

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan salah satu metode statistika yang bertujuan untuk mengetahui pola hubungan antara satu variabel endogen dengan satu atau lebih variabel eksogen (Hosmer et al., 2013). Terdapat dua pendekatan yang umum digunakan untuk mengestimasi kurva regresi, yaitu pendekatan regresi parametrik dan pendekatan regresi nonparametrik. Jika bentuk kurva regresi diketahui, maka diterapkan pendekatan regresi parametrik. Namun, jika bentuk kurva regresi tidak diketahui maka diterapkan pendekatan regresi nonparametrik.

Pendekatan regresi multi-eksogen merupakan metode yang tepat diaplikasikan jika jumlah variabel eksogen lebih dari satu. Pendekatan ini dikenal sebagai regresi linier berganda. Pada beberapa kasus, pengaruh antara variabel eksogen dan variabel endogen tidak hanya bersifat langsung, tetapi juga dapat terjadi secara tidak langsung melalui variabel perantara. Penggunaan regresi linier berganda hanya mampu mengestimasi pengaruh langsung, sehingga belum mampu menjelaskan mekanisme pengaruh tidak langsung yang terjadi dalam sistem hubungan antarvariabel. Oleh karena itu, diperlukan metode yang mampu mengidentifikasi struktur hubungan kausal yang lebih kompleks, yaitu analisis jalur. Menurut Kline (2016), analisis jalur merupakan metode yang diterapkan untuk mengidentifikasi pengaruh langsung, tidak langsung, dan total antarvariabel dalam sistem yang kompleks. Persamaan dalam analisis jalur mencakup minimal satu variabel eksogen, minimal satu variabel *intervening*, serta satu atau lebih variabel endogen (Fernandes, 2021). Variabel *intervening* berperan sebagai perantara antara variabel eksogen dengan variabel endogen (Haryono, 2016).

Terdapat empat asumsi dasar dalam analisis jalur, yaitu (1) hubungan antarvariabel bersifat linier dan aditif, (2) pola hubungan antarvariabel bersifat rekursif, (3) variabel endogen minimal berskala pengukuran interval, dan (4) model yang dianalisis ditentukan berdasarkan teori dan konsep yang relevan (Solimun, 2010). Pengujian asumsi linieritas merupakan langkah awal untuk menentukan pendekatan analisis jalur yang tepat. Apabila asumsi linieritas terpenuhi, maka analisis jalur yang digunakan bersifat parametrik. Sebaliknya, jika asumsi linieritas tidak terpenuhi, terdapat dua kemungkinan yaitu analisis jalur nonlinier digunakan jika bentuk fungsional nonliniernya sudah diketahui. Sedangkan, analisis jalur nonparametrik digunakan jika bentuk fungsionalnya tidak diketahui (Ubaidillah et al., 2022). Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menguji asumsi linieritas pada data adalah Ramsey's RESET (Solimun & Rinaldo Fernandes, 2023).

Pola hubungan nonlinier dengan bentuk fungsional yang tidak diketahui memerlukan metode estimasi yang bersifat fleksibel, dapat mengikuti pola hubungan antara variabel eksogen dan variabel endogen. Terdapat beberapa metode dalam mengestimasi model nonparametrik yaitu *spline*, *kernel*, polinomial lokal, *wavelet*, dan *fourier* (Prahutama, 2013). Salah satu estimator nonparametrik yang sering digunakan adalah *spline truncated*. *Spline* merupakan fungsi potongan polinomial yang dihubungkan melalui titik knot (Ubaidillah et al., 2022). Metode yang dapat digunakan

untuk menentukan titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV) (Anggraeni et al., 2023).

Penelitian terkait analisis jalur telah dilakukan oleh Dermawanti et al. pada tahun 2015 yang memodelkan faktor-faktor yang memengaruhi kriminalitas di Kabupaten Batang. Hasil dari penelitian ini berhasil membuktikan adanya pengaruh tidak langsung variabel tertentu, seperti pendidikan terhadap tingkat kriminalitas di Kabupaten Batang. Penelitian lainnya oleh Amanda et al. (2024) yang memodelkan analisis jalur nonparametrik *spline truncated* pada kasus perilaku risiko kredit perbankan dengan menggunakan metode *ordinary least squares*. Prayogi et al. (2023) melakukan penelitian serupa dengan mengaplikasikan analisis jalur nonparametrik *spline truncated* untuk menganalisis hubungan kausal antarvariabel yang memengaruhi angka kemiskinan dengan menggunakan metode *ordinary least squares*. Kedua penelitian tersebut memodelkan hubungan antarvariabel yang bersifat nonlinier serta mengakomodasi perubahan *regime* pada titik knot sehingga memberikan estimasi yang lebih fleksibel sesuai perubahan karakteristik data pada rentang nilai variabel eksogen yang berbeda. Pendekatan estimasi konvensional seperti *Ordinary Least Squares* (OLS) memiliki keterbatasan, terutama dalam menangani data yang mengandung korelasi antar residual (Tabachnick & Fidell, 2019). Korelasi antar residual dapat terjadi jika data mengandung lebih dari satu variabel endogen yang saling berkorelasi (Islamiyati et al., 2018). Masalah ini dapat diatasi dengan pendekatan *Weighted Least Squares* (WLS) yang mengakomodasi pembobotan invers dari varians kovarians residual. Analisis jalur merupakan sistem pemodelan dengan variabel endogen yang saling berkorelasi sehingga akan dilakukan estimasi berbasis WLS yang mempertimbangkan kasus adanya korelasi antar residual.

Implementasi metode WLS didasarkan pada spesifikasi model analisis jalur yang merepresentasikan struktur kausalitas antarvariabel yang berkaitan dengan IPM. Struktur kausalitas dalam model menunjukkan bahwa PDRB dan RLS berpengaruh terhadap pengeluaran per kapita, yang selanjutnya memengaruhi IPM, serta terdapat pengaruh langsung PDRB dan RLS terhadap IPM. Dalam kerangka tersebut, pengeluaran per kapita berperan sebagai variabel *intervening* karena merepresentasikan kemampuan konsumsi masyarakat yang menjadi mekanisme perantara antara faktor pendidikan dan kondisi ekonomi terhadap pencapaian IPM. Secara empiris, penelitian terdahulu menyimpulkan bahwa PDRB dan RLS berpengaruh signifikan terhadap pengeluaran per kapita (Soleh et al., 2023)(Ulum, 2024) sehingga menegaskan peran pengeluaran per kapita sebagai variabel *intervening* dalam model. Keberadaan lebih dari satu variabel endogen, yaitu pengeluaran per kapita dan IPM, berimplikasi pada keberadaan korelasi antarendogen sehingga estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan matriks pembobot melalui pendekatan WLS. Struktur hubungan kausal antarvariabel tersebut selaras dengan konsep pembangunan manusia, sebagaimana dikemukakan oleh *United Nations Development Programme* (UNDP), yang menyatakan bahwa tujuan utama dari pembangunan manusia adalah memperluas pilihan hidup yang dimiliki setiap individu melalui peningkatan akses terhadap aspek-aspek dasar seperti pendidikan, kesehatan, dan pendapatan (Badan Pusat Statistik, 2024). Pengukuran pembangunan manusia mulai diperkenalkan oleh UNDP pada tahun 1990 melalui Indeks Pembangunan Manusia yang dihitung berdasarkan empat indikator, antara lain Umur

Harapan Hidup (UHH), Rata-Rata Lama Sekolah (RLS), Harapan Lama Sekolah (HLS), dan pengeluaran per kapita disesuaikan (BPS, 2025). Selain itu, penelitian terdahulu menunjukkan bahwa faktor ekonomi turut memengaruhi IPM. Siagian et al (2024) menyimpulkan bahwa PDRB berpengaruh secara positif terhadap IPM.

Berdasarkan data Badan Pusat Statistik (BPS), nilai IPM Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2024 mencapai 75,18, yang termasuk dalam kategori tinggi. Namun, jika ditinjau lebih mendalam pada tingkat kabupaten/kota, masih terdapat 18 daerah dengan nilai IPM di bawah nilai IPM provinsi dan Kabupaten Jeneponto bahkan masih berada pada kategori sedang. Kondisi ini menunjukkan adanya kesenjangan pembangunan manusia antarwilayah di Provinsi Sulawesi Selatan. Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi model jalur yang menggambarkan pengaruh faktor-faktor seperti PDRB, rata-rata lama sekolah, dan pengeluaran per kapita terhadap Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2024 menggunakan analisis jalur nonparametrik *spline truncated* dengan metode WLS.

1.2 Batasan Penelitian

Batasan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan adalah data Provinsi Sulawesi Selatan tahun 2024, dengan IPM sebagai variabel endogen, pengeluaran per kapita disesuaikan sebagai variabel intervening, serta PDRB per kapita dan RLS sebagai variabel eksogen.
2. Fungsi *spline truncated* menggunakan derajat polinomial satu (linier).
3. Titik knot yang digunakan diantaranya satu dan dua titik knot.
4. Pemilihan titik knot optimal dilakukan pada rentang nilai 0,05 hingga 0,95 dengan interval 0,05.
5. Normalisasi data dilakukan dengan menggunakan normalisasi *min-max*.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memperoleh model Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2024 melalui analisis jalur nonparametrik *spline truncated* dengan metode *Weighted Least Squares* (WLS).

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberi wawasan dan pengetahuan mengenai pemodelan, khususnya analisis jalur nonparametrik *spline truncated* menggunakan metode *Weighted Least Squares* (WLS) yang diterapkan pada data Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Sulawesi Selatan tahun 2024.

1.5 Teori

1.5.1 Regresi Nonparametrik *Spline Truncated*

Spline merupakan fungsi potongan polinomial yang dihubungkan melalui titik knot (Ubaidillah et al., 2022). Titik yang menyatakan terbentuknya perubahan perilaku kurva pada setiap interval yang berbeda disebut titik knot (Hardle, 1990). *Spline truncated* merupakan salah satu bentuk *spline* yang menambahkan fungsi terpotong pada titik knot tertentu, sehingga perubahan pola hubungan antarvariabel hanya terjadi setelah melewati titik knot. Sifat ini menyebabkan *spline truncated* memiliki fleksibilitas dalam mengikuti perubahan pola hubungan antara variabel eksogen dan variabel endogen.

Misalkan y adalah variabel endogen dan x adalah variabel eksogen maka pola hubungannya dapat dinyatakan dalam Persamaan (1) (Eubank, 1999).

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

dengan n adalah jumlah pengamatan, y_i adalah variabel endogen pada pengamatan ke- i , x_i adalah variabel eksogen pada pengamatan ke- i , dan ε_i adalah residual pada pengamatan ke- i yang memiliki rata-rata 0 dan varians σ^2 .

Fungsi regresi $f(x_i)$ pada Persamaan (1) dihampiri dengan fungsi *spline truncated* linier dengan titik knot $K_1, K_2, \dots, K_l$. Secara umum, fungsi *spline truncated* linier ditunjukkan pada Persamaan (2) (Wu & Zhang, 2006).

$$f(x_i) = \sum_{v=0}^1 \beta_v x_i^v + \sum_{u=1}^l \beta_{1+u} (x_i - K_u)_+ \quad (2)$$

dengan,

$$(x_i - K_u)_+ = \begin{cases} (x_i - K_u)_+, & x_i \geq K_u \\ 0, & x_i < K_u \end{cases}$$

β_v adalah koefisien parameter polinomial orde ke- v , x_i adalah variabel eksogen pada pengamatan ke- i , β_{1+u} adalah koefisien parameter truncated knot ke- $(1+u)$, $f(x_i)$ adalah fungsi regresi, K_u adalah titik knot dengan $K_1 < K_2 < \dots < K_l$, dan $(x_i - K_u)_+$ adalah fungsi *truncated*.

Persamaan model regresi nonparametrik *spline truncated* linier dengan lebih dari satu variabel eksogen atau multieksogen dapat dituliskan seperti pada Persamaan (3) (Tripena & Yosita Lianawati, 2023).

$$\begin{aligned} f(x_{j,i}) &= \sum_{j=1}^p \left(\sum_{v=0}^1 \beta_{j,v} x_{j,i}^v + \sum_{u=1}^l \beta_{j,(1+u)} (x_{j,i} - K_{j,u})_+ \right) \\ y_i &= \sum_{j=1}^p \left(\sum_{v=0}^1 \beta_{j,v} x_{j,i}^v + \sum_{u=1}^l \beta_{j,(1+u)} (x_{j,i} - K_{j,u})_+ \right) + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3)$$

dengan:

$f(x_{j,i})$: fungsi regresi *spline* dari variabel eksogen ke- j pada pengamatan ke- i

$x_{j,i}$: variabel eksogen ke- j pada pengamatan ke- i

$\beta_{j,v}$: koefisien parameter polinomial pada eksogen ke- j dan orde ke- v

$\beta_{j,(1+u)}$: koefisien parameter truncated pada eksogen ke- j dan knot ke- $(1+u)$

$K_{j,u}$: titik knot pada eksogen ke- j dan knot ke- u

p : banyaknya variabel eksogen

v : banyaknya orde polinomial *spline truncated*

l : banyaknya titik knot

Persamaan (3) dapat dijabarkan dalam bentuk matriks pada Persamaan (4)

$$\tilde{y} = X\tilde{\beta} + \tilde{\varepsilon} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & (x_{1,1} - K_{1,1})_+ & \cdots & (x_{1,1} - K_{1,l})_+ & \cdots & x_{p,1} & (x_{p,1} - K_{1,1})_+ & \cdots & (x_{p,1} - K_{p,l})_+ \\ 1 & x_{1,2} & (x_{1,2} - K_{1,1})_+ & \cdots & (x_{1,2} - K_{1,l})_+ & \cdots & x_{p,2} & (x_{p,2} - K_{1,1})_+ & \cdots & (x_{p,2} - K_{p,l})_+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1,n} & (x_{1,n} - K_{1,1})_+ & \cdots & (x_{1,n} - K_{1,l})_+ & \cdots & x_{p,n} & (x_{p,n} - K_{1,1})_+ & \cdots & (x_{p,n} - K_{p,l})_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1,1} \\ \vdots \\ \beta_{1,(1+l)} \\ \beta_{p,1} \\ \beta_{p,(1+l)} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dengan:

- $\tilde{y}$: vektor variabel endogen berukuran $n \times 1$
 $\mathbf{X}$: matriks berukuran $n \times (1 + p(1 + l))$
 $\tilde{\beta}$: vektor koefisien parameter berukuran $(1 + p(1 + l)) \times 1$
 $\tilde{\varepsilon}$: vektor residual berukuran $n \times 1$

1.5.2 Uji Korelasi Pearson

Koefisien korelasi merupakan suatu nilai yang mengukur kekuatan dan arah hubungan linier antara dua variabel (Ikhwan et al., 2024). Nilai koefisien korelasi (ρ) berada dalam rentang -1 hingga +1. Bila ρ mendekati 0 atau bernilai 0, maka hubungan linier antara dua variabel sangat lemah atau tidak ada hubungan sama sekali. Sebaliknya, bila ρ bernilai 1 atau mendekati 1, hal ini menunjukkan adanya hubungan positif antara dua variabel yang sangat kuat. Sementara itu, bila ρ bernilai -1 atau mendekati -1, hal ini menunjukkan adanya hubungan negatif yang sangat kuat antara dua variabel. Nilai koefisien korelasi dapat dihitung dengan menggunakan rumus pada Persamaan (5).

$$\rho_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{1,i} - \bar{y}_1)(y_{2,i} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_{1,i} - \bar{y}_1)^2 \sum_{i=1}^n (y_{2,i} - \bar{y}_2)^2}} \quad (5)$$

dengan $y_{1,i}$ adalah variabel endogen ke-1 pada pengamatan ke- i , $y_{2,i}$ adalah variabel endogen ke-2 pada pengamatan ke- i , $\bar{y}_1$ adalah rata-rata variabel endogen ke-1, dan $\bar{y}_2$ adalah rata-rata variabel endogen ke-2.

Hipotesis yang digunakan pada pengujian korelasi pearson adalah sebagai berikut:

$$H_0 : \rho_{1,2} = 0$$

$$H_1 : \rho_{1,2} \neq 0$$

dengan statistik uji yang ditunjukkan pada Persamaan (6)

$$t_{hit} = \frac{\rho_{1,2} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \rho_{1,2}^2}} \quad (6)$$

Kriteria keputusan menolak H_0 jika $t_{hi} > t_{\alpha, n-2}$ atau $p - value < \alpha_{0,05}$. Hal ini mengindikasikan bahwa tidak terdapat korelasi linier antara kedua variabel endogen.

1.5.3 Uji Asumsi Linieritas Ramsey RESET (RRT)

Uji *Regression Specification Error Test* (RESET) bertujuan untuk mengidentifikasi pola hubungan antara variabel, baik linier maupun nonlinier (Solimun & Rinaldo Fernandes, 2023). Uji Ramsey RESET pertama kali dikembangkan oleh Ramsey pada tahun 1969. Uji linieritas menggunakan Ramsey RESET dilakukan dengan menguji dua persamaan regresi (Ramsey, 1969). Persamaan pertama adalah persamaan dari variabel eksogen terhadap variabel endogen, sedangkan persamaan kedua adalah persamaan pertama yang ditambahkan dengan variabel eksogen tambahan berupa variabel endogen kuadrat

$\hat{Y}_i^2$ dan variabel endogen kubik $\hat{Y}_i^3$ dari persamaan regresi pertama. Kedua persamaan regresi yang diperoleh memiliki nilai koefisien determinasi yang kemudian dibandingkan untuk mendapatkan kesimpulan uji Ramsey RESET. Tahapan dalam uji Ramsey RESET adalah sebagai berikut (Gujarati, 2004) :

1. Mengestimasi persamaan regresi pertama pada Persamaan (7) menggunakan metode OLS dan menghitung hasil estimasi y_i yaitu $\hat{y}_i$.

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \\ \hat{y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \end{aligned} \quad (7)$$

2. Menghitung koefisien determinasi pada persamaan regresi pertama

$$R_1^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

3. Mengestimasi persamaan regresi kedua pada Persamaan (8) menggunakan metode OLS

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 \hat{y}_i^2 + \beta_3 \hat{y}_i^3 + \varepsilon_i \quad (8)$$

4. Menghitung koefisien determinasi pada persamaan regresi kedua

$$R_2^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

5. Menguji hubungan linieritas pada model dengan hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1: \text{minimal terdapat satu } \beta_j \neq 0, j = 2, 3$$

Statistik uji mengikuti sebaran F

$$F_{hit} = \frac{(R_2^2 - R_1^2)/m}{(1 - R_2^2)/(n - k)} \quad (9)$$

Kriteria keputusan menolak H_0 jika $F_{hit} > F_{\alpha(m, n-k)}$ atau $p\text{-value} < \alpha_{0,05}$. Hal ini mengindikasikan bahwa hubungan antara variabel eksogen dan endogen nonlinier.

Keterangan:

n : jumlah pengamatan

m : jumlah variabel eksogen tambahan

k : jumlah koefisien parameter β yang ada dalam Persamaan (8)

1.5.4 Normalisasi Data

Metode normalisasi min-max adalah teknik standarisasi yang umum digunakan dengan cara menskalakan nilai setiap pengamatan ke dalam rentang 0 hingga 1 (Prihandi et al., 2025). Transformasi ini bertujuan untuk menyetarakan skala antarvariabel sehingga perbedaan satuan dan rentang data tidak mendominasi proses analisis (Dewi et al., 2025). Secara matematis, normalisasi min-max dilakukan dengan memanfaatkan nilai minimum dan maksimum dari setiap variabel. Persamaan (10) menunjukkan persamaan normalisasi *min-max* (Henderi, 2021).

$$\begin{aligned} x_{j,i}^* &= \frac{x_{j,i} - \min(x_j)}{\max(x_j) - \min(x_j)} \\ y_{k,i}^* &= \frac{y_{k,i} - \min(y_k)}{\max(y_k) - \min(y_k)} \end{aligned} \quad (10)$$

dengan $\min(x_j)$ adalah nilai minimum dari variabel eksogen ke- j , $\max(x_j)$ adalah nilai maksimum dari variabel eksogen ke- j , $\min(y_k)$ adalah nilai minimum dari variabel endogen ke- k , dan $\max(y_k)$ adalah nilai maksimum dari variabel endogen ke- k .

1.5.5 Analisis Jalur Nonparametrik *Spline Truncated*

Analisis jalur merupakan metode statistika yang digunakan untuk mengidentifikasi pengaruh langsung, tidak langsung, dan total antarvariabel dalam suatu model. Pengaruh langsung merepresentasikan pengaruh suatu variabel eksogen terhadap suatu variabel endogen yang tidak dimediasi oleh variabel perantara di dalam model jalur. Pengaruh tidak langsung dari suatu variabel eksogen dimediasi oleh setidaknya satu variabel perantara (*intervening variable*). Sementara itu, pengaruh total adalah akumulasi dari pengaruh langsung dan pengaruh tidak langsung (Bollen, 1989). Secara konseptual, metode ini memungkinkan peneliti untuk memahami bagaimana suatu variabel eksogen memengaruhi variabel endogen baik secara langsung maupun melalui jalur perantara dalam sistem pemodelan yang bersifat rekursif. Diagram jalur digunakan sebagai representasi visual dari suatu sistem persamaan simultan yang menyajikan gambaran hubungan antarvariabel dalam model analisis jalur (Bollen, 1989).

Pengembangan analisis jalur tidak terbatas pada pendekatan parametrik, terutama ketika hubungan antara variabel eksogen dan variabel endogen bersifat nonlinier dan bentuk fungsionalnya tidak diketahui. Pendekatan regresi nonparametrik digunakan untuk memodelkan hubungan antarvariabel secara lebih fleksibel tanpa asumsi bentuk fungsi tertentu (Pramaningrum et al., 2024). Salah satu pendekatan nonparametrik yang banyak digunakan adalah *spline truncated*, yang memungkinkan perubahan pola hubungan antarvariabel pada interval tertentu melalui keberadaan titik knot. Bentuk persamaan analisis jalur nonparametrik *spline truncated* dengan dua variabel eksogen x_1 dan x_2 , satu variabel intervening y_1 , serta satu variabel endogen y_2 ditunjukkan pada Persamaan (11) (Hidayat et al. (2019):

$$\begin{aligned} y_{k,i}^* &= \sum_{\ell=1}^p f_{k,\ell}(x_{\ell,i}^*) + \sum_{s=1}^{k-1} f_{k,(p+s)}(y_{s,i}^*) + \varepsilon_{k,i}^*, \quad k = 1, 2; \quad p = 1, 2; \quad i = 1, \dots, n \\ y_{1,i}^* &= f_{1,1}(x_{1,i}^*) + f_{1,2}(x_{2,i}^*) + \varepsilon_{1,i}^*, \\ &= f_1(x_{1,i}^*, x_{2,i}^*) + \varepsilon_{1,i}^*, \quad i = 1, \dots, n \\ y_{2,i}^* &= f_{2,1}(x_{1,i}^*) + f_{2,2}(x_{2,i}^*) + f_{2,3}(y_{1,i}^*) + \varepsilon_{2,i}^* \\ &= f_2(x_{1,i}^*, x_{2,i}^*, y_{1,i}^*) + \varepsilon_{2,i}^*, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{11}$$

dengan $x_{\ell,i}^*$ adalah variabel eksogen ke- ℓ pada pengamatan ke- i dalam skala normalisasi, $y_{s,i}^*$ adalah variabel eksogen ke- s pada pengamatan ke- i dalam skala normalisasi, $y_{k,i}^*$ adalah variabel endogen ke- k pada pengamatan ke- i dalam skala normalisasi, f adalah fungsi regresi *spline truncated*, dan $\varepsilon_{k,i}^*$ adalah residual pada variabel endogen ke- k dan pengamatan ke- i yang memiliki rata-rata 0 dan varians σ^2 . Persamaan (11) dapat dijabarkan dalam bentuk matriks seperti pada Persamaan (12).

$$\begin{bmatrix} y_{1,1}^* \\ y_{1,2}^* \\ \vdots \\ y_{1,n}^* \\ y_{2,1}^* \\ y_{2,2}^* \\ \vdots \\ y_{2,n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1}(x_{1,1}^*) + f_{1,2}(x_{2,1}^*) \\ f_{1,1}(x_{1,2}^*) + f_{1,2}(x_{2,2}^*) \\ \vdots \\ f_{1,1}(x_{1,n}^*) + f_{1,2}(x_{2,n}^*) \\ f_{2,1}(x_{1,1}^*) + f_{2,2}(x_{2,1}^*) + f_{2,3}(y_{1,1}^*) \\ f_{2,1}(x_{1,2}^*) + f_{2,2}(x_{2,2}^*) + f_{2,3}(y_{1,2}^*) \\ \vdots \\ f_{2,1}(x_{1,n}^*) + f_{2,2}(x_{2,n}^*) + f_{2,3}(y_{1,n}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1}^* \\ \varepsilon_{1,2}^* \\ \vdots \\ \varepsilon_{1,n}^* \\ \varepsilon_{2,1}^* \\ \varepsilon_{2,2}^* \\ \vdots \\ \varepsilon_{2,n}^* \end{bmatrix} \quad (12)$$

Fungsi f pada Persamaan (11) dihipotesis dengan fungsi *spline truncated* orde satu. Secara umum, persamaan jalur nonparametrik *spline truncated* linier ditunjukkan pada Persamaan (13).

$$y_{k,i}^* = \sum_{\ell=1}^p \left(\sum_{v=0}^1 \beta_{k,\ell,v}^* x_{\ell,i}^{v*} + \sum_{u=1}^l \beta_{k,\ell,(1+u)}^* (x_{\ell,i}^* - K_{\ell,u}^*)_+ \right) + \sum_{s=1}^{k-1} \left(\sum_{v=0}^1 \beta_{k,(p+s),v}^* y_{s,i}^{v*} + \sum_{u=1}^l \beta_{k,(p+s),(1+u)}^* (y_{s,i}^* - K_{(p+s),u}^*)_+ \right) + \varepsilon_{k,i} \quad (13)$$

dengan

$$(x_{\ell,i}^* - K_{\ell,u}^*)_+ = \begin{cases} (x_{\ell,i}^* - K_{\ell,u}^*)_+ & , x_{\ell,i}^* \geq K_{\ell,u}^* \\ 0 & , x_{\ell,i}^* < K_{\ell,u}^* \end{cases}$$

$$(y_{s,i}^* - K_{(p+s),u}^*)_+ = \begin{cases} (y_{s,i}^* - K_{(p+s),u}^*)_+ & , y_{s,i}^* \geq K_{(p+s),u}^* \\ 0 & , y_{s,i}^* < K_{(p+s),u}^* \end{cases}$$

Keterangan:

- $x_{\ell,i}^*$: variabel eksogen ke- ℓ pada pengamatan ke- i dalam skala normalisasi
- $y_{s,i}^*$: variabel eksogen ke- s pada pengamatan ke- i dalam skala normalisasi
- $y_{k,i}^*$: variabel endogen ke- k pada pengamatan ke- i dalam skala normalisasi
- $\beta_{k,\ell,v}^*$: koefisien parameter polinomial pada persamaan ke- k , variabel eksogen ke- ℓ dan orde ke- v dalam skala normalisasi
- $\beta_{k,\ell,(1+u)}^*$: koefisien parameter truncated pada persamaan ke- k , variabel eksogen ke- ℓ dan knot ke- $(1+u)$ dalam skala normalisasi
- $\beta_{k,(p+s),v}^*$: koefisien parameter polinomial pada persamaan ke- k , variabel eksogen ke- $(p+s)$ dan orde ke- v dalam skala normalisasi
- $\beta_{k,(p+s),(1+u)}^*$: koefisien parameter truncated pada persamaan ke- k , variabel eksogen ke- $(p+s)$ dan knot ke- $(1+u)$ dalam skala normalisasi
- $K_{\ell,u}^*$: titik knot pada variabel eksogen ke- ℓ dan knot ke- u dalam skala normalisasi
- $K_{(p+s),u}^*$: titik knot pada variabel eksogen ke- $(p+s)$ dan knot ke- u dalam skala normalisasi

Penelitian ini menerapkan metode analisis jalur nonparametrik *spline truncated* dengan satu dan dua titik knot. Kedua model dapat dijabarkan sebagai berikut:

1. Model dengan satu titik knot

$$y_{1,i}^* = \beta_{1,0}^* + \beta_{1,1,1}^* x_{1,i}^* + \beta_{1,1,2}^* (x_{1,i}^* - K_{1,1}^*)_+ + \beta_{1,2,1}^* x_{2,i}^* + \beta_{1,2,2}^* (x_{2,i}^* - K_{2,1}^*)_+ \quad (14)$$

$$(15)$$

$$y_{2,i}^* = \beta_{2,0}^* + \beta_{2,1,1}^* x_{1,i}^* + \beta_{2,1,2}^* (x_{1,i}^* - K_{1,1}^*)_+ + \beta_{2,2,1}^* x_{2,i}^* + \beta_{2,2,2}^* (x_{2,i}^* - K_{2,1}^*)_+ \\ + \beta_{2,3,1}^* y_{1,i}^* + \beta_{2,3,2}^* (y_{1,i}^* - K_{3,1}^*)_+$$

Pengaruh langsung yang dihasilkan oleh model dengan satu titik knot dapat diuraikan sebagai berikut:

- a. Pengaruh langsung $x_{1,i}^*$ terhadap $y_{1,i}^*$ pada Persamaan (14)

$$\begin{aligned} \beta_{1,1,1}^*, & \quad x_{1,i}^* < K_{1,1}^* \\ \beta_{1,1,1}^* + \beta_{1,1,2}^*, & \quad x_{1,i}^* \geq K_{1,1}^* \end{aligned}$$

- b. Pengaruh langsung $x_{2,i}^*$ terhadap $y_{1,i}^*$ pada Persamaan (14)

$$\begin{aligned} \beta_{1,2,1}^*, & \quad x_{2,i}^* < K_{2,1}^* \\ \beta_{1,2,1}^* + \beta_{1,2,2}^*, & \quad x_{2,i}^* \geq K_{2,1}^* \end{aligned}$$

- c. Pengaruh langsung $x_{1,i}^*$ terhadap $y_{2,i}^*$ pada Persamaan (15)

$$\begin{aligned} \beta_{2,1,1}^*, & \quad x_{1,i}^* < K_{1,1}^* \\ \beta_{2,1,1}^* + \beta_{2,1,2}^*, & \quad x_{1,i}^* \geq K_{1,1}^* \end{aligned}$$

- d. Pengaruh langsung $x_{2,i}^*$ terhadap $y_{2,i}^*$ pada Persamaan (15)

$$\begin{aligned} \beta_{2,2,1}^*, & \quad x_{2,i}^* < K_{2,1}^* \\ \beta_{2,2,1}^* + \beta_{2,2,2}^*, & \quad x_{2,i}^* \geq K_{2,1}^* \end{aligned}$$

- e. Pengaruh langsung $y_{1,i}^*$ terhadap $y_{2,i}^*$ pada Persamaan (15)

$$\begin{aligned} \beta_{2,3,1}^*, & \quad y_{1,i}^* < K_{3,1}^* \\ \beta_{2,3,1}^* + \beta_{2,3,2}^*, & \quad y_{1,i}^* \geq K_{3,1}^* \end{aligned}$$

Sementara itu, perincian pengaruh tidak langsung pada model dengan satu knot dapat diuraikan sebagai berikut:

- a. Pengaruh tidak langsung $x_{1,i}$ terhadap $y_{2,i}$ melalui $y_{1,i}$

$$\begin{aligned} \beta_{1,1,1}^* (\beta_{2,3,1}^*), & \quad x_{1,i}^* < K_{1,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* < K_{3,1}^* \\ \beta_{1,1,1}^* (\beta_{2,3,1}^* + \beta_{2,3,2}^*), & \quad x_{1,i}^* < K_{1,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* \geq K_{3,1}^* \\ (\beta_{1,1,1}^* + \beta_{1,1,2}^*) (\beta_{2,3,1}^*), & \quad x_{1,i}^* \geq K_{1,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* < K_{3,1}^* \\ (\beta_{1,1,1}^* + \beta_{1,1,2}^*) (\beta_{2,3,1}^* + \beta_{2,3,2}^*), & \quad x_{1,i}^* \geq K_{1,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* \geq K_{3,1}^* \end{aligned}$$

- b. Pengaruh tidak langsung $x_{2,i}$ terhadap $y_{2,i}$ melalui $y_{1,i}$

$$\begin{aligned} \beta_{1,2,1}^* (\beta_{2,3,1}^*), & \quad x_{2,i}^* < K_{2,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* < K_{3,1}^* \\ \beta_{1,2,1}^* (\beta_{2,3,1}^* + \beta_{2,3,2}^*), & \quad x_{2,i}^* < K_{2,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* \geq K_{3,1}^* \\ (\beta_{1,2,1}^* + \beta_{1,2,2}^*) (\beta_{2,3,1}^*), & \quad x_{2,i}^* \geq K_{2,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* < K_{3,1}^* \\ (\beta_{1,2,1}^* + \beta_{1,2,2}^*) (\beta_{2,3,1}^* + \beta_{2,3,2}^*), & \quad x_{2,i}^* \geq K_{2,1}^* \text{ dan } y_{1,i}^* \geq K_{3,1}^* \end{aligned}$$

Matriks X^* dalam model dengan satu knot dapat dinotasikan dalam Persamaan (16)

$$X^* = \begin{bmatrix} X_1^* & 0 \\ 0 & X_2^* \end{bmatrix}_{2n \times (2+2p(1+1)+s(1+1))} \quad (16)$$

dengan

$$X_1^* = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1}^* & (x_{1,1}^* - K_{1,1}^*)_+ & x_{2,1}^* & (x_{2,1}^* - K_{2,1}^*)_+ \\ 1 & x_{1,2}^* & (x_{1,2}^* - K_{1,1}^*)_+ & x_{2,2}^* & (x_{2,2}^* - K_{2,1}^*)_+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,n}^* & (x_{1,n}^* - K_{1,1}^*)_+ & x_{2,n}^* & (x_{2,n}^* - K_{2,1}^*)_+ \end{bmatrix}$$

$$X_2^* = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1}^* & (x_{1,1}^* - K_{1,1}^*)_+ & x_{2,1}^* & (x_{2,1}^* - K_{2,1}^*)_+ & y_{1,1}^* & (y_{1,1}^* - K_{3,1}^*)_+ \\ 1 & x_{1,2}^* & (x_{1,2}^* - K_{1,1}^*)_+ & x_{2,2}^* & (x_{2,2}^* - K_{2,1}^*)_+ & y_{1,2}^* & (y_{1,2}^* - K_{3,1}^*)_+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,n}^* & (x_{1,n}^* - K_{1,1}^*)_+ & x_{2,n}^* & (x_{2,n}^* - K_{2,1}^*)_+ & y_{1,n}^* & (y_{1,n}^* - K_{3,1}^*)_+ \end{bmatrix}$$

2. Model dengan dua titik knot

$$y_{1,i}^* = \beta_{1,1,0}^* + \beta_{1,1,1}^* x_{1,i}^* + \beta_{1,1,2}^* (x_{1,i}^* - K_{1,1}^*)_+ + \beta_{1,1,3}^* (x_{1,i}^* - K_{1,2}^*)_+ + \beta_{1,2,1}^* x_{2,i}^* + \beta_{1,2,2}^* (x_{2,i}^* - K_{2,1}^*)_+ + \beta_{1,2,3}^* (x_{2,i}^* - K_{2,2}^*)_+$$

$$y_{2,i}^* = \beta_{2,1,0}^* + \beta_{2,1,1}^* x_{1,i}^* + \beta_{2,1,2}^* (x_{1,i}^* - K_{1,1}^*)_+ + \beta_{2,1,3}^* (x_{1,i}^* - K_{1,2}^*)_+ + \beta_{2,2,1}^* x_{2,i}^* + \beta_{2,2,2}^* (x_{2,i}^* - K_{2,1}^*)_+ + \beta_{2,2,3}^* (x_{2,i}^* - K_{2,2}^*)_+ + \beta_{2,3,1}^* y_{1,i}^* + \beta_{2,3,2}^* (y_{1,i}^* - K_{3,1}^*)_+ + \beta_{2,3,3}^* (y_{1,i}^* - K_{3,2}^*)_+$$

Matriks X^* dalam model dengan dua knot dapat dinotasikan dalam Persamaan (17)

$$X^* = \begin{bmatrix} X_1^* & 0 \\ 0 & X_2^* \end{bmatrix}_{2n \times (2+2p(1+2)+s(1+2))} \quad (17)$$

Dengan

$$X_1^* = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1}^* & (x_{1,1}^* - K_{1,1}^*)_+ & (x_{1,1}^* - K_{1,2}^*)_+ & x_{2,1}^* & (x_{2,1}^* - K_{2,1}^*)_+ & (x_{2,1}^* - K_{2,2}^*)_+ \\ 1 & x_{1,2}^* & (x_{1,2}^* - K_{1,1}^*)_+ & (x_{1,2}^* - K_{1,2}^*)_+ & x_{2,2}^* & (x_{2,2}^* - K_{2,1}^*)_+ & (x_{2,2}^* - K_{2,2}^*)_+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,n}^* & (x_{1,n}^* - K_{1,1}^*)_+ & (x_{1,n}^* - K_{1,2}^*)_+ & x_{2,n}^* & (x_{2,n}^* - K_{2,1}^*)_+ & (x_{2,n}^* - K_{2,2}^*)_+ \end{bmatrix}$$

$$X_2^* = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1}^* & (x_{1,1}^* - K_{1,1}^*)_+ & (x_{1,1}^* - K_{1,2}^*)_+ & x_{2,1}^* & (x_{2,1}^* - K_{2,1}^*)_+ & (x_{2,1}^* - K_{2,2}^*)_+ & y_{1,1}^* & (y_{1,1}^* - K_{3,1}^*)_+ & (y_{1,1}^* - K_{3,2}^*)_+ \\ 1 & x_{1,2}^* & (x_{1,2}^* - K_{1,1}^*)_+ & (x_{1,2}^* - K_{1,2}^*)_+ & x_{2,2}^* & (x_{2,2}^* - K_{2,1}^*)_+ & (x_{2,2}^* - K_{2,2}^*)_+ & y_{1,2}^* & (y_{1,2}^* - K_{3,1}^*)_+ & (y_{1,2}^* - K_{3,2}^*)_+ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,n}^* & (x_{1,n}^* - K_{1,1}^*)_+ & (x_{1,n}^* - K_{1,2}^*)_+ & x_{2,n}^* & (x_{2,n}^* - K_{2,1}^*)_+ & (x_{2,n}^* - K_{2,2}^*)_+ & y_{1,n}^* & (y_{1,n}^* - K_{3,1}^*)_+ & (y_{1,n}^* - K_{3,2}^*)_+ \end{bmatrix}$$

1.5.6 Weighted Least Squares (WLS)

Prinsip dasar Metode *Weighted Least Squares* (WLS) identik dengan *Ordinary Least Squares* (OLS), yakni meminimumkan jumlah kuadrat residual. Metode OLS tidak mengakomodasi adanya korelasi antara kedua persamaan. Sementara itu, metode WLS mampu mengakomodasi korelasi antara residual menggunakan pembobot (*weighted*) berupa invers dari matriks varians-kovarians residual (Σ^{-1}). Perhitungan korelasi antar residual pada setiap endogen menghasilkan bentuk korelasi sebagai berikut:

$$\rho_{i,j} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{1,i}^* - \hat{y}_{1,i}^*)(y_{2,i}^* - \hat{y}_{2,i}^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_{1,i}^* - \hat{y}_{1,i}^*)^2 \sum_{i=1}^n (y_{2,i}^* - \hat{y}_{2,i}^*)^2}}$$

Σ pada Persamaan (18) merupakan matriks varians kovarians yang berukuran $2n \times 2n$. Diasumsikan bahwa varians residual pada masing-masing variabel endogen tidak sama, sementara itu $\text{Cov}(y_1, y_2)$ diasumsikan homogen.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & \rho\sigma_1\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & 0 & 0 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \rho\sigma_1\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Bentuk matriks Σ dapat disederhanakan menjadi submatriks sebagai berikut

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

dengan

$$\Sigma_{kk} = \begin{bmatrix} \sigma_{k1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{k2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{kn}^2 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \rho\sigma_1\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho\sigma_1\sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho\sigma_1\sigma_2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Estimasi parameter dalam analisis jalur nonparametrik *spline truncated* dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Weighted Least Squares* (WLS). Tahapan untuk memperoleh estimator kurva regresi melalui proses optimasi *Weighted Least Squares* (WLS) dilakukan dengan meminimumkan Q sebagai persamaan fungsi minimum (Ubaidillah et al., 2022).

$$\begin{aligned} \min\{Q\} &= \min\{\tilde{\epsilon}^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{\epsilon}^*\} \\ &= \min\{(\tilde{y}^* - X^* \tilde{\beta}^*)^t \Sigma^{-1} (\tilde{y}^* - X^* \tilde{\beta}^*)\} \end{aligned} \quad (19)$$

Kemudian, menurunkan Persamaan (19) secara parsial (*partial derivative*) yang menghasilkan Persamaan (20)

$$\begin{aligned} Q(\tilde{\beta}^*) &= (\tilde{y}^* - X^* \tilde{\beta}^*)^t \Sigma^{-1} (\tilde{y}^* - X^* \tilde{\beta}^*) \\ &= (\tilde{y}^{*t} - \tilde{\beta}^{*t} X^{*t}) \Sigma^{-1} (\tilde{y}^* - X^* \tilde{\beta}^*) \\ &= \tilde{y}^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* - \tilde{\beta}^{*t} X^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* - \tilde{y}^{*t} \Sigma^{-1} X^* \tilde{\beta}^* + \tilde{\beta}^{*t} X^{*t} \Sigma^{-1} X^* \tilde{\beta}^* \\ &= \tilde{y}^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* - 2\tilde{\beta}^{*t} X^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* + \tilde{\beta}^{*t} X^{*t} \Sigma^{-1} X^* \tilde{\beta}^* \end{aligned} \quad (20)$$

Menurunkan Persamaan (20) terhadap $\tilde{\beta}^*$ dan disamakan dengan nol sehingga diperoleh estimator $\tilde{\beta}^*$ pada Persamaan (21) (Hidayat et al., 2019):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Q(\tilde{\beta}^*)}{\partial \tilde{\beta}^*} \right|_{\tilde{\beta}^* = \hat{\beta}^*} &= -2X^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* + 2X^{*t} \Sigma^{-1} X^* \hat{\beta}^* \\ 0 &= -2X^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* + 2X^{*t} \Sigma^{-1} X^* \hat{\beta}^* \\ X^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* &= X^{*t} \Sigma^{-1} X^* \hat{\beta}^* \\ \hat{\beta}^* &= (X^{*t} \Sigma^{-1} X^*)^{-1} X^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* \end{aligned} \quad (21)$$

Mensubstitusi $\hat{\beta}^*$ ke dalam persamaan fungsi $\hat{y}^* = X^* \hat{\beta}^*$ sehingga memperoleh estimator dari fungsi jalur nonparametrik *spline truncated* pada Persamaan (22).

$$\begin{aligned} \hat{y}^* &= X^* \hat{\beta}^* \\ &= X^* (X^{*t} \Sigma^{-1} X^*)^{-1} X^{*t} \Sigma^{-1} \tilde{y}^* \\ &= H(\tilde{K}) \tilde{y}^* \end{aligned} \quad (22)$$

dengan $\hat{y}^* = (\hat{y}_1^*, \hat{y}_2^*)^t$, $H(\tilde{K})$ merupakan matriks dari model yang bergantung pada titik knot, dan $\tilde{K}$ merupakan titik knot (Ubaidillah et al., 2022).

1.5.7 Pemilihan Titik Knot Optimal

Spline yang optimal dan kemulusan kurva bergantung pada pemilihan titik knot. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan titik knot optimal adalah *Generalized Cross Validation* (GCV) (Anggraeni et al., 2023). Nilai GCV terkecil mengindikasikan titik knot yang optimal (Cayo & Haryatmi, 2021). Secara umum, rumus GCV untuk pemilihan titik knot optimal dinyatakan dalam Persamaan (23).

$$GCV(\tilde{K}) = \frac{(2n)^{-1} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n (y_{k,i}^* - \hat{y}_{k,i}^*)^2}{\left(1 - \frac{\text{trace}[H(\tilde{K})]}{2n}\right)^2} \quad (23)$$

dengan

$$H(\tilde{K}) = X(X^t \Sigma^{-1} X)^{-1} X^t \Sigma^{-1}$$

Keterangan:

$GCV(\tilde{K})$: nilai GCV dari setiap nilai knot

1.5.8 Pengujian Hipotesis Linier Parameter

Pengujian parameter secara simultan pada model digunakan untuk mengevaluasi signifikansi pengaruh variabel eksogen terhadap variabel endogen dalam suatu model jalur. Pengujian ini bertujuan untuk mengetahui apakah seluruh parameter dalam model memiliki pengaruh yang signifikan secara bersama-sama terhadap variabel endogen. Hipotesis yang diuji pada pengujian hipotesis secara simultan adalah sebagai berikut:

$$H_0: \beta_{k,0} = \beta_{k,\ell,v} = \beta_{k,\ell,(1+u)} = \beta_{k,(p+s),v} = \beta_{k,(p+s),(1+u)} = 0$$

$$H_1: \text{minimal terdapat satu } \beta_{k,0} \neq 0 \text{ atau } \beta_{k,\ell,v} \neq 0 \text{ atau } \beta_{k,\ell,(1+u)} \neq 0 \text{ atau } \beta_{k,(p+s),v} \neq 0 \text{ atau } \beta_{k,(p+s),(1+u)} \neq 0; k = 1, 2; \ell = 1, 2, \dots, p; v = 1; s = 1 \text{ dan } u = 1, 2, \dots, l$$

Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji F (Tupen & Budiantara, 2011)

$$F_{hit} = \frac{\frac{SSH}{h(1+l)}}{\frac{SSE}{2n - (h(1+l)) - 1}} \quad (24)$$

$$\text{dengan } SSH = (\mathbf{C}\hat{\beta} - \tilde{\alpha})' [\mathbf{C}(\mathbf{X}^* \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{C}']^{-1} (\mathbf{C}\hat{\beta} - \tilde{\alpha})$$

$$\text{dan } SSE = \tilde{y}'(I - \mathbf{X}^*(\mathbf{X}^* \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*'}) \tilde{y}$$

Kriteria keputusan menolak H_0 jika $F_{hit} > F_{\alpha, (h(1+l)), (2n - (h(1+l)) - 1)}$ atau $p - \text{value} < \alpha_{0,05}$.

Hal ini mengindikasikan bahwa hubungan antara variabel eksogen dan endogen signifikan secara simultan.

Keterangan:

h : jumlah variabel eksogen

l : jumlah titik knot

n : jumlah pengamatan

$\tilde{y}$: vektor variabel endogen

1.5.9 Indeks Pembangunan Manusia

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) mampu mengukur tingkat kemajuan suatu negara dalam aspek kesehatan, pendidikan, dan pendapatan, yang mencerminkan kualitas hidup serta kesejahteraan masyarakatnya (Badan Pusat Statistik, 2024). Indeks Pembangunan Manusia (IPM) adalah ukuran ringkasan pencapaian rata-rata dalam dimensi-dimensi utama pembangunan manusia yaitu umur panjang dan sehat, berpengetahuan, dan memiliki standar hidup yang layak. IPM adalah rata-rata geometrik dari indeks-indeks yang dinormalisasi untuk masing-masing dari tiga dimensi tersebut. Penggunaan rata-rata geometrik bertujuan untuk menyeimbangkan kontribusi setiap dimensi sehingga ketimpangan pada satu dimensi tidak dapat ditutupi oleh dimensi lainnya.

Dimensi Kesehatan dalam IPM direpresentasikan oleh angka harapan hidup saat lahir. Dimensi pendidikan diukur dari rata-rata lama sekolah untuk penduduk dewasa berusia 25 tahun ke atas dan harapan lama sekolah untuk anak-anak usia masuk sekolah, yang mencerminkan capaian pendidikan masa lalu dan potensi pendidikan di masa mendatang. Sementara itu, dimensi standar hidup diukur dengan pendapatan nasional bruto (PNB) per kapita. Namun, data PNB tidak tersedia pada tingkat daerah, sehingga digunakan indikator pengeluaran riil per kapita disesuaikan sebagai alternatif untuk merepresentasikan dimensi standar hidup layak. Dalam upaya untuk membandingkan antardaerah, dibentuklah klasifikasi IPM. Capaian IPM diklasifikasikan menjadi beberapa kategori yang ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Kategori Pembangunan Manusia

Nilai IPM	Kategori Pembangunan Manusia
< 60	Rendah
$60 \leq IPM < 70$	Sedang
$70 \leq IPM < 80$	Tinggi
> 80	Sangat Tinggi

BAB II METODE PENELITIAN

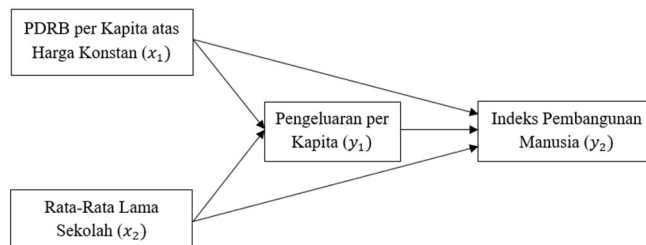
2.1 Sumber Data dan Variabel

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang bersumber dari publikasi BPS. Secara spesifik, data Indeks Pembangunan Manusia (IPM), Rata-Rata Lama Sekolah (RLS) dan pengeluaran per kapita diperoleh dari publikasi “Indeks Pembangunan Manusia Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2024”. Sementara itu, data mengenai PDRB diperoleh melalui laman <https://sulsel.bps.go.id/> (diakses pada 16 September 2025). Unit pengamatan adalah seluruh kabupaten dan kota di Provinsi Sulawesi Selatan sebanyak 24 pengamatan. Variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini ditunjukkan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Variabel Penelitian

Simbol	Variabel	Definisi Operasional	Satuan
x_1	Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) per Kapita atas Harga Konstan	Jumlah nilai barang dan jasa akhir yang dihasilkan oleh seluruh unit produksi di suatu daerah dalam periode tertentu dibagi dengan jumlah penduduk dan dihitung berdasarkan harga konstan pada tahun dasar tertentu.	Ribu Rupiah
x_2	Rata-Rata Lama Sekolah (RLS)	Jumlah tahun yang digunakan oleh penduduk dalam menjalani pendidikan formal	Tahun
y_1	Pengeluaran Per Kapita Disesuaikan	Rata-rata biaya yang dikeluarkan oleh penduduk untuk konsumsi barang dan jasa dalam satu tahun, yang telah disesuaikan dengan paritas daya beli	Ribu Rupiah
y_2	Indeks Pembangunan Manusia (IPM)	Indikator yang digunakan untuk mengukur capaian pembangunan manusia berbasis pada tiga dimensi dasar, yaitu kesehatan, pendidikan, dan standar hidup layak.	Angka

dengan diagram jalur penelitian ditampilkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Jalur Penelitian

2.2 Analisis Data

Metode analisis yang dilakukan adalah analisis jalur nonparametrik *spline truncated* dengan proses estimasi menggunakan metode *Weighted Least Squares* (WLS).

Pengolahan data dilakukan dengan bantuan perangkat lunak *R-Studio*. Tahapan analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan analisis deskriptif pada data untuk mengetahui gambaran umum mengenai Indeks Pembangunan Manusia di Provinsi Sulawesi Selatan dengan variabel-variabel yang memengaruhi IPM dan membuat *scatter plot* antara variabel eksogen dengan variabel endogen untuk mengetahui pola hubungan yang terjadi.
2. Menguji korelasi antara variabel endogen 1 dan endogen 2 dengan menggunakan uji korelasi pearson berdasarkan Persamaan (6).
3. Melakukan uji asumsi linieritas antara variabel eksogen dan variabel endogen menggunakan uji RESET berdasarkan Persamaan (9).
4. Melakukan normalisasi data ke dalam rentang [0,1] menggunakan metode normalisasi *min-max* berdasarkan Persamaan (10).
5. Mengestimasi model jalur nonparametrik *spline truncated* menggunakan metode OLS tanpa matriks pembobot varians kovarians (Σ^{-1}) dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Melakukan estimasi model tanpa pembobot (Σ^{-1}) pada 1 dan 2 titik knot dengan jumlah knot yaitu satu dan dua titik knot.
 - b. Memilih titik knot optimal berdasarkan nilai *Generalized Cross-Validation* (GCV) minimum.
 - c. Melakukan estimasi model menggunakan titik knot optimal
 - d. Memperoleh residual untuk endogen 1 dan endogen 2 dari hasil estimasi.
6. Mengestimasi matriks pembobot (Σ^{-1}) berdasarkan residual sesuai hasil pada Langkah 5.
7. Mengestimasi model jalur nonparametrik *spline truncated* menggunakan metode *Weighted Least Squares* (WLS) dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Mengestimasi model pada 1 dan 2 titik knot menggunakan matriks pembobot (Σ^{-1}) berdasarkan Persamaan (22).
 - b. Memilih titik knot optimal berdasarkan nilai *Generalized Cross-Validation* (GCV) minimum berdasarkan Persamaan (23).
 - c. Melakukan estimasi model menggunakan titik knot optimal.
 - d. Melakukan denormalisasi model jalur nonparametrik *spline truncated* ke bentuk awal tanpa *scaling* menggunakan rumus di bawah ini:

$$\begin{aligned}
 K_{\ell,u} &= \min(x_\ell) + K_{\ell,u}^*(\max(x_\ell) - \min(x_\ell)) \\
 K_{(p+s),u} &= \min(y_s) + K_{(p+s),u}^*(\max(y_s) - \min(y_s)) \\
 \beta_{k,\ell,v} &= \frac{\max(y_k) - \min(y_k)}{\max(x_\ell) - \min(x_\ell)} \beta_{k,\ell,v}^* \\
 \beta_{k,(p+s),v} &= \frac{\max(y_k) - \min(y_k)}{\max(y_s) - \min(y_s)} \beta_{k,(p+s),v}^* \\
 \beta_{k,\ell,(1+u)} &= \frac{\max(y_k) - \min(y_k)}{\max(x_\ell) - \min(x_\ell)} \beta_{k,\ell,(1+u)}^* \\
 \beta_{k,(p+s),(1+u)} &= \frac{\max(y_k) - \min(y_k)}{\max(y_s) - \min(y_s)} \beta_{k,(p+s),(1+u)}^* \\
 \beta_{k,0} &= \min(y_k) + [\max(y_k) - \min(y_k)] \beta_{k,0}^* - \sum_{\ell=1}^p \beta_{k,\ell,v} \min(x_\ell) - \sum_{s=1}^{k-1} \beta_{k,(p+s),v} \min(y_s)
 \end{aligned}$$

- e. Menguji hipotesis linier parameter pada model menggunakan Persamaan (24).
8. Melakukan interpretasi model.