

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Bilangan quaternion merupakan sebuah struktur matematika yang diciptakan oleh William Rowan Hamilton pada tahun 1843 dan merupakan pengembangan dari bilangan kompleks, terdiri dari tiga bagian real dan tiga bagian imajiner yang independen [Hamilton, 1853]. Quaternion memiliki karakteristik khusus yang membedakannya dari bilangan kompleks dan bilangan real. Quaternion dapat digunakan untuk menunjukkan orientasi dan rotasi dalam ruang tiga dimensi serta dalam teori medan vektor fisika dan matematika karena sifat non-komutatifnya, yang berarti bahwa urutan perkalian quaternion akan mempengaruhi hasilnya [Kuipers, Jack B. 2002]. Quaternion memiliki banyak aplikasi praktis dalam pemrosesan sinyal, terutama dalam transformasi sinyal spasial seperti transformasi Fourier quaternion, dalam mekanika untuk menunjukkan orientasi objek, dan dalam grafika komputer untuk menunjukkan rotasi objek dalam ruang 3D [Jia, et al., 2005].

Seperti dalam aljabar linier klasik, transformasi kanonik linier pada quaternion berkonsentrasi pada analisis sifat transformasional seperti linearitas, nilai eigen, dan representasi matriks. Pada dasarnya, transformasi ini melibatkan perpindahan dari satu ruang quaternion ke ruang lain melalui peta linier yang mempertahankan struktur aljabar quaternion, meningkatkan alat analisis dan pemodelan yang tersedia untuk aplikasi ilmiah dan teknik. Kategori ini mencakup bidang seperti grafik komputer, mekanika, dan pemrosesan sinyal [Smith, 2016, De Leo, 1996].

Sebagaimana diketahui, beberapa transformasi populer, seperti transformasi Fourier quaternion, transformasi Fourier fraksional quaternion, dan transformasi kanonik linier quaternion, diperluas oleh transformasi kanonik linier quaternion offset, yang termasuk dalam kelas transformasi integral linier kiri dengan enam parameter bebas. Beberapa penulis seperti [Y.E. Haoui, et al., 2022], telah membahas secara detail mengenai sejumlah sifat penting dari transformasi kanonik linier quaternion offset ter-

masuk konvolusi, korelasi, dan ketaksamaan. Dalam beberapa tahun terakhir, para peneliti telah memberikan perhatian besar terhadap penggunaan kernel dari transformasi kanonik linier quaternion offset untuk mengembangkan berbagai transformasi baru yang diperluas.

Sebagai contoh, para penulis [M.El Kassimi.,et al., 2019] telah mempelajari distribusi Wigner-Ville yang terkait dengan transformasi kanonik linier offset quaternion, yang merupakan perluasan alami dari distribusi Wigner-Ville dengan menggunakan transformasi kanonik linier offset quaternion. Namun hingga saat ini, beberapa ketidakpastian seperti prinsip ketidakpastian sharp Hausdorff-Young belum diselidiki dalam konteks transformasi kanonik linier offset quaternion.

Dalam penelitian ini, penulis mulai dengan menyelidiki sifat-sifat utama dari transformasi kanonik linier quaternion offset. Berdasarkan sifat-sifat dari transformasi kanonik linier quaternion offset dan hubungannya dengan transformasi kanonik linier quaternion, penulis memperoleh analog dari ketaksamaan sharp Hausdorff-Young, dalam kerangka transformasi kanonik linier quaternion offset. Selain itu, penulis memverifikasi pertidaksamaan sharp Hausdorff-Young yang melibatkan transformasi yang dipertimbangkan dengan menggunakan filter Gabor quaternion. Terakhir, ditunjukkan bahwa transformasi kanonik linier quaternion offset bermanfaat dalam sinyal modulasi frekuensi linier (LFM).

Berdasarkan uraian tersebut, sehingga penulis tertarik mengangkat topik penelitian ini dengan judul "Prinsip Ketidakpastian Sharp Hausdorff-Young pada Transformasi Kanonik Linier Quaternion Offset".

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka diperoleh rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana relasi antara transformasi kanonik linier quaternion offset dengan transformasi kanonik linier quaternion ?
2. Bagaimana pembuktian dari ketaksamaan sharp Hausdorff-Young pada trans-

formasi kanonik linier quaternion offset dengan menggunakan relasi antara antara transformasi kanonik linier quaternion offset dengan transformasi kanonik linier quaternion ?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini, hanya akan membahas :

1. Transformasi kanonik linier quaternion offset dengan beberapa sifatnya.
2. Prinsip ketaksamaan yang akan dibahas yaitu ketaksamaan sharp Hausdorff-Young.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka tujuan dari penelitian ini yaitu untuk:

1. Membuktikan relasi antara transformasi kanonik linier quaternion offset dengan transformasi kanonik linier quaternion
2. Membuktikan ketaksamaan sharp Hausdorff-Young pada transformasi kanonik linier quaternion offset dengan menggunakan relasi antara transformasi kanonik linier quaternion offset dengan transformasi kanonik linier quaternion serta menurunkan beberapa sifat-sifatnya.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini ialah diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus literatur tambahan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi kanonik linier quaternion, khususnya pada prinsip ketaksamaan sharp Hausdorff-Young pada transformasi kanonik linier quaternion offset.

1.6. Sistematika Penulisan Tesis

Sistematika penulisan tesis ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan tesis.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi materi konsep dasar dan penelitian relevan yang terkait dengan prinsip ketidakpastian sharp Hausdorff-Young pada transformasi kanonik linier quaternion offset.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini, meliputi: jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi hasil dari kajian yang telah dilakukan, beserta pembahasannya.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi kesimpulan dan saran berdasarkan hasil penelitian.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dibahas materi yang mendasari penelitian ini, yakni yang akan menjadi landasan dalam penyelesaian prinsip ketidakpastian sharp Hausdorff-Young pada transformasi kanonik linier quaternion offset. Adapun materi yang mencakup ialah bilangan quaternion, ruang Lebesgue, transformasi Fourier, transformasi Fourier quaternion, transformasi kanonik linier quaternion dua sisi, serta prinsip ketidakpastian sharp Hausdorff-Young.

2.1. Quaternion

Menurut Shomake (2007), aljabar quaternion yang merupakan perluasan matematika kompleks dari aljabar empat dimensi, diciptakan oleh Hamilton pada tahun 1853 dan dinotasikan dengan $\mathbb{H}$ sebagai penghormatan kepadanya.

Definisi 2.1.1 (Quaternion)

Quaternion merupakan kombinasi linier skalar riil dan tiga satuan imajiner ortogonal (dilambangkan dengan i , j , dan k) dengan koefisien riil yang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbb{H} = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}, \quad (2.1)$$

dengan $\mathbb{R}$ adalah notasi dari bilangan real.

Elemen-elemen i , j , dan k memenuhi aturan perkalian Hamilton berikut ini :

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1.1. Sifat-Sifat Quaternion

Berikut dijelaskan sifat-sifat operasi pada bilangan quaternion :

1. Operasi Penjumlahan dan Perkalian

Diberikan dua buah quaternion $x, y \in \mathbb{H}$ yaitu :

$$x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad \text{dan}$$

$$y = y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k},$$

dengan $x_0, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.

Penjumlahan dua buah quaternion tersebut adalah

$$\begin{aligned} x + y &= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) + (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Adapun perkalian dua buah quaternion adalah

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})(y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ &= x_0(y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) + x_1\mathbf{i}(y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ &\quad + x_2\mathbf{j}(y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) + x_3\mathbf{k}(y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ &= (x_0y_0 + x_0y_1\mathbf{i} + x_0y_2\mathbf{j} + x_0y_3\mathbf{k}) + (x_1y_0\mathbf{i} + x_1y_1\mathbf{i}^2 + x_1y_2\mathbf{i}\mathbf{j} + x_1y_3\mathbf{i}\mathbf{k}) \\ &\quad + (x_2y_0\mathbf{j} + x_2y_1\mathbf{j}\mathbf{i} + x_2y_2\mathbf{j}^2 + x_2y_3\mathbf{j}\mathbf{k}) + (x_3y_0\mathbf{k} + x_3y_1\mathbf{k}\mathbf{i} + x_3y_2\mathbf{k}\mathbf{j} + x_3y_3\mathbf{k}^2) \\ &= x_0y_0 + x_0y_1\mathbf{i} + x_0y_2\mathbf{j} + x_0y_3\mathbf{k} + x_1y_0\mathbf{i} - x_1y_1 + x_1y_2\mathbf{k} - x_1y_3\mathbf{j} \\ &\quad + x_2y_0\mathbf{j} - x_2y_1\mathbf{k} - x_2y_2 + x_2y_3\mathbf{i} + x_3y_0\mathbf{k} + x_3y_1\mathbf{j} - x_3y_2\mathbf{i} - x_3y_3 \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)\mathbf{j} + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. Konjugat dari Quaternion

Jika

$$x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k},$$

maka konjugat dari x adalah

$$\bar{x} = x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}. \quad (2.5)$$

Contoh 2.1.2

$$x = 3 + 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \rightarrow \bar{x} = 3 - 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

3. Norma dari Quaternion

Norma dari quaternion diperoleh dari modulus perkalian quaternion dengan konjugatnya $\bar{x}$.

$$|x| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (2.6)$$

Salah satu sifat norm quaternion adalah

$$|x| |y| = |xy|. \quad (2.7)$$

Contoh 2.1.3

$$x = 3 + 2i - 5j + 4k \rightarrow |x| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{54}.$$

4. Invers dari Quaternion

Invers dari quaternion adalah

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}, x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}. \quad (2.8)$$

Contoh 2.1.4

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2i - 5j + 4k \\ x^{-1} &= \frac{3 - 2i + 5j - 4k}{54} \\ &= \frac{1}{54}(3 - 2i + 5j - 4k). \end{aligned}$$

2.2. Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue merupakan suatu ruang kelas ekuivalen fungsi yang dilengkapi suatu norma, yang pertama kali ditemukan oleh Henri Lebesgue pada tahun 1910. Fungsi-fungsi tersebut merupakan fungsi terukur (Lebesgue). Norma pada ruang Lebesgue didefinisikan dengan suatu integral (Lebesgue) yang bernilai terbatas. Dalam beberapa hal, ruang Lebesgue dapat menjadi *prototype* bagi semua ruang fungsi.

Definisi 2.2.1 (Ruang $L^1(\mathbb{R})$)

Misalkan f fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \right\}. \quad (2.9)$$

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ yang dirumuskan

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx. \quad (2.10)$$

Contoh 2.2.2 Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } -5 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Penyelesaian. Berdasarkan definisi fungsi ruang $L^1(\mathbb{R})$, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-5} |f(x)| dx + \int_{-5}^5 |f(x)| dx + \int_5^{\infty} |f(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{-5} 0 dx + \int_{-5}^5 1 dx + \int_5^{\infty} 0 dx \\ &= 0 + x \Big|_{-5}^5 + 0 \\ &= 5 - (-5) \\ &= 10. \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

Definisi 2.2.3 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$)

" Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai kumpulan semua fungsi f yang kuadratnya terintegralkan mutlak yaitu

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}. \quad (2.11)$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ yang dirumuskan

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.12)$$

Jika $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan inner product dengan aturan jika $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ didefinisikan

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (2.13)$$

dengan normanya ditulis sebagai

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx. \quad (2.14)$$

Contoh 2.2.4 Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$.

Penyelesaian. Berdasarkan definisi fungsi ruang $L^2(\mathbb{R})$, diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^1 |x|^2 dx + \int_1^{\infty} 0 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} (1)^2 \right) - \left(\frac{1}{2} (-1)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0. \end{aligned}$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

2.3. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah transformasi integral linier yang mengubah suatu sinyal dari domain waktu (*space domain*) menjadi domain frekuensi (*frequency domain*). Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pemrosesan sinyal digital atau analisis sinyal. Transformasi Fourier juga merupakan bentuk kontinu dari deret Fourier, yang biasanya disingkat dengan transformasi Fourier.

Definisi 2.3.1 (Transformasi Fourier) Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, transformasi Fourier dari f didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (2.15)$$

dengan $e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - i \sin(\omega x)$.

Karena $e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - i \sin(\omega x)$ maka Persamaan (2.15) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)(\cos(\omega x) - i \sin(\omega x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\omega x)dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)i \sin(\omega x)dx.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Contoh 2.3.2 Hitung transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ e^{ax}, & x < 0, \end{cases}$$

dengan $a > 0$

Penyelesaian.

Berdasarkan Definisi 2.3.1, maka tranformasi Fourier dari $f(t)$ yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)x}dx + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)x}dx \\ &= \left. \frac{e^{(a-i\omega)x}}{(a-i\omega)} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)} \right|_0^{\infty} \\ &= \left(\frac{1}{(a-i\omega)} - 0 \right) + \left(0 - \frac{1}{-(a+i\omega)} \right) \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} + \frac{1}{(a+i\omega)} \\ &= \frac{a+i\omega + (a-i\omega)}{(a-i\omega)(a+i\omega)} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Jadi,

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

2.3.1. Sifat-Sifat Transformasi Fourier

Sifat-sifat transformasi Fourier adalah sebagai berikut [Bahri M. & Zulfajar R. A., 2014].

1. Linieritas

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

$$\mathcal{F}\{f + g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \quad (2.17)$$

2. Perkalian konstanta

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $k \in \mathbb{C}$ maka

$$\mathcal{F}\{kf\}(\omega) = k\mathcal{F}\{f\}(\omega). \quad (2.18)$$

3. Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan translasi $(\tau_k f)(x) = f(x - k)$, maka

$$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k} \mathcal{F}\{f\}(\omega). \quad (2.19)$$

4. Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $(\mathbb{M}_{\omega_0} f)(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$, maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \quad (2.20)$$

5. Translasi dan modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $k, \omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(x) = e^{i\omega_0 x} f(x - k)$, maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(x)\}(\omega) = e^{-i(\omega - \omega_0)k} \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \quad (2.21)$$

Definisi 2.3.3 (Invers Transformasi Fourier) *Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai*

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (2.22)$$

2.4. Transformasi Fourier Quaternion (TFQ)

Transformasi Fourier quaternion (TFQ) didefinisikan persis dengan transformasi Fourier klasik dari fungsi 2D. Properti nonkomutatif dari perkalian quaternion yang memungkinkan untuk memiliki tiga definisi yang berbeda dari transformasi Fourier quaternion (TFQ).

Definisi 2.4.1 (TFQ dua sisi) *TFQ dua sisi dari $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ adalah transformasi $\mathcal{F}_Q\{f\}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ diberikan oleh integral*

$$\mathcal{F}_Q\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega_1 x_1} f(x) e^{-j\omega_2 x_2} dx, \quad (2.23)$$

dimana $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ dan produk eksponensial quaternion $e^{-i\omega_1 x_1} e^{-j\omega_2 x_2}$ disebut kernel Fourier quaternion.

Definisi 2.4.2 (Invers TFQ Dua Sisi). Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dan $\mathcal{F}_Q\{f\}(\omega) \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$. Maka TFQ dua sisi dari f adalah transformasi yang dapat dibalik dan kebalikannya adalah

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 x_1} \mathcal{F}_Q\{f\}(\omega) e^{j\omega_2 x_2} d\omega, \quad (2.24)$$

dimana produk eksponensial quaternion $e^{j\omega_2 x_2} e^{i\omega_1 x_1}$ disebut invers kernel Fourier quaternion dua sisi.

Jika $\mathcal{F}_Q\{f\}(\omega) = 1$ dari invers TFQ Dua Sisi, diperoleh fungsi delta Dirac quaternion yaitu,

$$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega_1 x_1} e^{j\omega_2 x_2} d\omega. \quad (2.25)$$

Telah diketahui bahwa rumus Parseval tidak berlaku untuk TFQ dua sisi, namun kasus khusus dari rumus Parseval yang disebut sebagai rumus Plancherel tetap berlaku, yaitu

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \|\mathcal{F}_Q\{f\}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2. \quad (2.26)$$

Dibawah ini merupakan rumus Parseval untuk sisi kanan TFQ

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})} = \frac{1}{(2\pi)^2} (\mathcal{F}_Q\{f\}, \mathcal{F}_Q\{g\})_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}, \quad (2.27)$$

dengan TFQ sisi kanan didefinisikan $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ didefinisikan translasi, modulasi, dan dilatasi yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} T_\alpha f(x) &= f(x - a), & M_{\omega_0} f(x) &= e^{iu_0 x_1} f(x) e^{jv_0 x_2} \\ \mathcal{D}_c f(x) &= \frac{x}{c}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

dengan $\omega_0 = u_0 e + v_0 e_0$.

2.5. Transformasi Kanonik Linier Quaternion Dua Sisi

Berikut ini diberikan definisi dari transformasi kanonik linier quaternion dua sisi sebagai berikut :

Definisi 2.5.1 (Transformasi kanonik linier quaternion dua sisi)

Misal diberikan matriks

$$A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

dan

$$A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2) = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

didalam $SL(2, \mathbb{R})$. Grup $SL(2, \mathbb{R})$ didefinisikan sebagai grup 2×2 matriks dengan entri dari bidang bilangan real dan determinan 1.

Transformasi kanonik linier quaternion dua sisi dari sinyal quaternion $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ didefinisikan melalui

$$\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) f(\mathbf{x}) K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x}, \text{ for } b_1 b_2 \neq 0,$$

dan

$$\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) = \sqrt{d_1} e^{i\left(\frac{c_1 d_1}{2}\right) \omega_1^2} f(d_1 \omega_1, d_2 \omega_2) \sqrt{d_2} e^{j\left(\frac{c_2 d_2}{2}\right) \omega_2^2}, \text{ for } b_1 = b_2 = 0. \quad (2.31)$$

dengan

$$K_{A_1}(x_1, \omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{\frac{i}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} x_1^2 - \frac{2}{b_1} x_1 \omega_1 + \frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (2.32)$$

dan

$$K_{A_2}(x_2, \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{\frac{j}{2} \left(\frac{a_2}{b_2} x_2^2 - \frac{2}{b_2} x_2 \omega_2 + \frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (2.33)$$

menunjukkan fungsi kernel dari transformasi kanonik linier quaternion dua sisi.

Adapun invers dari transformasi kanonik linier quaternion dua sisi yang ditentukan oleh (2.31) dihitung dengan

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{K_{A_1}(x_1, \omega_1)} \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) \overline{K_{A_2}(x_2, \omega_2)} d\omega, \quad (2.34)$$

asalkan integral tersebut ada.

2.6. Relasi antara Transformasi Fourier Quaternion dengan Transformasi Kanonik Linier Quaternion

Relasi antara transformasi Fourier quaternion dengan transformasi kanonik linier quaternion melalui sinyal quaternion f dinyatakan oleh

$$\sqrt{b_1 b_2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{d_1}{2b_1}\omega_1^2} \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{d_2}{2b_2}\omega_2^2} = \mathcal{F}_Q \{h\} \left(\frac{\omega_1}{b_1}, \frac{\omega_2}{b_2} \right) = \mathcal{F}_Q \{h\} \left(\frac{\omega}{\mathbf{b}} \right), \quad (2.35)$$

di mana

$$h(\mathbf{x}) = e^{i\frac{a_1}{2b_1}x_1^2} f(\mathbf{x}) e^{j\frac{a_2}{2b_2}x_2^2}. \quad (2.36)$$

untuk setiap $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, telah ada

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.37)$$

yang biasanya disebut rumus Parseval untuk transformasi kanonik linier quaternion dua sisi.

2.7. Prinsip Ketidakpastian Sharp Hausdorff-Young pada Transformasi Kanonik Linier Quaternion

Hubungan antara transformasi Fourier quaternion dan transformasi kanonik linier quaternion, dapat dibuktikan pertidaksamaan sharp Hausdorff-Young yang melibatkan transformasi kanonik linier quaternion.

Teorema 2.7.1 (Ketaksamaan Sharp Hausdorff-Young)

Untuk setiap $1 \leq r \leq 2$ sedemikian sehingga $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$, maka untuk setiap fungsi f

dalam $L^r(\mathbb{R})$, pertidaksamaan berikut ini terpenuhi [M.El Kassimi.,et al., 2019]:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^s d\omega \right)^{\frac{1}{s}} \leq |b_1 b_2|^{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}} (r^{\frac{1}{r}} s^{-\frac{1}{s}}) (2\pi)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (2.38)$$