

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi linier berganda merupakan metode statistika yang digunakan untuk menganalisis hubungan sebab-akibat antara dua atau lebih variabel prediktor dengan satu variabel respon. Metode yang paling umum digunakan untuk menduga parameter regresi adalah *Ordinary Least Squares* (OLS), yang didasarkan pada pemenuhan asumsi klasik berupa normalitas, homoskedastisitas, nonautokorelasi, dan nonmultikolinieritas (Mardiatmoko, 2020). Apabila asumsi klasik terpenuhi, metode OLS akan menghasilkan penduga parameter yang bersifat tak bias dan efisien, sehingga hasil pengujian hipotesis statistik menjadi valid dan dapat diandalkan. Sebaliknya, pelanggaran terhadap asumsi klasik dapat mengakibatkan ketidakakuratan pada nilai galat baku yang dapat meningkatkan risiko kesalahan pengujian hipotesis (Martaningtyas dkk., 2024). Pelanggaran asumsi klasik, khususnya autokorelasi, umumnya berkaitan erat dengan karakteristik data yang digunakan.

Data runtun waktu merupakan salah satu jenis data yang dapat digunakan untuk analisis empiris (Gujarati & Porter, 2009). Namun, data runtun waktu rentan terhadap pelanggaran asumsi nonautokorelasi karena adanya ketergantungan temporal (Greene, 2012). Autokorelasi menyebabkan penduga OLS tidak lagi memiliki variansi minimum, meskipun masih tetap bersifat linier dan tak bias (Budi dkk., 2024). Selain itu, karena OLS tidak memperhitungkan struktur korelasi antargalat, penduga galat baku yang dihasilkan menjadi tidak akurat, sehingga mengakibatkan pengujian hipotesis menjadi tidak valid. Untuk mengatasi autokorelasi, *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS) digunakan sebagai pengembangan dari *Generalized Least Squares*. FGLS diterapkan ketika struktur matriks variansi-kovariansi galat tidak diketahui, sehingga harus diduga terlebih dahulu (Greene, 2012). Prais-Winsten (PW) sebagai salah satu prosedur FGLS menawarkan perbaikan terhadap metode Cochrane-Orcutt (CO) dalam menangani galat dengan pola *Autoregressive* orde satu atau AR(1), terutama pada data dengan jumlah sampel terbatas (Wooldrige, 2013). Keunggulan PW terletak pada kemampuannya untuk mempertahankan observasi pertama melalui transformasi khusus, sehingga ukuran sampel yang digunakan tidak berkurang.

Selain nonautokorelasi, analisis regresi linier berganda yang melibatkan lebih dari satu variabel prediktor juga rentan terhadap pelanggaran asumsi nonmultikolinieritas. Kondisi ketika terdapat korelasi yang tinggi antarvariabel prediktor pada suatu model regresi disebut multikolinieritas. Adanya multikolinieritas mengakibatkan penduga parameter menjadi tidak stabil dan tidak akurat. Penduga parameter menjadi sangat sensitif terhadap perubahan kecil pada data akibat galat baku yang sangat besar. Secara matematis, galat baku yang besar akan menyebabkan nilai statistik uji t mengecil, sehingga variabel prediktor cenderung menjadi tidak signifikan. Akibatnya, sulit untuk membedakan pengaruh dari masing-masing variabel prediktor, sehingga keputusan mengenai signifikansi prediktor menjadi tidak andal (Gujarati & Porter, 2009).

Kibria dan Lukman (2020) memperkenalkan *Kibria-Lukman Regression* (KLR) sebagai penduga berbias dalam kelas *Ridge Regression* (RR) dan *Liu Regression* (LR)

untuk menangani multikolinieritas pada model regresi linier. KLR menggunakan satu parameter bias seperti RR, tetapi dengan struktur penduga yang dimodifikasi agar lebih efektif dalam menangani multikolinieritas. Tujuan KLR adalah menyeimbangkan bias dan variansi penduga parameter regresi. Sebagai pengembangan lebih lanjut, Ugwuowo dkk. (2021) mengusulkan *Jackknife Kibria-Lukman Regression* (JKLR) yang menerapkan prosedur *jackknife* untuk mengurangi bias yang dihasilkan oleh penduga KLR. Selanjutnya, dikembangkan *Modified Jackknife Kibria-Lukman Regression* (MJKLR) sebagai modifikasi lanjutan dari penduga JKLR. Metode MJKLR memodifikasi penduga JKLR dengan substitusi komponen penduga dasar menjadi penduga KLR dengan tujuan untuk meminimumkan *Mean Squared Error* (MSE) dengan cara mereduksi bias secara optimal, sambil tetap mempertahankan stabilitas variansi yang rendah.

Pengembangan metode regresi untuk menangani masalah autokorelasi dan multikolinieritas telah dibahas dalam beberapa penelitian sebelumnya. Park dan Mitchell (1980) menunjukkan bahwa prosedur PW lebih efisien dibandingkan CO dalam menangani autokorelasi, terutama pada data yang memiliki tren. Dalam penerapannya pada data empiris, Parapa (2025) berhasil menangani autokorelasi dan multikolinieritas dengan mengombinasikan RR dengan PW pada data nilai tukar Rupiah terhadap USD. Selanjutnya, Zubair dan Adenomon (2021) membuktikan melalui data simulasi bahwa metode KLR dan PW menghasilkan MSE yang lebih kecil dibanding penduga OLS, PW, CO, *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), *Restricted MLE*, *Ridge-Prais* terutama pada tingkat autokorelasi dan multikolinieritas sedang hingga kuat. Penelitian yang dilakukan oleh Ugwuowo dkk. (2021) menunjukkan bahwa ketika terdapat multikolinieritas pada data, MJKLR menghasilkan MSE yang lebih minimum dibanding OLS, RR, *Jackknife* RR, LR, *Jackknife* LR, dan KLR. Meskipun keunggulan penduga MJKLR dalam mengatasi multikolinieritas telah dibuktikan, integrasi antara penduga MJKLR dengan PW untuk menangani masalah autokorelasi dan multikolinieritas masih sangat terbatas. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengintegrasikan MJKLR dengan PW untuk menangani pelanggaran asumsi nonautokorelasi dan nonmultikolinieritas pada nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat (USD) tahun 2021 hingga 2024.

Setiap negara senantiasa berupaya menjaga stabilitas nilai tukar mata uang negaranya terhadap mata uang asing sebagai indikator untuk memastikan bahwa perekonomian berada dalam keadaan yang baik (Putri dkk., 2017). Nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat tidak hanya mencerminkan kondisi ekonomi Indonesia, tetapi juga merepresentasikan tingkat kepercayaan pasar terhadap stabilitas nasional. Namun, data menunjukkan adanya tekanan terhadap mata uang Indonesia. Berdasarkan Laporan Ekonomi dan Keuangan Mingguan Desember 2024, Rupiah terus mengalami tren depresiasi yang berkelanjutan, hingga menyentuh Rp16.162 per USD pada Desember 2024. Depresiasi Rupiah dapat berdampak bagi banyak hal, mulai dari lonjakan biaya impor hingga perubahan dinamika investasi dan kondisi pasar saham di Indonesia. Depresiasi Rupiah juga memicu efek domino berupa penurunan daya beli masyarakat yang dapat menghambat konsumsi domestik, padahal konsumsi merupakan pendorong utama bagi pertumbuhan ekonomi Indonesia (Cahyadi dkk., 2024). Oleh karena itu, analisis mengenai faktor-faktor yang memengaruhi pergerakan nilai tukar Rupiah menjadi penting untuk dilakukan.

Berdasarkan uraian yang dibahas sebelumnya, penelitian ini akan berfokus pada pemodelan MJKLR dengan koreksi autokorelasi PW pada data nilai tukar Rupiah terhadap USD tahun 2021-2024. Fokus ini didasari oleh karakteristik data runtun waktu pada nilai tukar Rupiah terhadap USD beserta faktor-faktor yang memengaruhinya yang rentan terhadap masalah multikolinieritas serta autokorelasi.

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan yaitu data nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat periode bulanan dari Januari 2021 hingga Desember 2024 dengan enam variabel prediktor yang diduga memengaruhinya.
2. Penentuan parameter bias dilakukan dengan menggunakan pendekatan rata-rata harmonik (*harmonic mean*).
3. Pemilihan model regresi terbaik berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE) penduga, *Root Mean Square Error* (RMSE), dan *Adjusted R²*

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh model nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat tahun 2021-2024 menggunakan metode *Modified Jackknife Kibria-Lukman Regression* (MJKLR) dengan koreksi autokorelasi Prais-Winsten.
2. Memperoleh faktor-faktor yang secara signifikan memengaruhi nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat tahun 2021-2024 berdasarkan model MJKLR dengan koreksi autokorelasi Prais-Winsten.

Berdasarkan tujuan penelitian di atas, maka setelah melakukan penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Meningkatkan wawasan bagi penulis maupun pembaca terkait dengan penerapan metode MJKLR dengan koreksi autokorelasi PW dalam pemodelan data nilai tukar Rupiah yang memiliki masalah autokorelasi dan multikolinieritas.
2. Memberikan informasi mengenai faktor-faktor yang memengaruhi nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat, sehingga dapat digunakan sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya, serta menjadi dasar pertimbangan bagi pembuat kebijakan dalam merumuskan strategi stabilisasi nilai tukar Rupiah.

1.4 Landasan Teori

1.4.1 Analisis Regresi Linier Berganda

Analisis regresi linier berganda merupakan metode statistika yang sering digunakan untuk memodelkan satu variabel respon terhadap beberapa variabel prediktor (Prahutama & Rahmawati, 2024). Menurut Montgomery dkk. (2012), analisis regresi memiliki kegunaan untuk mendeskripsikan data, menduga parameter, melakukan prediksi, serta melakukan pengendalian terhadap variabel respon. Bentuk umum persamaan regresi linier berganda ditulis pada Persamaan (1) (Montgomery dkk., 2012).

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \beta_2 X_{i,2} + \dots + \beta_p X_{i,p} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

dengan

- y_i : variabel respon pada observasi ke- i
 $X_{i,j}$: observasi ke- i pada variabel prediktor ke- j
 β_0 : konstanta parameter regresi (intersep)
 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$: koefisien regresi untuk variabel prediktor ke- j
 ε_i : galat pada observasi ke- i

Persamaan (1) dapat dituliskan dalam notasi matriks seperti pada persamaan (2).

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,p} \\ 1 & X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n,1} & X_{n,2} & \cdots & X_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dengan

- $\mathbf{y}$: vektor variabel respon berukuran $n \times 1$
 $\mathbf{X}$: matriks variabel prediktor berukuran $n \times (p + 1)$
 $\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter berukuran $(p + 1) \times 1$
 $\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor galat berukuran $n \times 1$

1.4.2 Metode *Ordinary Least Squares*

Ordinary Least Squares (OLS) atau metode kuadrat terkecil merupakan metode yang paling umum digunakan untuk menduga parameter regresi. Prinsip dasar metode OLS adalah meminimumkan jumlah kuadrat galat (Makarti & Karim, 2017). Secara matematis, fungsi jumlah kuadrat galat dinyatakan seperti pada Persamaan (3).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\mathbf{y}' - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}')(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (3)$$

Penduga parameter regresi diperoleh dengan melakukan penurunan parsial pertama pada Persamaan (3) terhadap $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dan menyamakan hasilnya dengan nol, hasilnya ditunjukkan pada Persamaan (4).

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}} &= \frac{\partial(\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}} = 0 \\ -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4)$$

Analisis terhadap penduga parameter OLS dapat diuraikan melalui bentuk dekomposisi spektral matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$. Berdasarkan Teorema Spektral, karena matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ merupakan matriks simetris, maka matriks $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ dapat didekomposisi secara ortogonal menjadi komponen nilai eigen dan vektor eigen. Dekomposisi spektral mentransformasi ruang variabel prediktor ke dalam sistem koordinat baru yang saling ortogonal, sehingga permasalahan multikolinieritas dapat dianalisis secara langsung melalui besaran nilai eigen. Pendekatan ini menjadi dasar dalam pengembangan metode regularisasi untuk mengatasi multikolinieritas. Untuk mempermudah analisis, digunakan model regresi tanpa intersep, di mana $\mathbf{X}$ merupakan matriks variabel prediktor berukuran $n \times p$. Penduga OLS yang digunakan dinyatakan pada Persamaan (5).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (5)$$

dengan $\hat{\beta}_{OLS}$ merupakan parameter regresi OLS tanpa intersep.

$X'X$ didekomposisi menjadi matriks ortogonal P dan matriks diagonal Λ . Matriks P berukuran $p \times p$ yang kolom-kolomnya terdiri atas vektor-vektor eigen dari $X'X$, sedangkan Λ merupakan matriks diagonal berukuran $p \times p$ yang berisi nilai-nilai eigen dari $X'X$. Dekomposisi $X'X$ dinyatakan sebagai berikut:

$$X'X = P\Lambda P'$$

Karena P merupakan matriks ortogonal, maka berlaku $P'P = PP' = I$ sehingga:

$$\begin{aligned} P'(X'X)P &= P'(P\Lambda P')P \\ P'(X'X)P &= (P'P)\Lambda(P'P) \\ P'(X'X)P &= \Lambda \end{aligned} \quad (6)$$

Persamaan (6) dapat ditulis seperti pada Persamaan (7).

$$\begin{aligned} P'(X'X)P &= \Lambda \\ P'X'XP &= \Lambda \\ (XP)'XP &= \Lambda \\ Z'Z &= \Lambda \end{aligned} \quad (7)$$

Model regresi pada Persamaan (2) dapat dituliskan dalam bentuk kanonik yang memiliki struktur ortogonal, sebagaimana dinyatakan pada Persamaan (8).

$$\begin{aligned} y &= X\beta_{OLS} + \varepsilon \\ &= (XP)(P'\beta_{OLS}) + \varepsilon \\ &= Z\gamma + \varepsilon \end{aligned} \quad (8)$$

dengan $Z = XP$ dan $\gamma = P'\beta_{OLS}$

Kemudian, parameter γ dapat diduga menggunakan metode OLS pada model transformasi seperti yang ditulis pada Persamaan (9).

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{OLS} &= (Z'Z)^{-1}(Z'y) \\ &= \Lambda^{-1}Z'y \end{aligned} \quad (9)$$

Setelah nilai $\hat{\gamma}_{OLS}$ diperoleh, parameter asli $\hat{\beta}_{OLS}$ dapat diperoleh kembali dengan mensubstitusikan $Z = XP$ ke dalam Persamaan (9).

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{OLS} &= [(XP)'(XP)]^{-1}(XP)'y \\ &= (P'X'XP)^{-1}P'X'y \\ &= (P'X'XP)^{-1}P'X'X\hat{\beta}_{OLS} \\ &= P'(X'X)^{-1}(X'X)\hat{\beta}_{OLS} \\ &= P'\hat{\beta}_{OLS} \end{aligned} \quad (10)$$

Berdasarkan hubungan pada Persamaan (10), maka penduga parameter regresi OLS $\hat{\beta}_{OLS}$ dapat dinyatakan pada Persamaan (11).

$$\hat{\beta}_{OLS} = P\hat{\gamma}_{OLS} \quad (11)$$

Untuk mengetahui sifat penduga $\hat{\gamma}_{OLS}$, dilakukan perhitungan nilai harapan dengan mensubstitusikan Persamaan (8) ke Persamaan (9) seperti berikut:

$$\begin{aligned} E(\hat{\gamma}_{OLS}) &= E(\Lambda^{-1}Z'Y) \\ &= E(\Lambda^{-1}Z'(Z\hat{\gamma}_{OLS} + \varepsilon)) \\ &= E(\Lambda^{-1}\Lambda\hat{\gamma}_{OLS} + \Lambda^{-1}Z'\varepsilon) \\ &= \Lambda^{-1}\Lambda E(\hat{\gamma}_{OLS}) + \Lambda^{-1}Z'E(\varepsilon) \\ &= I\gamma + 0 \\ &= \gamma \end{aligned} \quad (12)$$

Berdasarkan Persamaan (12), terbukti bahwa nilai harapan penduga $\hat{\gamma}_{OLS}$ sama dengan parameter aslinya γ , sehingga $\hat{\gamma}_{OLS}$ bersifat tak bias.

Selanjutnya, variansi $\hat{\gamma}_{OLS}$ dapat diturunkan sebagai berikut dan hasilnya dituliskan pada persamaan (13).

$$\begin{aligned} Var(\hat{\gamma}_{OLS}) &= Var(\Lambda^{-1}Z'\gamma) \\ &= Var(\Lambda^{-1}Z'(Z\gamma + \epsilon)) \\ &= Var(\Lambda^{-1}(Z'Z\gamma + Z'\epsilon)) \\ &= Var(\Lambda^{-1}(\Lambda\gamma + Z'\epsilon)) \\ &= Var(\gamma + \Lambda^{-1}Z'\epsilon) \end{aligned}$$

Karena γ adalah parameter yang nilainya tetap, maka variansinya adalah nol. Dengan menggunakan sifat $Var(A\epsilon) = AVar(\epsilon)A'$ dan $Var(\epsilon) = \sigma^2I$, maka

$$\begin{aligned} Var(\hat{\gamma}_{OLS}) &= Var(\Lambda^{-1}Z'\epsilon) \\ &= \Lambda^{-1}Z'(\sigma^2I)(\Lambda^{-1}Z')' \\ &= \sigma^2\Lambda^{-1}Z'Z\Lambda^{-1} \\ &= \sigma^2\Lambda^{-1}\Lambda\Lambda^{-1} \\ &= \sigma^2\Lambda^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

Ukuran performa penduga sering kali dievaluasi menggunakan *Mean Squared Error* (MSE). Matriks MSE (MSEM) dari penduga $\hat{\gamma}_{OLS}$ didefinisikan sebagai penjumlahan antara matriks variansi dan kuadrat bias. MSE $\hat{\gamma}_{OLS}$ ditunjukkan pada Persamaan (14).

$$\begin{aligned} MSEM(\hat{\gamma}_{OLS}) &= Var(\hat{\gamma}_{OLS}) + bias(\hat{\gamma}_{OLS})bias(\hat{\gamma}_{OLS})' \\ &= \sigma^2\Lambda^{-1} + (0)(0)' \\ &= \sigma^2\Lambda^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

1.4.3 Asumsi Klasik Analisis Regresi

Analisis regresi linier berganda dengan menggunakan metode OLS harus memenuhi asumsi klasik agar penduga parameter yang dihasilkan bersifat tidak bias, konsisten, dan efisien. Adapun uji asumsi klasik yang digunakan dalam penelitian ini meliputi:

a. Uji Normalitas

Uji normalitas dilakukan untuk mengetahui apakah galat data berdistribusi normal. Suatu model regresi dianggap tepat atau layak digunakan apabila galatnya memenuhi asumsi normalitas (Mardiatmoko, 2020). Mishra dkk., (2019) merekomendasikan penggunaan uji Shapiro-Wilk untuk menguji normalitas pada sampel berukuran kecil ($n \leq 50$) karena memiliki kekuatan uji yang tinggi dalam mendeteksi penyimpangan distribusi. Hipotesis uji Shapiro-Wilk adalah sebagai berikut:

$H_0 : \epsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ (galat berdistribusi normal)

$H_1 : \epsilon \not\sim N(\mu, \sigma^2)$ (galat tidak berdistribusi normal)

Statistik uji:

$$W_{hitung} = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i(\epsilon_{n+1-i} - \epsilon_i))^2}{\sum_{i=1}^n (\epsilon_i - \bar{\epsilon})^2} \quad (15)$$

dengan a_i adalah koefisien uji Shapiro-Wilk (Shapiro & Wilk, 1965)

Kriteria pengujian:

Gagal menolak H_0 jika nilai uji $W_{hitu} \geq W_{(\alpha; n)}$ atau $p - value > 0,05$ yang artinya galat berdistribusi normal. Sebaliknya, jika nilai uji $W_{hitun} < W_{(\alpha; n)}$ atau $p - value < 0,05$ maka tolak H_0 yang artinya galat tidak berdistribusi normal.

b. Uji Homoskedastisitas

Homoskedastisitas artinya variansi dari galat bernilai konstan pada setiap tingkat variabel prediktor, yang menunjukkan bahwa sebaran data di sekitar garis regresi bersifat seragam. Model regresi yang baik adalah model yang memiliki variansi galat yang konstan (homoskedastisitas). Uji homoskedastisitas dapat dilakukan dengan menggunakan uji Breusch-Pagan dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$ (variansi galat bersifat konstan atau homoskedastisitas)

$H_1 : \text{Ada } \sigma_i^2 \neq \sigma_{i^*}^2, \text{ untuk } i \neq i^* = 1, 2, \dots, n$ (variansi galat tidak bersifat konstan atau terjadi heteroskedastisitas)

Statistik uji:

$$BP = \frac{1}{2} JKR_{asy} \sim \chi_{\alpha, p}^2 \quad (16)$$

dengan JKR_{asy} merupakan jumlah kuadrat regresi yang diperoleh dari persamaan regresi bantuan (*auxiliary regression*), di mana variabel $p_i = \varepsilon_i^2 / \sigma^2$ diregresikan terhadap variabel-variabel prediktor (Gujarati & Porter, 2009).

Kriteria pengujian:

Jika nilai $BP < \chi_{(\alpha; p)}^2$ atau $p - \text{value} > \alpha(0,05)$ maka gagal menolak H_0 dan disimpulkan bahwa variansi galat bersifat konstan atau homoskedastisitas. Sebaliknya, jika diperoleh $BP \geq \chi_{(\alpha; p)}^2$ atau $p - \text{value} < \alpha(0,05)$ maka tolak H_0 dan disimpulkan bahwa variansi galat tidak bersifat konstan atau terjadi heteroskedastisitas.

c. Uji Autokorelasi

Autokorelasi merupakan kondisi ketika galat dari periode ke- i berkorelasi dengan galat periode lainnya ($i - 1, i - 2, \dots$). Derajat hubungan autokorelasi dapat diukur menggunakan koefisien autokorelasi (ρ) yang berada pada rentang interval $-1 \leq \rho \leq 1$. Model regresi yang baik adalah model yang terbebas dari masalah autokorelasi. Pendeteksian ada tidaknya autokorelasi dapat dilakukan menggunakan uji Durbin-Watson (DW) dengan rumusan hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho = 0$ (tidak terdapat autokorelasi pada galat)

$H_1 : \rho \neq 0$ (terdapat autokorelasi pada galat)

Statistik uji:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2} \quad (17)$$

Kriteria pengujian:

Jika nilai $d_U < DW < 4 - d_U$ atau $p - \text{value} > 0,05$ artinya tidak terdapat autokorelasi. Jika $DW < d_L$ artinya terdapat autokorelasi positif, jika $4 - d_L < DW < 4$ artinya terdapat autokorelasi negatif. Jika nilai $4 - d_U < DW < 4 - d_L$ atau $d_L < DW < d_U$, maka tidak dapat ditarik kesimpulan.

d. Uji Multikolinieritas

Multikolinieritas adalah kondisi ketika terjadi korelasi kuat antara variabel prediktor dalam model regresi. Multikolinieritas mengakibatkan koefisien regresi menjadi tidak stabil (sensitif terhadap perubahan data kecil) dan menyebabkan interpretasi yang keliru terhadap variabel prediktor karena jika galat baku meningkat dapat mengakibatkan nilai statistik uji t menjadi rendah sehingga variabel prediktor tampak tidak signifikan meskipun

sebenarnya berpengaruh. Korelasi antara variabel prediktor dapat dilihat dari nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Nilai VIF akan meningkat ketika terdapat korelasi tinggi antar variabel prediktor. Nilai VIF dapat dihitung dengan Persamaan (18).

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \quad (18)$$

dengan

$$R_j^2 = \frac{JKR}{JKT} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_{ij} - \bar{X}_j)^2}{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2}$$

R_j^2 adalah koefisien determinasi antar variabel prediktor. Jika $VIF \leq 10$, maka tidak terdapat multikolinieritas pada model regresi. Sebaliknya, jika nilai $VIF \geq 10$, maka terdapat multikolinieritas (Mardiatmoko, 2020). Menurut Gujarati & Porter (2009), matriks korelasi juga dapat digunakan sebagai indikator awal multikolinieritas. Nilai korelasi di atas 0,8 menunjukkan adanya multikolinieritas.

1.4.4 Feasible Generalized Least Squares

Generalized Least Squares (GLS) merupakan metode penduga yang diaplikasikan ketika asumsi klasik mengenai variansi galat yang konstan dan saling bebas tidak terpenuhi, yakni ketika elemen diagonal matriks variansi-kovariansi tidak seragam atau elemen nondiagonalnya tidak bernilai nol. GLS mentransformasi model agar galat memenuhi asumsi homoskedastisitas dan nonautokorelasi, sehingga penduga yang diperoleh menjadi efisien. Metode GLS pada dasarnya merupakan penerapan metode OLS pada data yang telah melalui proses transformasi. GLS digunakan ketika nilai koefisien autokorelasi (ρ) diketahui. Namun dalam praktiknya, nilai ρ jarang tersedia secara langsung, sehingga *Feasible Generalized Least Squares* (FGLS) digunakan untuk menduga nilai ρ berdasarkan galat OLS (Nakale dkk., 2013). Oleh karena itu, metode FGLS biasa juga disebut dengan *Estimated GLS* (EGLS).

Metode FGLS merupakan metode pendugaan dua tahap (*two-step method*). Tahap pertama ialah menduga nilai ρ , sedangkan pada tahap kedua adalah melakukan transformasi pada variabel-variabel regresi menggunakan nilai $\hat{\rho}$ tersebut (Gujarati & Porter, 2009). Dalam kasus autokorelasi, struktur variansi-kovariansi galat bergantung pada nilai ρ . Oleh karena itu, dibentuk suatu matriks transformasi $\hat{G}$ berukuran $(n \times n)$ yang elemen-elemennya dibentuk berdasarkan nilai $\hat{\rho}$. Transformasi model dilakukan dengan mengalikan matriks G ke dalam persamaan regresi awal pada Persamaan (2), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\hat{G}y = \hat{G}X\beta + \hat{G}\epsilon$$

atau dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana pada Persamaan (19).

$$y^* = X^*\beta + u \quad (19)$$

dengan $y^* = \hat{G}y$, $X^* = \hat{G}X$, dan $u = \hat{G}\epsilon$

Tujuan utama penerapan matriks transformasi $\hat{G}$ adalah untuk menghasilkan galat baru (u) yang memenuhi asumsi klasik Gauss-Markov. Dalam notasi matriks, kondisi ini mensyaratkan nilai harapan nol, variansi yang konstan, serta nonautokorelasi, yang ditulis sebagai $E(u) = 0$ dan $Var(u) = \sigma^2 I$. Karena model hasil transformasi telah memenuhi asumsi klasik, maka parameter dapat diduga menggunakan OLS pada model transformasi tersebut, menggunakan Persamaan (20).

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{FGLS} &= (X' \hat{G} \hat{G} X^*)^{-1} X' \hat{G} \hat{G} y \\ \hat{\beta}_{FGLS} &= (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} y^*\end{aligned}\quad (20)$$

1.4.5 Pola Autokorelasi

Analisis pola autokorelasi pada data runtun waktu dapat dilakukan melalui visualisasi plot *Autocorrelation Function* (ACF) dan *Partial Autocorrelation Function* (PACF). Fungsi ACF merepresentasikan koefisien korelasi total antara observasi pada periode ke- i dengan observasi pada periode ke- i atau *lag* k . Sementara PACF mengukur korelasi murni antara kedua observasi tersebut setelah mengeliminasi pengaruh linier dari observasi pada *lag* perantara. Penentuan orde p dan q didasarkan pada pola plot ACF dan PACF (Wei, W.W.S., 2006), sebagaimana dijelaskan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Identifikasi Pola Autokorelasi Berdasarkan Plot ACF dan PACF

Model	ACF	PACF
AR(p)	Menurun secara eksponensial atau sinusoidal	Cut off setelah <i>lag</i> ke- p
MA(q)	Cut off setelah <i>lag</i> ke- q	Menurun secara eksponensial atau sinusoidal
ARMA(p, q)	Menurun secara cepat setelah <i>lag</i> ($q-p$)	Menurun secara cepat setelah <i>lag</i> ($q-p$)

1.4.6 Prais-Winsten

Metode Prais-Winsten (PW) diperkenalkan oleh Sigbert John Prais dan Christopher Blake Winsten pada tahun 1954 sebagai salah satu variasi metode FGLS untuk mengatasi masalah autokorelasi pada galat (Gujarati & Porter, 2009). Secara spesifik, galat dalam model PW diasumsikan mengikuti pola *Autoregressive* orde satu atau AR(1) yang artinya galat pada periode saat ini (ε_i) dipengaruhi oleh galat pada satu periode sebelumnya (ε_{i-1}). Metode PW melibatkan pendugaan koefisien autokorelasi galat ($\hat{\rho}$), dan kemudian menggunakan nilai $\hat{\rho}$ untuk mentransformasi data sehingga autokorelasi dihilangkan ketika model regresi diterapkan pada data yang telah ditransformasi (Bottomley dkk., 2023). Keunggulan utama prosedur PW dibanding CO adalah kemampuannya untuk mempertahankan observasi pertama melalui transformasi khusus, sehingga jumlah observasi sampel tetap utuh.

Metode PW mengasumsikan galat model mengikuti proses AR(1) yang ditunjukkan pada Persamaan (21).

$$\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + u_i \quad (21)$$

dengan

ρ : koefisien autokorelasi galat; $|\rho| < 1$

u_i : galat acak; $u_i \sim IID(0, \sigma^2)$

Keberadaan struktur AR(1) pada Persamaan (21) mengindikasikan pelanggaran asumsi nonautokorelasi. Untuk memulihkan efisiensi penduga, dilakukan transformasi linier terhadap komponen galat agar memiliki sifat *white noise* (u_i). Proses transformasi ini diawali dengan membentuk model regresi pada periode sebelumnya ($i - 1$) dengan mensubstitusikan *lag* waktu ke dalam Persamaan (1), diperoleh Persamaan (22).

$$y_{i-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{i-1,1} + \dots + \beta_p X_{i-1,p} + \varepsilon_{i-1} \quad (22)$$

Selanjutnya, Persamaan (22) dikalikan dengan koefisien autokorelasi $\hat{\rho}$, lalu hasilnya dikurangkan dari Persamaan (1) untuk menghasilkan persamaan *generalized difference* untuk observasi ke- i (dengan $i = 2, 3, \dots, n$). Proses ini menghasilkan persamaan berikut:

$$y_i - \hat{\rho}y_{i-1} = \beta_0 - \hat{\rho}\beta_0 + \beta_1(X_i - \hat{\rho}X_{i-1,1}) + \dots + \beta_p(X_i - \hat{\rho}X_{i-1,p}) + (\varepsilon_i - \hat{\rho}\varepsilon_{i-1})$$

$$y_i - \hat{\rho}y_{i-1} = (1 - \hat{\rho})\beta_0 + \beta_1(X_i - \hat{\rho}X_{i-1,1}) + \dots + \beta_p(X_i - \hat{\rho}X_{i-1,p}) + (\varepsilon_i - \hat{\rho}\varepsilon_{i-1})$$

Karena $\varepsilon_i - \hat{\rho}\varepsilon_{i-1} = u_i$, maka komponen galat telah memenuhi asumsi *white noise* (bebas dari autokorelasi). Persamaan hasil transformasi atau *generalized difference* untuk observasi ke-2 hingga ke- n ($i = 2, 3, \dots, n$) dapat disederhanakan penulisannya seperti pada Persamaan (23):

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{i,1}^* + \dots + \beta_p X_{i,p}^* + u_i \quad (23)$$

dengan $y_i^* = y_i - \hat{\rho}y_{i-1}$; $X_{i,j}^* = X_{i,j} - \hat{\rho}X_{i-1,j}$; dan $\beta_0^* = \beta_0(1 - \hat{\rho})$

Prosedur transformasi menggunakan persamaan *generalized difference* pada Persamaan (23) mengakibatkan hilangnya satu observasi pertama ($i = 1$) karena tidak tersedianya data pada periode $i = 0$. Untuk mengatasi hal tersebut, metode PW mempertahankan observasi pertama dengan melakukan transformasi khusus guna menyamakan variansi galatnya dengan variansi u_i . Diketahui variansi dari galat ε_i adalah sebagai berikut:

$$Var(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2} \quad (24)$$

Agar variansi pada observasi pertama ($Var(\varepsilon_1)$) setara dengan $Var(u_i) = \sigma_u^2$, maka Persamaan (1) untuk $i = 1$ dikalikan dengan faktor pembobot $\sqrt{1 - \rho^2}$. Transformasi untuk observasi pertama adalah sebagai berikut:

$$\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}y_1 = \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}\beta_0 + \beta_1(\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}X_{1,1}) + \dots + \beta_p(\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}X_{1,p}) + \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}\varepsilon_1$$

Sehingga, transformasi PW untuk observasi pertama dituliskan pada Persamaan (25)

$$y_1^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{1,1}^* + \dots + \beta_p X_{1,p}^* + u_1 \quad (25)$$

dengan $y_1^* = \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}y_1$ dan $X_{1,j}^* = \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}X_{1,j}$

Dengan demikian, seluruh prosedur transformasi PW, baik untuk observasi pertama maupun observasi selanjutnya dapat diringkas dalam notasi matriks. Struktur matriks transformasi G yang diperlukan untuk menduga parameter regresi pada Persamaan (20) dapat ditulis seperti pada Persamaan (26)

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{(1 - \hat{\rho}^2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{\rho} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\rho} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\hat{\rho} & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Berdasarkan penjelasan transformasi di atas, prosedur pendugaan parameter regresi menggunakan metode Prais-Winsten dapat ditulis sebagai berikut:

Langkah 1. Melakukan analisis regresi menggunakan metode OLS pada Persamaan (1) untuk memperoleh nilai penduga galat ($\hat{\varepsilon}_i$).

Langkah 2. Menduga nilai koefisien korelasi ($\hat{\rho}$) awal dengan meregresikan $\hat{\varepsilon}_i$ yang diperoleh dari Langkah 1 terhadap $\hat{\varepsilon}_{i-1}$ menggunakan Persamaan (27).

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_{i-1}}{\sum_{i=2}^n \hat{\varepsilon}_{i-1}^2} = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} \hat{\varepsilon}_i^2} \quad (27)$$

Langkah 3. Melakukan transformasi PW pada variabel prediktor dan respon menggunakan nilai $\hat{\rho}$ yang telah diperoleh dari Langkah 2. Dalam notasi matriks, transformasi ini dilakukan dengan mengalikan matriks transformasi G terhadap data asli. Perkalian matriks transformasi setara dengan melakukan perhitungan menggunakan Persamaan (28) dan (29).

a. Transformasi untuk data observasi pertama ($i = 1$) menggunakan Persamaan (28)

$$\begin{aligned} y_1^* &= y_1 \left(\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} \right) \\ X_{1,j}^* &= X_{1,j} \left(\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

b. Transformasi untuk observasi lainnya ($i = 2, 3, \dots, n$) menggunakan Persamaan (29)

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i - \hat{\rho} y_{i-1} \\ X_{i,j}^* &= X_{i,j} - \hat{\rho} X_{i-1,j} \end{aligned} \quad (29)$$

Langkah 4. Meregresikan kembali variabel yang telah ditransformasi (y^* terhadap X^*) menggunakan metode OLS untuk memperoleh penduga β^* sementara.

$$y_i^* = \beta_0^* + \sum_{j=1}^p \beta_j^* X_{i,j}^* + u_i \quad (30)$$

Langkah 5. Menghitung kembali nilai galat pada data skala asli ($\hat{\varepsilon}_i$) dengan menggunakan nilai duga koefisien $\hat{\beta}^*$ yang diperoleh dari Langkah 4, kemudian kembali ke Langkah 2 untuk memperbarui nilai $\hat{\rho}$. Proses ini dilakukan secara berulang (iteratif) hingga diperoleh nilai $\hat{\rho}$ yang stabil atau konvergen.

Langkah 6. Setelah diperoleh nilai $\hat{\rho}$ yang konvergen, selanjutnya melakukan transformasi final terhadap data asli menggunakan Persamaan (28) dan Persamaan (29) untuk memperoleh $X_{i,j}^*$ dan y_i^* final.

Langkah 7. Meregresikan y_i^* terhadap $X_{i,j}^*$ untuk memperoleh penduga parameter transformasi. Koefisien regresi model asli diperoleh secara langsung dari hasil pendugaan regresi transformasi ($\beta_j = \beta_j^*$). Sedangkan untuk intersep, apabila kolom konstanta tidak disertakan secara eksplisit dalam matriks transformasi prediktor, maka transformasi balik nilai intersep (β_0) dilakukan dengan menggunakan Persamaan (31).

$$\beta_0 = \frac{\beta_0^*}{(1 - \hat{\rho})} \quad (31)$$

1.4.7 Pemusatan dan Penskalaan

Pemusatan dan penskalaan merupakan bagian dari standardisasi atau pembakuan variabel. Pemusatan merupakan proses mengurangi setiap nilai variabel dengan rata-ratanya, sehingga rata-rata yang baru akan menjadi nol. Sedangkan penskalaan merupakan proses membagi nilai variabel dengan simpangan bakunya. Pemusatan dan penskalaan bertujuan untuk memudahkan dalam analisis data yang memiliki satuan yang berbeda. Standardisasi ini dirumuskan pada Persamaan (32) (Kutner dkk., 2005).

$$X_{i,j}^* = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{X_{i,j} - \bar{X}_j}{s_{X_j}} \right) \text{ dan } y_i^* = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) \quad (32)$$

dengan

$$s_{X_j} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{i,j} - \bar{X}_j)^2} \text{ dan } s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Keterangan:

$X_{i,j}^*$: nilai hasil standardisasi observasi ke- i pada variabel prediktor ke- j

y_i^* : nilai hasil standardisasi observasi ke- i pada variabel respon

S_y : nilai simpangan baku dari variabel respon

S_{X_j} : nilai simpangan baku dari variabel prediktor ke- j

Data yang telah distandardisasi akan digunakan untuk menghitung koefisien regresi sehingga diperoleh model regresi baku sebagai berikut:

$$y_i^* = \beta_1^* X_{i,1}^* + \beta_2^* X_{i,2}^* + \dots + \beta_p^* X_{i,p}^* + \varepsilon_i^* \quad (33)$$

Koefisien regresi yang diperoleh dari data terstandarisasi perlu dilakukan transformasi balik (unstandardisasi) untuk memperoleh nilai intersep dan koefisien regresi pada skala data asli (Kutner dkk., 2005). Intersep dan koefisien regresi dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (34).

$$\hat{\beta}_j = \left(\frac{S_y}{S_{X_j}} \right) \hat{\beta}_j^* \text{ dan } \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \bar{X}_j \quad (34)$$

1.4.8 Kibria-Lukman Regression

Kibria dan Lukman (2020) mengusulkan sebuah penduga parameter regresi yaitu *Kibria-Lukman Regression* (KLR). Penduga KLR bertujuan untuk mengatasi masalah multikolinieritas dengan cara menyeimbangkan bias dan variansi (Syafni, 2024). Secara konstruksi, KLR dibentuk dengan mengombinasikan karakteristik dari *Ridge Regression* (RR) dan *Liu Regression* (LR). Penduga KLR menggunakan parameter bias k (dengan $k > 0$) seperti pada RR untuk mereduksi tingginya variansi akibat multikolinieritas.

Pendugaan parameter $\hat{\gamma}_{KL}$ dilakukan dengan meminimumkan fungsi tujuan F pada Persamaan (35) yang disertai fungsi kendala, dan proses optimasinya dapat diselesaikan menggunakan metode pengganda *Lagrange*.

$$\begin{aligned} F &= \varepsilon' \varepsilon \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma})'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}) \end{aligned} \quad (35)$$

dengan fungsi kendala sebagai berikut:

$$(\boldsymbol{\gamma} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS})'(\boldsymbol{\gamma} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}) - c = 0$$

Sehingga, diperoleh persamaan (36)

$$\begin{aligned} F &= (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma})'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}) + k[(\boldsymbol{\gamma} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS})'(\boldsymbol{\gamma} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}) - c] \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + k[\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}'\boldsymbol{\gamma} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} - c] \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + k[\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma} + 2\boldsymbol{\gamma}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} - c] \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + k\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma} + 2k\boldsymbol{\gamma}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} + k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} - kc \end{aligned} \quad (36)$$

dengan c merupakan konstanta positif.

Selanjutnya, fungsi F diminimumkan dengan menurunkan Persamaan (36) secara parsial terhadap $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ dan menyamakan hasil turunannya dengan nol, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \Big|_{\boldsymbol{\gamma}=\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{KL}} &= 0 \\ -2\mathbf{Z}'\mathbf{y} + 2\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{KL} + 2k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{KL} + 2k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} &= 0 \\ 2\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{KL} + 2k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{KL} &= 2\mathbf{Z}'\mathbf{y} - 2k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} \\ (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{KL} &= \mathbf{Z}'\mathbf{y} - k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{KL} &= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - k\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - k((\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y})) \\
&= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{I} - k(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}]\mathbf{Z}'\mathbf{y} \\
&= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{I} - k(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}][(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})\hat{\mathbf{y}}_{OLS}] \\
&= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} - k\mathbf{I})\hat{\mathbf{y}}_{OLS} \\
\hat{\mathbf{y}}_{KL} &= (\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - k\mathbf{I})\hat{\mathbf{y}}_{OLS} \tag{37}
\end{aligned}$$

dengan k merupakan nilai parameter bias nonnegatif yang berfungsi mengontrol tingkat penyusutan. Komponen $(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}$ pada Persamaan (37) memiliki peran yang serupa dengan RR, yaitu menstabilkan proses inversi melalui penambahan konstanta k pada setiap nilai eigen λ_j . Modifikasi ini mencegah terjadinya pembagian dengan nilai eigen yang sangat kecil akibat multikolinieritas, sehingga variansi penduga menjadi lebih terkendali. Sementara komponen $(\mathbf{A} - k\mathbf{I})$ merupakan modifikasi pada pembilang yang menggunakan mekanisme pengurangan parameter bias k untuk memberikan efek penyusutan ganda pada koefisien regresi. Kombinasi antara modifikasi pada penyebut dan pembilang tersebut memungkinkan KLR mencapai keseimbangan bias dan variansi yang lebih baik pada kondisi tertentu. Apabila parameter bias k dipilih secara tepat, penduga KLR berpotensi menghasilkan nilai MSE yang lebih optimal.

Persamaan (37) selanjutnya dapat ditulis seperti pada Persamaan (38).

$$\hat{\mathbf{y}}_{KL} = [\mathbf{I} - 2k(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\mathbf{y}}_{OLS} \tag{38}$$

Berdasarkan hubungan transformasi ortogonal, penduga parameter KLR dalam variabel asli $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{KL}$ dapat dinyatakan seperti pada Persamaan (39).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{KL} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{y}}_{KL} \tag{39}$$

Untuk mengevaluasi sifat ketakbiasan penduga KLR, perlu dihitung nilai harapan dari $\hat{\mathbf{y}}_{KL}$ dengan menggunakan Persamaan (40).

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) &= (\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - k\mathbf{I})E(\hat{\mathbf{y}}_{OLS}) \\
&= (\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - k\mathbf{I})\boldsymbol{\gamma}
\end{aligned}$$

Misalkan $\mathbf{W}(k) = (\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}$ dan $\mathbf{M}(k) = (\mathbf{A} - k\mathbf{I})$, maka $E(\hat{\mathbf{y}}_{KL})$ ditulis seperti berikut:

$$E(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) = \mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k)\boldsymbol{\gamma} \tag{40}$$

Karena $E(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) \neq \boldsymbol{\gamma}$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\hat{\mathbf{y}}_{KL}$ merupakan penduga bias. Besarnya bias tersebut didefinisikan sebagai selisih antara nilai harapan penduga dengan parameter aslinya, seperti ditunjukkan pada Persamaan (41)

$$\begin{aligned}
bias(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) &= E(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) - \boldsymbol{\gamma} \\
&= [\mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k) - \mathbf{I}]\boldsymbol{\gamma}
\end{aligned} \tag{41}$$

Selanjutnya, matriks variansi-kovariansi dari penduga $\hat{\mathbf{y}}_{KL}$ dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (42).

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) &= E[(\hat{\mathbf{y}}_{KL} - E(\hat{\mathbf{y}}_{KL}))(\hat{\mathbf{y}}_{KL} - E(\hat{\mathbf{y}}_{KL}))'] \\
&= \mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k)E[(\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\gamma})(\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\gamma})']\mathbf{M}'(k)\mathbf{W}'(k) \\
&= \mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k)Var(\hat{\mathbf{y}})\mathbf{M}'(k)\mathbf{W}'(k) \\
&= \mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k)(\sigma^2\mathbf{A}^{-1})\mathbf{M}'(k)\mathbf{W}'(k) \\
&= \sigma^2\mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}'(k)\mathbf{W}'(k)
\end{aligned} \tag{42}$$

Kriteria kebaikan model dievaluasi menggunakan *Mean Squared Error* (MSE), yang merupakan penjumlahan dari diagonal matriks variansi dan kuadrat bias. Matriks MSE untuk penduga $\hat{\mathbf{y}}_{KL}$ dinyatakan pada Persamaan (43).

$$\begin{aligned}
MSEM(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) &= Var(\hat{\mathbf{y}}_{KL}) + bias(\hat{\mathbf{y}}_{KL})bias(\hat{\mathbf{y}}_{KL})' \\
&= \sigma^2\mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}'(k)\mathbf{W}'(k) + (\mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k) - \mathbf{I})\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{W}(k)\mathbf{M}(k) - \mathbf{I})'
\end{aligned} \tag{43}$$

1.4.9 Modified Jackknife Kibria-Lukman Regression

Prosedur *Jackknife* pertama kali diperkenalkan oleh Quenouille sebagai metode *resampling* untuk mereduksi bias penduga parameter. Prinsip dasar metode *Jackknife* adalah membentuk subsampel baru dengan menghapus satu observasi dari data asli secara bergantian. Dalam analisis regresi linier, prosedur *jackknife* dilakukan dengan menghilangkan observasi ke- i sehingga terbentuk n buah sampel *jackknife* berukuran $n - 1$ (Iskandar dkk., 2013). Keunggulan teknik *jackknife* terletak pada kemampuannya untuk mengurangi bias pada penduga parameter, dimana hasil pendugaan akan semakin konsisten seiring bertambahnya ukuran sampel (Millenia, 2021). Meskipun penduga KLR mampu mengatasi masalah multikolinieritas, namun penduga KLR masih memiliki bias yang relatif besar (Oranye dkk., 2025). Oleh karena itu, penerapan teknik *Jackknife* pada penduga KLR diharapkan mampu mereduksi bias sekaligus menurunkan nilai MSE penduga (Ugwuowo dkk., 2021). Pengembangan penduga *Jackknife Kibria-Lukman Regression* (JKLR) bertujuan untuk mereduksi bias yang dihasilkan oleh penduga KLR standar, sehingga menghasilkan penduga parameter yang lebih stabil dan presisi. Penerapan teknik *jackknife* pada penduga KLR dalam bentuk kanonik ($\hat{y}_{KL}$) pada Persamaan (37) jika observasi ke- i dikurangi dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{KL(-i)} &= (\mathbf{A}_{(-i)} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}_{(-i)} - k\mathbf{I})\hat{y}_{OLS(-i)} \\ &= (\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{Z}_{(-i)} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{Z}_{(-i)} - k\mathbf{I})\hat{y}_{OLS(-i)} \\ &= (\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{Z}_{(-i)} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{Z}_{(-i)}\hat{y}_{OLS(-i)} - k\hat{y}_{OLS(-i)}) \\ &= (\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{Z}_{(-i)} + k\mathbf{I})^{-1}\left(\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{y}_{(-i)} - k(\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{Z}_{(-i)})^{-1}(\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{y}_{(-i)})\right)\end{aligned}\quad (44)$$

dengan $\mathbf{Z}_{(-i)}$ adalah matriks $\mathbf{Z}$ tanpa observasi baris ke- i dan $\mathbf{y}_{(-i)}$ adalah vektor $\mathbf{y}$ tanpa observasi baris ke- i .

Misalkan $\mathbf{z}_i$ didefinisikan sebagai vektor kolom berukuran $(p \times 1)$ yang berisi observasi ke- i dari matriks $\mathbf{Z}$, sedangkan y_i merupakan observasi ke- i dari vektor $\mathbf{y}$. Maka berlaku $\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{Z}_{(-i)} = \mathbf{A}_{(-i)} = \mathbf{Z}'\mathbf{Z} - \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$ dan $\mathbf{Z}'_{(-i)}\mathbf{y}_{(-i)} = \mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i$, sehingga Persamaan (44) dapat ditulis seperti pada Persamaan (45).

$$\begin{aligned}\hat{y}_{KL(-i)} &= (\mathbf{A}_{(-i)} + k\mathbf{I})^{-1}\left[(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i) - k(\mathbf{A}_{(-i)})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i)\right] \\ &= (\mathbf{A}_{(-i)} + k\mathbf{I})^{-1}\left(\mathbf{I} - k(\mathbf{A}_{(-i)})^{-1}\right)(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i) \\ &= (\mathbf{A}_{(-i)} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}_{(-i)} - k\mathbf{I})(\mathbf{A}_{(-i)})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i)\end{aligned}\quad (45)$$

Misalkan, $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - k\mathbf{I})(\mathbf{A})^{-1}$, maka Persamaan (45) dapat ditulis seperti pada Persamaan (46).

$$\begin{aligned}\hat{y}_{KL(-i)} &= \mathbf{A}_{(-i)}^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i')^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i)\end{aligned}\quad (46)$$

Selanjutnya, menggunakan invers jumlahan matriks yang diperkenalkan oleh Miller (1981) pada Persamaan (47).

$$(\mathbf{A} - \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i')^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'\mathbf{A}^{-1}}{1 - \mathbf{z}_i'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}_i}\quad (47)$$

Maka, Persamaan (46) ditulis seperti pada Persamaan (48).

$$\hat{y}_{KL(-i)} = \left(\mathbf{A}^{-1} + \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'\mathbf{A}^{-1}}{1 - \mathbf{z}_i'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}_i}\right)(\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{z}_iy_i)$$

$$\begin{aligned}
&= A^{-1}Z'y - A^{-1}z_i y_i + \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1}}{1 - z_i' A^{-1} z_i} (Z'y) - \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1}}{1 - z_i' A^{-1} z_i} (z_i y_i) \\
&= \hat{Y}_{KL} - \frac{A^{-1}z_i y_i (1 - z_i' A^{-1} z_i)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} + \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (Z'y)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} - \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (z_i y_i)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} \\
&= \hat{Y}_{KL} - \left(\frac{A^{-1}z_i y_i - A^{-1}z_i y_i z_i' A^{-1} z_i}{1 - z_i' A^{-1} z_i} \right) + \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (Z'y)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} - \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (z_i y_i)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} \\
&= \hat{Y}_{KL} - \frac{A^{-1}z_i y_i}{1 - z_i' A^{-1} z_i} + \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} z_i y_i}{1 - z_i' A^{-1} z_i} + \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (Z'y)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} - \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (z_i y_i)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} \\
&= \hat{Y}_{KL} - \frac{A^{-1}z_i y_i}{1 - z_i' A^{-1} z_i} + \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (Z'y)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} \\
&= \hat{Y}_{KL} - \left(\frac{A^{-1}z_i y_i}{1 - z_i' A^{-1} z_i} - \frac{A^{-1}z_i z_i' A^{-1} (Z'y)}{1 - z_i' A^{-1} z_i} \right) \\
&= \hat{Y}_{KL} - \left(\frac{A^{-1}z_i (y_i - z_i' \hat{Y}_{KL})}{1 - z_i' A^{-1} z_i} \right) \tag{48}
\end{aligned}$$

Misalkan $\hat{\varepsilon}_i = y_i - z_i' \hat{Y}_{KL}$ dan $w_i = z_i' A^{-1} z_i$, maka Persamaan (48) dapat disederhanakan seperti pada Persamaan (49).

$$\hat{Y}_{KL(-i)} = \hat{Y}_{KL} - \left(\frac{A^{-1}z_i \hat{\varepsilon}_i}{1 - w_i} \right) \tag{49}$$

Hinkley (1977) mendefinisikan *weighted pseudo-value* seperti pada Persamaan (50).

$$Q_i = \hat{Y}_{KL} + n(1 - w_i)(\hat{Y}_{KL} - \hat{Y}_{KL(-i)}) \tag{50}$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (49) ke Persamaan (50), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
Q_i &= \hat{Y}_{KL} + n(1 - w_i) \left(\hat{Y}_{KL} - \left(\hat{Y}_{KL} - \left(\frac{A^{-1}z_i \hat{\varepsilon}_i}{1 - w_i} \right) \right) \right) \\
&= \hat{Y}_{KL} + n(1 - w_i) \left(\frac{A^{-1}z_i \hat{\varepsilon}_i}{1 - w_i} \right) \\
&= \hat{Y}_{KL} + nA^{-1}z_i \hat{\varepsilon}_i \tag{51}
\end{aligned}$$

Pendugaan parameter menggunakan teknik *jackknife* dilakukan dengan mengambil rata-rata dari *weighted pseudo-values*. Dengan demikian, melalui Persamaan (51) diperoleh penduga parameter JKLR sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{JKL} &= \bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_{KL} + nA^{-1}z_i \hat{\varepsilon}_i) \\
&= \hat{Y}_{KL} + A^{-1} \sum_{i=1}^n z_i \hat{\varepsilon}_i \\
&= \hat{Y}_{KL} + A^{-1} \sum_{i=1}^n z_i (y_i - z_i' \hat{Y}_{KL}) \\
&= \hat{Y}_{KL} + A^{-1} (\sum_{i=1}^n z_i y_i - \sum_{i=1}^n z_i z_i' \hat{Y}_{KL}) \\
&= \hat{Y}_{KL} + A^{-1} Z'Y - A^{-1} Z'Z \hat{Y}_{KL} \\
&= \hat{Y}_{KL} + \hat{Y}_{KL} - A^{-1} Z'Z \hat{Y}_{KL} \\
&= \hat{Y}_{KL} + (I - A^{-1}Z'Z) \hat{Y}_{KL} \\
&= \hat{Y}_{KL} + (I - (A + kI)^{-1} (A - kI) A^{-1} A) \hat{Y}_{KL} \\
&= \hat{Y}_{KL} + (I - (A + kI)^{-1} (A - kI)) \hat{Y}_{KL} \\
&= \hat{Y}_{KL} + ((A + kI)^{-1} (A + kI) - (A + kI)^{-1} (A - kI)) \hat{Y}_{KL} \\
&= \hat{Y}_{KL} + ((A + kI)^{-1} ((A + kI) - (A - kI))) \hat{Y}_{KL} \\
&= \hat{Y}_{KL} + ((A + kI)^{-1} 2kI) \hat{Y}_{KL}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{\mathbf{Y}}_{KL} + (2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})\hat{\mathbf{Y}}_{KL} \\
&= [\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\mathbf{Y}}_{KL} \\
&= [\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}][\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\mathbf{Y}}_{OLS} \\
&= [\mathbf{I} - (2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})^2]\hat{\mathbf{Y}}_{OLS}
\end{aligned} \tag{52}$$

Mengacu pada pendekatan Duran & Akdeniz (2012), Persamaan (52) dapat dimodifikasi lebih lanjut untuk membentuk penduga yang disebut *Modified Jackknife Kibria-Lukman Regression* (Ugwuowo dkk., 2021). Modifikasi ini dilakukan dengan mengganti $\hat{\mathbf{Y}}_{OLS}$ pada Persamaan (52) dengan $\hat{\mathbf{Y}}_{KL}$. Metode *Modified Jackknife Kibria-Lukman Regression* (MJKL) bertujuan untuk meminimumkan MSE dengan cara mereduksi bias secara optimal sembari mempertahankan variansi yang rendah.

Melalui substitusi Persamaan (38) ke dalam Persamaan (52), penduga parameter MJKL dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL} &= [\mathbf{I} - (2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})^2]\hat{\mathbf{Y}}_{KL} \\
&= [\mathbf{I} - (2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})^2][\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\mathbf{Y}}_{OLS} \\
&= [(\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})(\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})][\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\mathbf{Y}}_{OLS} \\
&= [\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\mathbf{Y}}_{OLS}
\end{aligned} \tag{53}$$

Penduga parameter pada model kanonik, yakni $\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}$ dapat ditransformasikan kembali menjadi penduga parameter regresi awal $\hat{\mathbf{\beta}}_{MJKL}$ melalui perkalian dengan matriks ortogonal $\mathbf{P}$, sebagaimana dirumuskan pada Persamaan (54).

$$\hat{\mathbf{\beta}}_{MJKL} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL} \tag{54}$$

Untuk mengevaluasi ketepatan penduga, perlu ditinjau sifat bias dan variansinya. Nilai harapan dari penduga $\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) &= E([\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\mathbf{Y}}_{OLS}) \\
&= [\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}] E(\hat{\mathbf{Y}}_{OLS}) \\
&= [\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}] \hat{\mathbf{Y}}
\end{aligned} \tag{55}$$

Selanjutnya, bias dari penduga $\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
bias(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) &= E(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) - \hat{\mathbf{Y}} \\
&= ([\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}] \hat{\mathbf{Y}}) - \hat{\mathbf{Y}} \\
&= ([\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}] - \mathbf{I})\hat{\mathbf{Y}}
\end{aligned} \tag{56}$$

Persamaan (56) menunjukkan bahwa $bias(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) \neq 0$, yang mengindikasikan bahwa penduga MJKL juga penduga yang bias, sama halnya dengan KLR. Selanjutnya, analisis dilakukan terhadap variansi penduga $\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) &= E[(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL} - E(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}))(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL} - E(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}))'] \\
&= \sigma^2 \left[[(\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]]\mathbf{A}^{-1}[(\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})^2[\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]]' \right]
\end{aligned}$$

Misalkan $\mathbf{C} = 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}$, maka $Var(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL})$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) &= \sigma^2 [(\mathbf{I} - \mathbf{C})^2(\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{A}^{-1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})^2(\mathbf{I} + \mathbf{C})]'] \\
&= \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{C})^2[(\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{C})](\mathbf{I} - \mathbf{C})^2 \\
&= \sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{C})^2(\mathbf{1} + \mathbf{C})^2\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^2 \\
&= \sigma^2 [(\mathbf{I} - \mathbf{C})^2]^2\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^2 \\
&= \sigma^2 [\mathbf{I} - (2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})^2]^2\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2
\end{aligned} \tag{57}$$

Matriks *Mean Square Error Matriks* (MSEM) dari penduga $\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} MSEM(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) &= Var(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL}) + bias(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL})bias(\hat{\mathbf{Y}}_{MJKL})' \\ &= \sigma^2[\mathbf{I} - (2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1})^2]\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2 + [[\mathbf{I} - \\ &\quad 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}]^2(\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}) - \mathbf{I}]\mathbf{Y}_{OLS}\mathbf{Y}_{OLS}'[[\mathbf{I} - 2k(\mathbf{A} + \\ &\quad k\mathbf{I})^{-1}]^2(\mathbf{I} + 2k(\mathbf{A} + k\mathbf{I})^{-1}) - \mathbf{I}]' \end{aligned} \quad (58)$$

1.4.10 Penentuan Nilai Parameter Bias

Parameter bias (k) memegang peranan penting dalam menentukan besarnya nilai dugaan koefisien regresi. Parameter ini berfungsi menyeimbangkan pertukaran antara bias dan variansi, di mana nilai k yang tepat akan meminimumkan MSE dari model. Kibria & Lukman (2020) mengusulkan pendekatan untuk menduga nilai parameter bias k yang dapat dihitung menggunakan Persamaan (59).

$$k_j = \frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\gamma}_{jOLS}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_j}} \quad (59)$$

Kibria & Lukman (2020) menggunakan pendekatan rata-rata harmonik atau *harmonic mean* yang sebelumnya juga digunakan oleh Hoerl dkk. (1975) untuk menentukan nilai optimal dari parameter bias k , sebagaimana dirumuskan pada Persamaan (60).

$$\hat{k}_{HMN} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{j=1}^p \left(2\hat{\gamma}_{jOLS}^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_j} \right)} \quad (60)$$

dengan $\hat{\sigma}^2$ merupakan variansi yang diperoleh dengan menggunakan Persamaan (61).

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{Y}}_{OLS})'(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{Y}}_{OLS})}{(n - p)} \right) \quad (61)$$

1.4.11 Pengujian Signifikansi Parameter Regresi

Pengujian signifikansi parameter dilakukan baik secara simultan maupun secara parsial.

a. Uji Simultan

Uji F digunakan untuk menguji secara simultan pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon. Hipotesis pengujiannya dapat dituliskan sebagai berikut:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$ (variabel prediktor dalam model secara simultan tidak berpengaruh terhadap variabel respon)

$H_1 : \text{Ada } \beta_j \neq 0 \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, p$ (variabel prediktor dalam model secara simultan berpengaruh terhadap variabel respon)

Statistik uji:

$$F_{hitung} = \frac{\frac{JKR}{p}}{\frac{JKG}{n-p-1}} = \frac{KTR}{KTG} \quad (62)$$

dengan

JKR : jumlah kuadrat regresi ($JKT - JKG$)

JKG : jumlah kuadrat galat ($\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$)

JKT : jumlah kuadrat total ($\sum (y_i - \bar{y})^2$)

Kriteria pengujian:

Tolak H_0 jika $F_{hitung} \geq F_{(\alpha; p; n-p-1)}$ atau $p - value < 0,05$ dan disimpulkan bahwa ada variabel prediktor dalam model yang berpengaruh terhadap variabel respon.

b. Uji Parsial Satu-Satu

Uji t merupakan suatu pengujian secara parsial satu-satu untuk mengetahui pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon. Hipotesis untuk uji t adalah sebagai berikut:
 $H_0 : \beta_j = 0$ (variabel prediktor ke- j tidak berpengaruh signifikan terhadap variabel respon)
 $H_0 : \beta_j \neq 0$ (variabel prediktor ke- j berpengaruh signifikan terhadap variabel respon)

Statistik uji:

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \quad (63)$$

dengan $SE(\hat{\beta}_j)$ adalah galat baku setiap variabel prediktor.

Kriteria pengujian:

Tolak H_0 jika $|t_{hitung}| \geq t_{(\frac{\alpha}{2}, n-p-1)}$ atau $p\text{-value} < 0,05$ maka disimpulkan bahwa variabel prediktor ke- j berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

1.4.12 Pengujian Kelayakan Model

Kelayakan model regresi dapat dievaluasi menggunakan beberapa kriteria, seperti *Mean Square Error* (MSE) Penduga, *Root Mean Square Error* (RMSE), dan *adjusted R²*.

a. *Mean Square Error* Penduga

Nilai MSE penduga digunakan untuk mengukur rata-rata kuadrat selisih antara penduga dan parameter sebenarnya. MSE menggabungkan dua komponen utama, yaitu variansi dan kuadrat bias dari penduga. Suatu penduga dikatakan sebagai penduga yang baik apabila memiliki kombinasi variansi dan bias yang kecil (Casella & Berger, 2002). Jika parameter yang diduga adalah γ dengan penduga $\hat{\gamma}$, maka MSE dalam bentuk skalar dapat dituliskan seperti pada Persamaan (64).

$$MSE(\hat{\gamma}) = tr(Cov(\hat{\gamma}) + bias(\hat{\gamma})bias(\hat{\gamma})') \quad (64)$$

b. *Root Mean Square Error*

Root Mean Square Error (RMSE) merupakan salah satu ukuran ketepatan (akurasi) model regresi dalam memprediksi nilai variabel respon. Semakin kecil nilai RMSE, maka semakin baik kinerja model regresi dalam memprediksi nilai yang mendekati data sebenarnya. Namun, interpretasi besarnya RMSE juga perlu mempertimbangkan skala data dari variabel respon agar dapat dinilai secara proporsional. Nilai RMSE dapat diperoleh melalui Persamaan (65) (Hodson, 2022).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (65)$$

c. *Adjusted R²*

Adjusted R² merupakan ukuran kebaikan model regresi yang telah disesuaikan dengan mempertimbangkan jumlah variabel prediktor dan jumlah sampel. Berbeda dengan koefisien determinasi R^2 , yang selalu meningkat seiring penambahan variabel dalam model, *adjusted R²* mengoreksi nilai R^2 dengan memperhitungkan rasio antara jumlah observasi dan jumlah parameter yang diestimasi. Dengan demikian, penambahan variabel yang tidak memberikan kontribusi berarti dapat menyebabkan nilai *adjusted R²* menurun. Nilai *adjusted R²* berkisar antara 0 hingga 1. Nilai yang semakin mendekati 1 mengindikasikan bahwa model semakin baik dalam menjelaskan keragaman variabel respon. *Adjusted R²* dapat dihitung menggunakan Persamaan (66) (Kutner dkk., 2005).

$$adjusted R^2 = 1 - \frac{\frac{JKG}{n-p-1}}{\frac{JKT}{n-1}} \quad (66)$$

dengan JKG merupakan jumlah kuadrat galat dan JKT adalah jumlah kuadrat total.

1.4.13 Nilai Tukar Rupiah

Nilai tukar merupakan harga relatif dari suatu mata uang terhadap mata uang lainnya (Syarifuddin, 2015). Nilai tukar Rupiah terhadap mata uang Dolar Amerika Serikat (USD) didefinisikan sebagai jumlah Rupiah yang dibutuhkan untuk memperoleh satu USD. Nilai tukar merupakan salah satu faktor makroekonomi yang memiliki dampak besar terhadap perdagangan internasional dan perekonomian suatu negara, sehingga perlu untuk menjaga stabilitas nilai tukar (Latif, 2024). Fluktuasi nilai tukar yang tinggi dapat memberikan dampak yang luas pada perekonomian, termasuk meningkatnya harga barang impor, biaya produksi yang lebih tinggi bagi industri yang mengimpor bahan baku, dan ketidakpastian bagi pelaku usaha dan investor (Putri dkk., 2017).

Faktor-faktor yang diduga memengaruhi nilai tukar Rupiah terhadap USD dan digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Inflasi

Inflasi didefinisikan sebagai situasi ketika terjadi peningkatan harga barang dan jasa secara umum dan terus-menerus dalam jangka waktu tertentu. Suatu kenaikan harga dianggap inflasi jika dampaknya meluas ke harga barang lain, bukan hanya pada satu atau dua komoditas tertentu. Badan Pusat Statistik (BPS) yang bertugas mengukur inflasi di Indonesia dengan cara membandingkan harga-harga yang berlaku saat ini dengan periode sebelumnya, berdasarkan hasil survei harga pada beragam barang dan jasa yang mewakili pola konsumsi masyarakat. Inflasi tidak terkendali dapat menyebabkan kondisi perekonomian melemah, harga-harga naik tajam, serta membuat masyarakat kurang bersemangat untuk bekerja, menabung, berinvestasi, dan memproduksi (Adnan dkk., 2024). Peningkatan inflasi menyebabkan dibutuhkannya jumlah Rupiah yang lebih besar untuk memperoleh mata uang asing dalam nilai yang sama, yang mengindikasikan terjadinya depresiasi Rupiah (Triyono, 2008).

b. Jumlah Uang Beredar

Jumlah uang beredar (JUB) adalah keseluruhan nilai mata uang yang beredar dalam perekonomian suatu negara pada periode tertentu, yang mencakup uang tunai (kartal) dan simpanan yang mudah dicairkan (giral). JUB terbagi menjadi dua kategori, yaitu M1 dan M2. JUB kategori M1 (Uang Beredar Sempit) mencakup uang kartal (uang kertas dan logam yang digunakan sebagai alat pembayaran resmi sehari-hari) serta uang giral (simpanan pihak swasta pada bank yang dapat ditukar dengan uang kartal). Sementara itu, M2 (Uang Beredar Luas) mencakup semua komponen M1 ditambah uang kuasi (yaitu aset-aset yang memiliki likuiditas mendekati uang, seperti tabungan non-giro dan deposito). Peningkatan M2 dapat menyebabkan meningkatnya daya beli masyarakat. Kelebihan JUB akan mendorong aliran modal keluar melalui impor maupun investasi asing, yang menyebabkan Rupiah terdepresiasi (Triyono, 2008).

c. Suku Bunga Acuan

Suku bunga acuan adalah tingkat suku bunga yang ditetapkan oleh Bank Indonesia (BI) sebagai patokan bagi lembaga keuangan di seluruh Indonesia dalam menentukan

besarnya suku bunga yang akan ditawarkan kepada nasabah, termasuk suku bunga pinjaman dan tabungan. Suku bunga juga dapat didefinisikan sebagai balas jasa atas kegiatan investasi. Suku bunga memiliki pengaruh signifikan terhadap pergerakan arus modal, dimana suku bunga dan imbal hasil investasi yang rendah cenderung mendorong modal domestik keluar. Sebaliknya, suku bunga yang tinggi akan menarik modal asing masuk. Peningkatan arus modal masuk akan mendorong permintaan terhadap mata uang domestik, yang pada akhirnya menyebabkan nilai tukar mata uang tersebut menguat (apresiasi). Sebaliknya, jika modal mengalir ke luar negeri akibat tawaran suku bunga dan imbal hasil investasi yang lebih menarik di negara lain, maka Rupiah akan mengalami depresiasi (Adnan dkk., 2024).

d. Total Ekspor

Menurut Kementerian Perdagangan Republik Indonesia, ekspor merupakan kegiatan mengeluarkan barang dan jasa dari wilayah suatu negara, baik yang bersifat komersial maupun bukan komersial (seperti barang hibah, sumbangan, hadiah), serta barang yang akan diolah di luar negeri untuk kemudian dimasukkan kembali ke negara tersebut secara legal. Total ekspor mengacu pada akumulasi nilai ekspor Indonesia yang mencakup dua sektor utama, yaitu sektor migas (gas dan minyak bumi) dan sektor non migas (pertanian, industri pengolahan, pertambangan, dan lainnya). Peningkatan ekspor mendorong aliran masuk devisa yang meningkatkan permintaan terhadap mata uang domestik, sehingga berimplikasi pada apresiasi Rupiah (Berliana & Aji, 2025).

e. Total Impor

Impor didefinisikan sebagai kegiatan memasukkan barang dan jasa dari luar negeri yang dibeli oleh penduduk suatu negara, sehingga mengakibatkan terjadinya arus keluar mata uang asing dari dalam negeri. Berdasarkan penggunaannya, barang impor diklasifikasikan menjadi tiga golongan, yakni barang konsumsi (*consumption goods*), bahan baku (*raw material support*), dan barang modal (*capital goods*). Adapun total impor merupakan keseluruhan nilai impor yang masuk ke Indonesia. Peningkatan total impor dapat menyebabkan peningkatan permintaan mata uang asing, sehingga dapat mengakibatkan terjadinya depresiasi Rupiah (Puspita & Nurlatipah, 2023).

f. Harga Minyak Mentah Dunia

Harga minyak dunia adalah harga minyak global yang diperdagangkan di pasar internasional. Harga minyak mentah dunia adalah nilai pasar minyak yang ditentukan oleh mekanisme permintaan dan penawaran di pasar internasional. Terdapat dua jenis acuan harga minyak yang paling umum digunakan di dunia, yaitu *Brent Crude* dan *West Texas Intermediate* (WTI). Indonesia umumnya menggunakan pergerakan harga *Brent Crude Oil* sebagai patokan dalam memantau dan menentukan harga minyak mentah. Menurut Beckmann dkk. (2020) dalam Hesniati dkk. (2022), kenaikan harga minyak dapat mengakibatkan mata uang negara-negara importir minyak terdepresiasi, sedangkan negara eksportir minyak akan mengalami apresiasi mata uang.

BAB II METODE PENELITIAN

2.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini yaitu data sekunder nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat dan faktor-faktor yang diduga memengaruhinya. Data yang digunakan periode bulanan dari Januari 2021 hingga Desember 2024 yang berjumlah 48 observasi yang dapat dilihat pada Lampiran 1. Data yang digunakan bersumber dari situs resmi Badan Pusat Statistik (BPS), Bank Indonesia, Satu Data Perdagangan Kementerian Perdagangan Indonesia, dan investing.com.

2.2 Variabel Penelitian

Variabel-variabel yang digunakan pada penelitian ini ditunjukkan pada pada Tabel 2.

Tabel 2. Variabel Penelitian

Variabel	Keterangan	Satuan
y	Nilai Tukar Rupiah terhadap USD	Rupiah
X_1	Inflasi	Persen
X_2	Jumlah Uang Beredar (M2)	Miliar Rupiah
X_3	Suku Bunga Acuan	Persen
X_4	Total Ekspor	Juta USD
X_5	Total Impor	Juta USD
X_6	Harga Minyak Mentah Dunia (Brent)	USD

2.3 Metode Analisis

Penelitian ini menggunakan metode *Modified Jackknife Kibria-Lukman Regression* dengan koreksi autokorelasi Prais-Winsten. Analisis data dilakukan menggunakan bantuan *software* R-Studio dan pengujian hipotesis dilakukan pada taraf signifikansi 5%. Adapun tahapan analisis yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Melakukan analisis statistik deskriptif untuk memberikan gambaran tentang variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian.
2. Melakukan pengujian asumsi klasik regresi, seperti uji normalitas galat, homoskedastisitas, multikolinieritas, dan autokorelasi.
3. Mengidentifikasi pola autokorelasi galat menggunakan plot ACF dan PACF.
4. Melakukan transformasi logaritma natural ($\ln$) pada variabel prediktor X_2, X_4, X_5 , dan X_6 sehingga diperoleh variabel hasil transformasi $\tilde{X}_2, \tilde{X}_4, \tilde{X}_5$ dan $\tilde{X}_6$.
5. Melakukan koreksi autokorelasi menggunakan prosedur Prais-Winsten (PW):
 - a. Menduga nilai koefisien autokorelasi ($\hat{\rho}$) awal dengan meregresikan galat $\hat{\varepsilon}_i$ terhadap $\hat{\varepsilon}_{i-1}$ sesuai Persamaan (27), galat $\hat{\varepsilon}_i$ diperoleh dari hasil regresi OLS pada variabel hasil transformasi $\ln$ (y dan $\tilde{X}$).
 - b. Melakukan transformasi Prais-Winsten pada data hasil transformasi $\ln$ menggunakan nilai $\hat{\rho}$ awal sesuai Persamaan (28) dan (29).
 - c. Melakukan iterasi hingga memperoleh nilai $\hat{\rho}$ konvergen dengan menggunakan kriteria konvergensi $|\hat{\rho}_{m+1} - \hat{\rho}_m| \leq 0,000001$.

- d. Melakukan transformasi akhir terhadap data hasil transformasi. In menerapkan nilai $\hat{\rho}$ konvergen ke dalam Persamaan (28) dan (29). Langkah ini menghasilkan $\tilde{X}_{i,j}^*$ dan y_i^* yang akan digunakan sebagai input untuk tahapan selanjutnya.
6. Melakukan pemodelan *Modified Jackknife Kibria-Lukman Regression* (MJKLR) pada data hasil transformasi PW. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:
 - a. Melakukan standardisasi pada data hasil transformasi PW dengan menggunakan Persamaan (32) sehingga diperoleh $\tilde{X}_{i,j}^{**}$ dan y_i^{**}
 - b. Menghitung nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $\tilde{X}^{**'}\tilde{X}^{**}$, membentuk matriks $\mathbf{P}$ (matriks vektor eigen), dan membentuk matriks $\mathbf{Z} = \tilde{X}^{**'}\mathbf{P}$. Sehingga model regresi menjadi $\mathbf{y}^{**} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$
 - c. Menghitung nilai penduga $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}^{**}$ dengan menggunakan Persamaan (9).

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}^{**} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}^{**}$$
 - d. Menghitung nilai parameter bias (k) MJKLR menggunakan Persamaan (60).
 - e. Menghitung nilai penduga parameter MJKLR bentuk kanonik ($\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJKL}^{**}$) dengan menggunakan Persamaan (53).

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJKL}^{**} = [\mathbf{I} - (2k(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-1})^2][\mathbf{I} - 2k(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I})^{-1}]\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{OLS}^{**}$$
 dengan $\boldsymbol{\Lambda} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})$
 - f. Mengonversi penduga dari ruang ortogonal ($\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJKL}^{**}$) kembali ke ruang variabel asli terstandarisasi ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MJKL}^{**}$) dengan menggunakan Persamaan (54).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MJKL}^{**} = \mathbf{P}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{MJKL}^{**}$$
 - g. Melakukan transformasi balik (unstandardisasi) penduga parameter model ke parameter sebelum standardisasi menggunakan Persamaan (34).

$$\hat{\beta}_{j(MJKL)}^* = \left(\frac{s_{y^*}}{s_{\tilde{X}_j^*}}\right)\hat{\beta}_{j(MJKL)}^{**} \text{ dan } \hat{\beta}_{0(MJKL)}^* = \bar{y}^* - \sum_{j=1}^6 \hat{\beta}_{j(MJKL)}^* \bar{\tilde{X}}_j^*$$
 - h. Melakukan transformasi balik penduga parameter dari poin (g) sesuai persamaan (31) untuk Prais-Winsten dan pembentukan model MJKLR akhir.
7. Melakukan pengujian signifikansi parameter secara simultan dan parsial sesuai Persamaan (62) dan (63).
8. Melakukan pemilihan model terbaik dengan membandingkan nilai MSE penduga, RMSE, dan *adjusted R²* menggunakan Persamaan (64), (65), dan (66).
9. Melakukan interpretasi hasil pendugaan model MJKLR dengan koreksi autokorelasi PW pada data nilai tukar Rupiah terhadap Dolar Amerika Serikat tahun 2021-2024.