

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1736 seorang ahli matematika bernama Leonhard Euler menuliskan makalah teori graf yang berisi tentang jembatan Königsberg. Dalam karyanya yang berjudul “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, Euler menjawab teka-teki jembatan Königsberg dengan memperlihatkan bahwa perjalanan di kota Königsberg mempunyai 7 buah jembatan dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali yang bertolak dan berakhir pada suatu daratan yang sama tidak dapat dilakukan. Sekeras apapun penduduk kota mencoba, tidak ada yang dapat berjalan di rute yang melintas setiap jembatan ini tepat satu kali. Euler menyederhanakan jembatan Königsberg dengan merepresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi, yang selanjutnya dikenal sebagai graf (Hasmawati, 2020).

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya di sebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan-pasangan anggota V yang disebut sisi (Hasmawati, 2020).

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan graf yang banyak dikembangkan. Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf dengan bilangan bulat. Jika domain pemetaan adalah himpunan titik maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domain pemetaan adalah himpunan sisi maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Sedangkan, jika domain pemetaan adalah himpunan sisi dan titik maka pelabelan disebut pelabelan total (Nurdin H, dkk., 2017).

Selain jenis pelabelan yang disebutkan di atas, terdapat pelabelan jenis lain yang dikenal sebagai pelabelan rata-rata. Konsep Pelabelan rata-rata di perkenalkan oleh Somasundaram dan Ponraj. Pelabelan rata-rata adalah sebuah pemetaan yang bersifat injektif yang memetakan titik di graf dengan bilangan bulat $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ dimana q adalah banyaknya sisi sedemikian sehingga label sisi $f^*(uv) = \left\lfloor \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rfloor$ berbeda. Pelabelan rata-rata telah dibahas dalam beberapa jurnal diantaranya Revathi (2013), membahas tentang pelabelan rata-rata pada beberapa graf. A.Lourdusam, dkk. (2011) yang membahas tentang pelabelan rata-rata pada graf cyclic snakes. Gayathri dan Sulochana (2017), membahas tentang pelabelan rata-rata pada graf tidak terhubung. Kaneria dan Meghpara (2015), membahas tentang pelabelan rata-rata pada beberapa graf siklus. R.Ramdani, dkk. (2021) yang membahas tentang akar kuadrat pelabelan rata-rata pada beberapa graf yang diperoleh melalui lintasan.

Berdasarkan beberapa hasil penelitian tersebut, belum ada yang membahas pelabelan rata-rata pada graf prisma segiempat. Karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji pelabelan rata-rata pada graf prisma segiempat atau graf $P_{4,n}$ yang dituangkan dalam penelitian dengan judul “Pelabelan rata-rata pada graf prisma segiempat”.

1.2 Rumusan dan Batasan Masalah

1.2.1 Rumusan Masalah

Berdasarkan penelitian ini, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana memetakan pola pelabelan pada graf $P_{m,n}$ sehingga $P_{m,n}$ menjadi graf rata-rata dengan $m = 4$

1.2.2 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji pelabelan rata-rata pada graf $P_{m,n}$ dengan n adalah bilangan bulat positif dan $m = 4, n \geq 1$.

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

1.3.1 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan label titik pada graf G sehingga label sisi memenuhi pelabelan rata-rata, serta menemukan pola pelabelan rata-rata pada graf prisma $P_{4,n}$.

1.3.2 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan mengenai teori graf, khususnya pelabelan rata-rata.
2. Sebagai media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.
3. Menjadi pustaka bagi matematikawan yang ingin membahas mengenai pelabelan rata-rata.

1.4 Landasan Teori

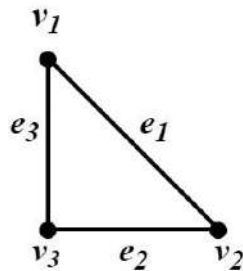
1.4.1 Pengertian Graf

Teori graf pertama kali di perkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Graf dinotasikan dengan G , himpunan titik di graf G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dinyatakan dengan $E(G)$. Secara formal definisi graf dituliskan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 Graf adalah pasangan himpunan (V, E) , dengan V adalah himpunan yang anggota-anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi. (Hasmawati, 2020)

Himpunan titik di graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi G dinotasikan $E(G)$. Pasangan titik (u, v) dengan $u, v \in V(G)$, selanjutnya akan ditulis uv ,

merupakan sisi yang menghubungkan titik u dan v . Misalkan diberikan graf seperti pada gambar 2.1 di bawah ini :



Gambar 1 Graf G

Himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ adalah

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$$

dengan $e_1 = v_1 v_2$, $e_2 = v_2 v_3$, $e_3 = v_1 v_3$

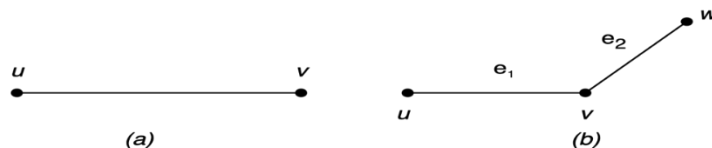
1.4.2 Terminologi Dasar Graf

Dalam teori graf, terdapat beberapa istilah yang sering digunakan yang berkaitan dengan graf. Berikut beberapa terminologi dasar graf.

Definisi 2.2.1 Banyaknya anggota $V(G)$ dari suatu graf di sebut orde, sedangkan banyaknya anggota $E(G)$ dari suatu graf di sebut ukuran (size) (Hasmawati, 2020).

Definisi 2.2.2 Misalkan dia adalah graf dengan himpunan titik dan sisi masing-masing adalah $V(G)$ dan $E(G)$. Titik $u, v \in V(G)$ dikatakan bertetangga (adjacent) di G jika $uv \in E(G)$. Dalam hal seperti ini, u dan v dikatakan bersisian dengan sisi uv . Jika sebuah titik bersisian dengan sisi e_1 dan e_2 maka e_1 dan e_2 dikatakan bertetangga (Wilson, 1996).

Berikut ini adalah contoh dari titik bertetangga dan sisi yang bertetangga :

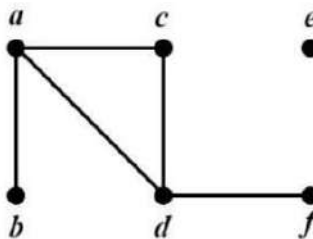


Gambar 2 (a) Titik Bertetangga, (b) Sisi Bertetangga

Pada Gambar 2.2 (a) titik u bertetangga dengan titik v karena terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut sedangkan pada gambar (b) sisi e_1 bertetangga dengan sisi e_2 karena kedua sisi tersebut mempunyai titik yang sama.

Definisi 2.2.3 Derajat suatu titik v dalam graf G , dilambangkan " $d(v_i)$ " adalah banyaknya titik di $V(G)$ yang bertetangga dengan v . Derajat minimum dari suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$, yaitu $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}$ dan derajat maksimum dari suatu graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$, yaitu $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$ (Hasmawati, 2020).

Gambar 2.3 di bawah ini memperlihatkan graf dengan derajat masing-masing titiknya adalah sebagai berikut :



Gambar 3 Graf G

$$d(a) = 3, d(b) = 1, d(c) = 2, d(d) = 2, d(e) = 0, d(f) = 1.$$

Dari derajat titik tersebut dapat disimpulkan bahwa derajat titik minimum pada Gambar 2.3 tersebut adalah $\delta(G) = 0$ dan derajat titik maksimum adalah $\Delta(G) = 3$ (Rahayuningsih, 2018).

Definisi 2.2.4 Jalan (walk) pada graf G didefinisikan sebagai barisan titik dan sisi berhingga yang berselang-seling dengan bentuk:

$$W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n.$$

$$v_i \in V(G) \forall i = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

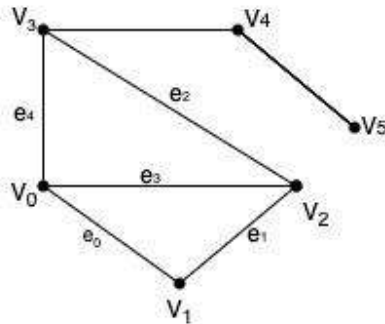
$$e_j \in E(G) \forall j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga :

Setiap sisi e_i bersisian dengan v_{i-1} dan v_i

Jalan yang memiliki v_0 sebagai titik awal dan v_n sebagai titik akhir disebut jalan dari v_0 ke v_n atau secara singkat jalan v_0 sampai v_n . Jalan v_0 sampai v_n dengan v_i semuanya berlainan disebut lintasan. Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut siklus. Panjang jalan v_0 sampai v_n adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut (Vasudev, 2006).

Gambar 2.4 di bawah ini memperlihatkan tiga jalan pada v_0, v_1, v_2, v_3 yang berbeda yaitu :



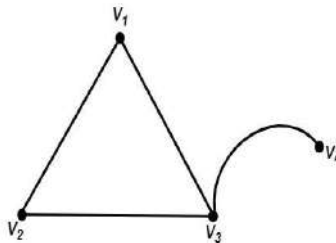
Gambar 4 Jalan (walk)

Pada gambar 2.4 dapat dilihat, bahwa $v_0e_0v_1e_1v_2e_2v_3$, $v_0e_3v_2e_2v_3$ atau $v_0e_0v_1e_1v_2e_3v_0e_4v_3$ adalah jalan v_0 sampai v_3 . Dimana, $v_0e_0v_1e_1v_2e_2v_3$ dan $v_0e_3v_2e_2v_3$ merupakan lintasan, sedangkan $v_0e_0v_1e_1v_2e_3v_0e_4v_3$ bukan lintasan.

1.4.3 Jenis-Jenis Graf

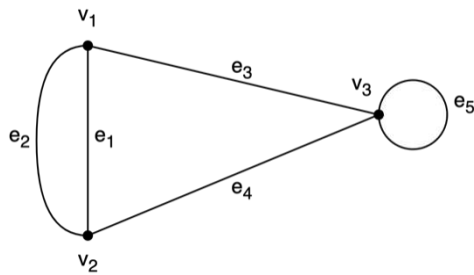
Pada sub bab ini akan dijelaskan beberapa jenis graf yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 2.3.1 Graf G dikatakan sederhana jika setiap sisi uv sama dengan vu dengan $u \neq v$ untuk setiap $u, v \in V(G)$ (Hasmawati, 2020).



Gambar 5 Graf Sederhana

Graf sederhana merupakan graf yang tidak mempunyai loop atau sisi ganda. Loop yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama sedangkan dua titik yang dihubungkan lebih dari satu sisi disebut sisi ganda.

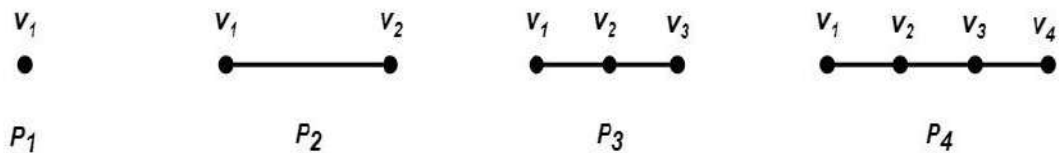


Gambar 6 Graf G_1

Gambar 2.6 berikut merupakan contoh graf dengan sisi ganda dan loop.

Definisi 2.3.2 Graf lintasan dengan panjang n adalah graf dengan n titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Graf lintasan dengan n titik disimbolkan dengan P_n (Zhang dan Chatrand, 2012).

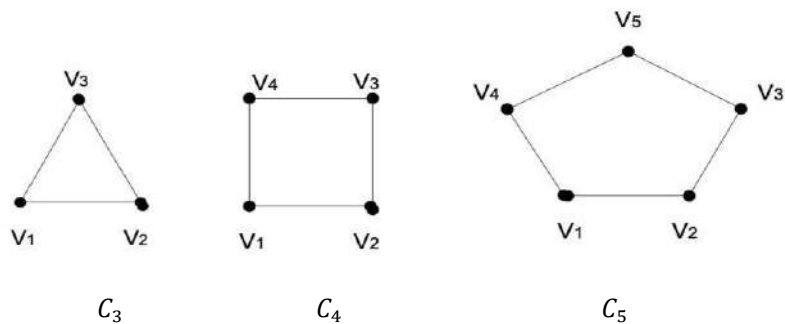
Berikut ini adalah contoh graf lintasan dari P_1, P_2, P_3 , dan P_4 :

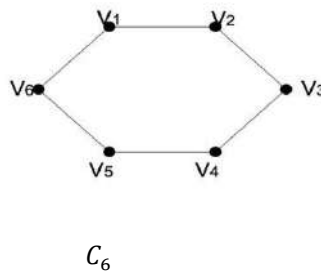


Gambar 2. 1 Graf Lintasan

Definisi 2.3.3 Graf siklus (cycle) adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua (Alfian Y. H, dkk., 2015).

Berikut ini adalah contoh graf lintasan dari C_3, C_4, C_5, C_6 :

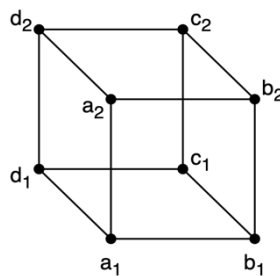




Gambar 7 Graf Siklus

Definisi 2.3.4 Graf prisma adalah graf hasil kali kartesius $C_m \times P_n$ dimana C_m graf lingkaran dengan m titik dan P_n adalah sebuah lintasan dengan n titik. Graf prisma dinotasikan dengan $P_{m,n}$ (Hartina, 2018)

Berikut ini merupakan graf prisma yang diperoleh dari hasil kali kartesius $C_4 \times P_2$:



Gambar 8 Graf Prisma($P_{4,2}$)

1.5 Pemetaan

Misalkan diberikan dua himpunan yang tidak kosong yaitu A dan B . Suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A ke tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan $f : A \rightarrow B$. Himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain) dan himpunan B disebut sebagai daerah kawan (kodomain). Secara umum pemetaan dibagi menjadi 3 macam sebagai berikut:

Definisi 2.4.1 Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah pemetaan dari A ke B . Pemetaan f disebut injektif jika untuk setiap $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ (Bartle dan Sherbert 2011).

Contoh 2.4.1 :

Tentukan apakah $f(x) = x + 3$ merupakan fungsi injektif?

$f(x) = x + 3$ adalah fungsi injektif karena untuk $a \neq b, a - 1 \neq b - 1$, misalkan untuk $x = 2, f(2) = 5$ dan untuk $x = -2, f(-2) = 1$.

Definisi 2.4.2 Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah pemetaan dari A ke B . Pemetaan f disebut surjektif jika $f(A) = B$; yaitu jika $\text{range } R(f) = B$ (Bartle dan Sherbert 2011).

Contoh 2.4.2 :

$f : A \rightarrow B$ dengan $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dan $A = \{1, 2, 3\}, B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi surjektif pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f .

Definisi 2.4.3 Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah pemetaan dari A ke B . Pemetaan f disebut bijektif jika pemetaan f merupakan pemetaan injektif dan surjektif (Bartle dan Sherbert 2011).

Contoh 2.4.3:

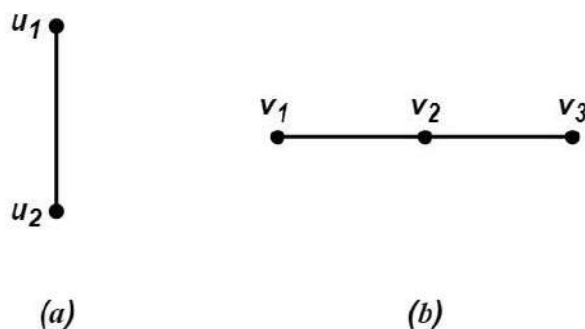
$f : A \rightarrow B$ dengan $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dan $A = \{1, 2, 3\}, B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi yang bersifat bijektif, karena f adalah fungsi injektif maupun fungsi surjektif.

1.6 Perkalian kartesius

Dalam matematika, kita biasanya selalu mencoba untuk mendapatkan struktur baru dari sesuatu. Ini juga berlaku untuk bidang graf, dimana kita dapat menghasilkan banyak graf baru dari kumpulan graf tertentu. Salah satu cara untuk menghasilkan graf baru adalah dengan menggunakan operasi perkalian kartesius. Pada subbab ini akan dibahas operasi perkalian kartesius pada graf.

Definisi 2.5.1 Misalkan A dan B adalah dua himpunan. Perkalian Kartesius (Cartesian product) $A \times B$ adalah himpunan dari semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Pasangan (a_1, b_1) sama dengan (a_2, b_2) jika hanya jika $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$ (Hasmawati, 2020).

Berikut ini diberikan contoh perkalian graf P_2 dan P_3 . Graf P_2 dan P_3 diperlihatkan pada gambar 2.5 :



Gambar 9 Graf P_2 dan (b) Graf P_3

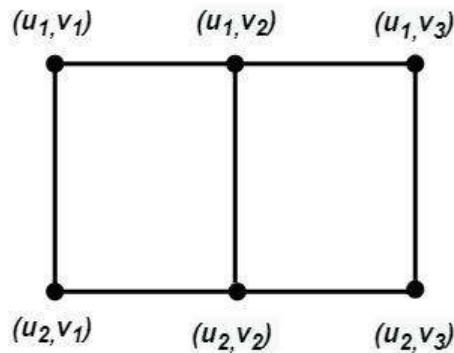
Himpunan titik pada graf P_2 adalah $V(P_2) = \{u_1, u_2\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(P_2) = \{u_1 u_2\}$, sedangkan himpunan titik pada graf P_3 adalah $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(P_3) = \{v_1 v_2, v_2 v_3\}$. Perkalian kartesius dari P_2 dengan P_3 dinotasikan $P_2 \times P_3$ adalah graf dengan himpunan titik :

$$V(P_2 \times P_3) = \{(u_i, v_j) \mid u_i \in V(P_2) \forall i \in \{1, 2\} \text{ dan } v_j \in V(P_3) \forall j \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Himpunan sisinya sebagai berikut :

$$E(P_2 \times P_3) = \{(u_1, v_1)(u_1, v_2), (u_1, v_2)(u_1, v_3), (u_1, v_1)(u_2, v_1), (u_1, v_2)(u_2, v_2), (u_1, v_3)(u_2, v_3), (u_2, v_1)(u_2, v_2), (u_2, v_2)(u_2, v_3)\}.$$

Titik (u_1, v_1) bertetangga dengan (u_1, v_2) karena $u_1 = u_1$ dan $(v_1, v_2) \in E(P_3)$, demikian juga dengan (u_1, v_2) bertetangga dengan (u_1, v_3) karena $u_1 = u_1$ dan $(v_2, v_3) \in E(P_3)$. Graf $P_2 \times P_3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 10 Graf $P_2 \times P_3$

1.7 Pelabelan Rata-Rata

Salah satu jenis pelabelan pada teori graf adalah pelabelan rata-rata yang digunakan pada tugas akhir ini.

Definsi 2.6.2 Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf dengan bilangan bulat non negatif (Kurniasari dan Heri, 2010).

Saat ini sudah banyak jenis pelabelan graf yang dikembangkan. Salah satunya yaitu pelabelan rata-rata. Adapun definisi pelabelan rata-rata secara formal adalah sebagai berikut.

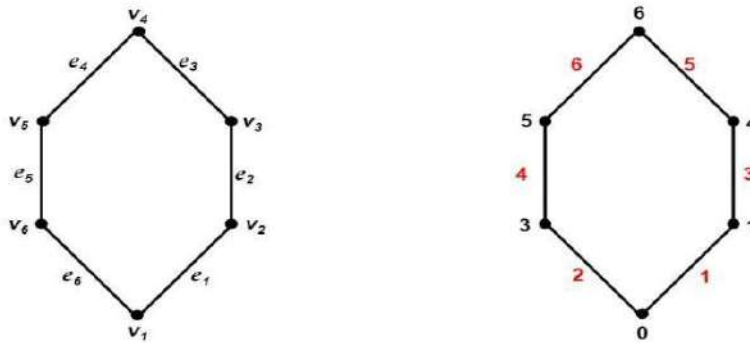
Definsi 2.6.3 Misal $G(V, E)$ suatu graf dan $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ dimana q adalah banyaknya sisi pada G . Pemetaan f disebut pelabelan rata-rata pada G jika f injektif dan terdapat pemetaan $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ didefinisikan sebagai:

$$f^*(uv) = \left\lfloor \frac{f(u) + f(v)}{2} \right\rfloor$$

Graf dikatakan graf rata-rata jika memiliki pelabelan rata-rata (Kaneria dan Meghpara, 2015).

Contoh 2.6.3 :

Diberikan graf C_6 dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, \dots, e_6\}$ sebagai berikut :



Gambar 11 Pelabelan rata-rata pada graf C_6

Didefinisikan $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ dengan :

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 0 & f(v_2) &= 1 & f(v_3) &= 4 \\ f(v_4) &= 6 & f(v_5) &= 5 & f(v_6) &= 3. \end{aligned}$$

Berdasarkan label titik tersebut dapat dilihat bahwa f bersifat injektif karena setiap anggota domain memiliki pasangan yang berbeda di kodomain. Selanjutnya didefinisikan fungsi $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$ dengan :

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_2) &= \left\lfloor \frac{f(v_1) + f(v_2)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{0+1}{2} \right\rfloor = 1 \\ f^*(v_2 v_3) &= \left\lfloor \frac{f(v_2) + f(v_3)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+4}{2} \right\rfloor = 3 \\ f^*(v_3 v_4) &= \left\lfloor \frac{f(v_3) + f(v_4)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+6}{2} \right\rfloor = 5 \\ f^*(v_4 v_5) &= \left\lfloor \frac{f(v_4) + f(v_5)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6+5}{2} \right\rfloor = 6 \\ f^*(v_5 v_6) &= \left\lfloor \frac{f(v_5) + f(v_6)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5+3}{2} \right\rfloor = 4 \\ f^*(v_6 v_1) &= \left\lfloor \frac{f(v_6) + f(v_1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3+0}{2} \right\rfloor = 2 \end{aligned}$$

Berdasarkan label sisi tersebut dapat dilihat bahwa f^* bijektif karena setiap anggota domain memiliki pasangan yang berbeda di kodomain dan $\text{range } f^* = \text{kodomainnya}$, sehingga f merupakan pelabelan rata – rata. Dengan demikian, disimpulkan bahwa graf C_6 adalah graf rata-rata.

BAB II METODE PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

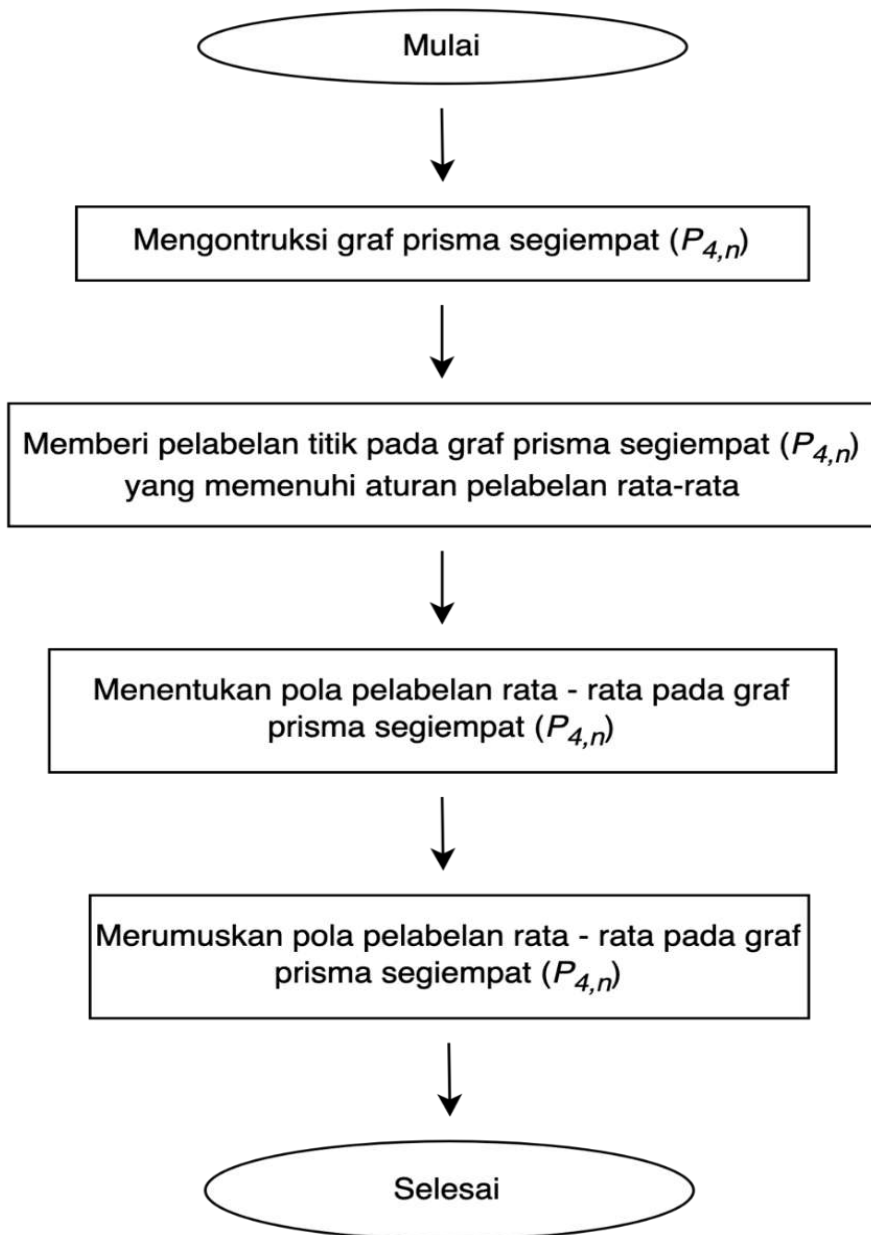
Metode yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah metode penelitian pustaka (*Library Research*) yaitu dengan mengumpulkan bahan penelitian melalui buku, jurnal, media online ataupun hasil penelitian orang lain yang berhubungan dengan tugas akhir ini.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Universitas Hasanuddin tepatnya di Laboratorium Analisis Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin. Waktu penelitian berlangsung sejak 22 Mei 2023.

2.3 Tahapan Penelitian

1. Mengumpulkan bahan penelitian dan mengkaji informasi mengenai pelabelan rata-rata.
2. Menentukan pola pelabelan rata-rata pada graf prisma segiempat, dengan alur seperti berikut:



Gambar 12 Flowchart Langkah – Langkah Penelitian