat-sifat transformasi Fourier

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat transformasi Fourier diantaranya sebagai berikut:

1. Penjumlahan

Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, maka berlaku

$$\mathcal{F}\{f + g\}(\xi) = \mathcal{F}\{f\}(\xi) + \mathcal{F}\{g\}(\xi). \quad (2.10)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f + g\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} [f(x) + g(x)]e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ix\xi} dx \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\xi) + \mathcal{F}\{g\}(\xi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f + g\}(\xi) = \mathcal{F}\{f\}(\xi) + \mathcal{F}\{g\}(\xi)$.

2. Linear

Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan α, β adalah dua konstanta kompleks, maka

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\xi) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\xi) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\xi). \quad (2.12)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(x) + \beta g(x))e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(x)e^{-ix\xi} dx + \int_{\mathbb{R}} \beta g(x)e^{-ix\xi} dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ix\xi} dx \\ &= \alpha \mathcal{F}\{f\}(\xi) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\xi). \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\xi) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\xi) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\xi)$.

3. Translasi

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang digeser oleh $x_0 \in \mathbb{R}$ yaitu $f_0(x) = f(x - x_0)$, maka

$$\mathcal{F}\{f_0\}(\xi) = e^{-i\xi x_0} \mathcal{F}\{f\}(\xi). \quad (2.13)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan

(2.3), diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f_0(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x - x_0) e^{-ix\xi} dx.\end{aligned}$$

Misalkan $u = x - x_0, x = u + x_0, dx = du$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\xi(u+x_0)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\xi u} e^{-i\xi x_0} du \\ &= e^{-i\xi x_0} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\xi u} du \\ &= e^{-i\xi x_0} \mathcal{F}\{f\}(\xi).\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f_0\}(\xi) = e^{-i\xi x_0} \mathcal{F}\{f\}(\xi)$.

4. Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Jika $(\mathbb{M}_{\xi_0} f)(x) = e^{i\xi_0 x} f(x)$, maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\xi_0} f\}(\xi) = \mathcal{F}\{f\}(\xi - \xi_0). \quad (2.14)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.3), diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\xi_0} f\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{M}_{\xi_0} f) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_0 x} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(\xi - \xi_0)x} dx \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\xi - \xi_0).\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\xi_0} f\}(\xi) = \mathcal{F}\{f\}(\xi - \xi_0)$.

5. Konjugasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\xi \in \mathbb{R}$, maka

$$\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\xi) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\xi)}. \quad (2.15)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan

(2.3), diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-ix\xi} dx.\end{aligned}$$

Dengan perubahan variabel $x = -u$, integral tersebut menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-u)} e^{-i\xi(-u)} (-du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-u)} e^{i\xi u} du.\end{aligned}$$

Transformasi Fourier dari f pada $-\xi$ adalah

$$\mathcal{F}\{f\}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx.$$

Dengan mengambil konjugat kompleks dari hasil ini, diperoleh

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}\{f\}(-\xi)} &= \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dt \right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-ix\xi} dx.\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\xi) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\xi)}$.

2.3. Transformasi Stockwell

Transformasi Stockwell merupakan metode transformasi sinyal dari domain waktu ke domain waktu-frekuensi. Transformasi Stockwell mampu melakukan analisis sinyal yang berubah terhadap waktu secara multiresolusi Pratiwi (2020). Berikut ini akan didefinisikan transformasi Stockwell.

Definisi 4 Misalkan $g \in L^2(\mathbb{R})$ adalah suatu fungsi window, transformasi Stockwell dari sinyal $f \in L^1(\mathbb{R})$ terhadap g didefinisikan sebagai

$$S_g\{f\}(b, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) |\xi| \overline{g(\xi(x-b))} e^{-ix\xi} dx. \quad (2.16)$$

Untuk semua $b \in \mathbb{R}$ dan $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.3.1. Prinsip ketidakpastian Heisenberg

Werner Heisenberg (1927) mengemukakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti dan tidak dapat ditentukan dalam waktu yang bersamaan, karena semakin akurat momentum ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya. Sebaliknya, semakin akurat penentuan posisinya, maka semakin tidak akurat penentuan momentumnya. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg adalah nama yang diberikan untuk prinsip yang memberikan batas bawah (bukan nol) untuk dua keadaan yang mencirikan suatu keadaan sistem. Berikut diberikan bentuk umum persamaan prinsip ketidakpastian Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}, \quad (2.17)$$

dengan keterangan:

Δx =ketidakpastian posisi: meter(m)

Δp =ketidakpastian momentum: kilogram meter per detik(kg.m/ s)

h =konstanta Planck ($6,625 \times 10^{-34}$): Joule detik (Js).

Dari persamaan (2.17) diketahui bahwa hasil kali ketidakpastian posisi (Δx) suatu benda dan ketidakpastian momentum (Δp) dalam arah x akan lebih besar atau sama dengan hasil bagi konstanta Planck oleh 4π . Bentuk lain dari prinsip ketidakpastian Heisenberg juga tidak kalah penting. Salah satunya adalah modifikasi prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier. Dalam keadaan ini, Δx merupakan suatu fungsi dan Δp merupakan suatu transformasi Fourier.

Teorema 1 Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$, maka berlaku pertidaksamaan berikut

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2. \quad (2.18)$$

Prinsip ketidakpastian ini akan digeneralisasi ke transformasi Stockwell modifikasi.