

Hitzer [2007], Bahri [2008], Bahri [2013], Hitzer [2016]. Transformasi ini juga sangat berguna untuk pemrosesan sinyal quaternion. Quaternion pertama kali diperkenalkan oleh W.R. Hamilton sebagai perluasan dari bilangan kompleks Dospra [2015]. Berbeda dengan bilangan kompleks yang hanya memiliki satu unit imajiner, quaternion melibatkan tiga unit imajiner, dan perkalian keempat komponen quaternion tidak bersifat komutatif. Beberapa sifat penting TFQ, seperti translasi, modulasi, konvolusi, korelasi, teorema perkalian, serta hubungan antara fungsi karakteristik quaternion dan TFQ, telah dibuktikan dalam Bahri [2018] untuk digunakan dalam penurunan sifat fungsi probabilitas quaternion dan momen quaternion pada bidang aljabar quaternion matematika statistika.

Dalam beberapa tahun terakhir, minat dalam studi transformasi Fourier quaternion dan transformasi umum lainnya semakin meningkat. Sebagai contoh, para penulis dalam Bahri [2014], Bahri dan Saleh [2017], Shah dan Tantary [2018], Shah dkk [2021] memperkenalkan transformasi shearlet, transformasi wavelet, transformasi Fourier Windowed, dan distribusi Wigner-Ville dalam bidang quaternion. Beberapa peneliti juga mempelajari distribusi Wigner-Ville yang terkait dengan transformasi kanonikal linear dan aplikasinya dalam Xin dan Li [2021], Wei and Li [2014], Zhang [2009]. Dalam Shah dan Tantary [2020], para penulis mengusulkan transformasi-S kanonik linear (TSKL), yang merupakan generalisasi dari transformasi-S klasik dalam konteks transformasi linear kanonik (TKL beberapa sifat penting dari transformasi-S klasik dapat diterapkan pada TSKL, termasuk modulasi, pergeseran, prinsip ketidakpastian, dan lain-lain, misalnya, Bahri dkk [2019], Xiang dan Qin [2009], Bhat dan Dar [2021]. Dalam Bhat dan Dar [2023], telah dilakukan penelitian tentang transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ) dan diperoleh prinsip ketidakpastian. Namun, beberapa prinsip ketidakpastian lain yang terkait dengan transformasi ini masih belum dikaji. Oleh karena itu, penelitian ini melanjutkan investigasi yang dimulai oleh Bhat dan Dar [2023] untuk lebih memahami transformasi-S kanonik linear (TSKL). Dalam penelitian ini pula ditunjukkan beberapa sifat dasar terkait transformasi yang diusulkan ini secara lebih rinci.

Prinsip ketidakpastian (*uncertainty principle*) diperkenalkan oleh Werner Heisenberg pada tahun 1927 dan menjadi tonggak fundamental dalam mekanika

kuantum Heisenberg [1927]. Prinsip ini menegaskan bahwa tidak mungkin mengukur secara bersamaan posisi dan momentum suatu partikel. Prinsip ketidakpastian merupakan sifat penting yang memiliki bentuk khusus untuk setiap transformasi, termasuk TSKLQ. Berdasarkan sifat ini, berbagai prinsip ketidakpastian dikembangkan untuk TSKLQ. Hubungan ini dapat dianggap sebagai generalisasi non-trivial dari prinsip ketidakpastian pada transformasi quaternion kanonik linear (TKLQ) dan transformasi quaternion Windowed kanonik linear (TWKLQ). Prinsip ketidakpastian untuk TSKLQ berbeda dari yang diusulkan dalam Bhat dan Dar [2023].

Perjalanan penelitian yang terkait dipaparkan dalam tabel berikut.

Tabel 1.1 Ringkasan Jurnal Terkait Transformasi dan Analisis Sinyal

No.	Artikel	Pembahasan
1	The linear canonical transform and its application to time-frequency signal analysis Xiang dan Qin [2009]	Membahas tentang transformasi kanonik linear dan aplikasinya dalam analisis sinyal waktu-frekuensi. Transformasi ini merupakan generalisasi dari transformasi Fourier dan transformasi lainnya.
2	A generalized S-transform in linear canonical transform Bahri dkk [2019]	Membahas transformasi-S kanonik linear untuk mendapatkan beberapa sifat yang tidak dimiliki oleh transformasi konvensional.
3	Uncertainty principles related to quaternionic windowed Fourier transform Bahri dan Ashino [2020]	Membahas transformasi-S kanonik linear untuk mendapatkan beberapa sifat yang tidak dimiliki oleh transformasi konvensional.
4	Multiresolution analysis for linear canonical s-transform. Bhat dan Dar [2021]	Memperkenalkan linear canonical S-transform (LCST) yang memiliki sejumlah karakteristik penting yang tidak ditemukan pada transformasi waktu-frekuensi konvensional.
5	Quaternion linear canonical S-transform and associated uncertainty principles. Bhat dan Dar [2023]	Memperkenalkan transformasi-S kanonik linear quaternion yang merupakan perluasan dari transformasi-S kanonik linear, kemudian menerapkan prinsip ketidakpastian Heisenberg dan logaritmik.

1.2. Rumusan Masalah

1. Bagaimana membangun prinsip ketidakpastian pada TSKLQ?
2. Bagaimana definisi transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ)?
3. Bagaimana sifat-sifat transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ)?
4. Bagaimana relasi TKLQ dengan TFQ?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini antara lain sebagai berikut.

1. Membangun definisi transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ).
2. Menurunkan sifat-sifat transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ)
3. Membuat relasi transformasi kanonik linear quaternion (TKLQ) dengan transformasi Fourier quaternion (TFQ).

1.4. Batasan Penelitian

Dalam menyelesaikan masalah yang disebutkan dalam subbab 1.2. akan digunakan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Teori yang dibangun membahas tentang definisi dan sifat-sifat transformasi-S kanonik linear (TSKL) dan transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ).
2. Sifat-sifat transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ) yang akan dibuktikan seperti sifat orthogonal dan invers TSKLQ.

1.5. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tesis ini sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian dan sistematika penulisan yang akan dilakukan dalam penyusunan Disertasi.

BAB II PRINSIP KETIDAKPASTIAN PADA TRANSFORMASI-S KANONIK LINEAR QUATERNION

Pada bab ini berisi tentang konstruksi definisi TSKLQ dan beberapa prinsip ketidakpastiannya, yaitu prinsip ketidakpastian Heisenberg, ketaksamaan Pitt, dan ketaksamaan Hausdorff-Young dalam kerangka quaternion.

BAB III KETAKSAMAAN LIEB DAN NAZAROV PADA TRANSFORMASI-S KANONIK LINEAR QUATERNION

Pada bab ini berisi tentang konstruksi definisi TSKLQ dan beberapa prinsip ketidakpastiannya, yaitu ketaksamaan Lieb dan ketaksamaan Nazarov dalam kerangka quaternion..

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

1.6. Keterbaruan Penelitian

Peneliti (Bhat dan Dar [2023]) telah mengkaji transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ) dan prinsip ketidakpastian dasar sehingga masih ada prinsip ketidakpastian yang lain yang dapat dikaji. Disertasi ini mengembangkan beberapa prinsip ketidakpastian yang berhubungan dengan TSKLQ.

BAB II

PRINSIP KETIDAKPASTIAN PADA TRANSFORMASI-S KANONIK LINEAR QUATERNION

2.1. Abstrak

Transformasi Stockwell (transformasi-S) kanonik linear quaternion diperkenalkan sebagai generalisasi dari transformasi-S kanonik linear berbasis quaternion. Penelitian ini menyelidiki sifat-sifat serta berbagai prinsip ketidakpastian yang terkait dengan transformasi-S kanonik linear quaternion. Hasil yang diperoleh merupakan perluasan dari prinsip ketidakpastian pada transformasi kanonik linear quaternion dan transformasi kanonik linear berjendela quaternion.

2.2. Pendahuluan

Saat ini, penelitian mengenai transformasi Fourier quaternion dan transformasi ke bentuk umum lainnya menunjukkan perkembangan yang pesat. Sebagai contoh, Bahri [2014], Bahri dan Saleh [2017], Shah dan Tantary [2018], Shah dkk [2021] membahas transformasi shearlet, transformasi wavelet, transformasi Fourier windowed, serta distribusi Wigner-Ville dalam konteks quaternion. Selain itu, Xin dan Li [2021], Wei and Li [2014], Zhang [2009] meneliti distribusi Wigner-Ville yang berkaitan dengan transformasi kanonik linear beserta aplikasinya.

Penulis dalam Shah dan Tantary [2020] memperkenalkan transformasi-S kanonik linear sebagai pengembangan dari transformasi-S pada kerangka transformasi kanonik linear. Beberapa sifat esensial dari transformasi-S klasik, seperti modulasi, pergeseran, dan prinsip ketidakpastian, juga dapat diterapkan pada transformasi-S kanonik linear, lihat Bahri dkk [2019], Xiang dan Qin [2009], dan Bhat dan Dar [2021].

Penulis dalam Bhat dan Dar [2023] telah meneliti transformasi-S kanonik

linear quaternion dan memperoleh beberapa prinsip ketidakpastian. Namun, sejumlah prinsip ketidakpastian yang berkaitan dengan transformasi-S kanonik linear quaternion masih belum dieksplorasi secara menyeluruh.

Penelitian ini melanjutkan investigasi yang telah dilakukan oleh penulis dalam Bhat dan Dar [2023] untuk memperdalam pemahaman mengenai transformasi-S kanonik linear. Beberapa sifat fundamental dari transformasi-S kanonik linear yang diusulkan akan dipaparkan secara rinci.

Penelitian ini secara komprehensif mengkaji beberapa sifat mendasar yang berkaitan dengan transformasi yang diusulkan. Prinsip ketidakpastian diakui memiliki peran penting dalam mengkarakterisasi atribut spesifik dari berbagai transformasi, termasuk transformasi kanonik linear quaternion (TKLQ). Berdasarkan sifat-sifat dasar tersebut, serangkaian prinsip ketidakpastian yang berkaitan dengan TSKLQ berhasil diperoleh. Hubungan-hubungan signifikan ini dapat dianggap sebagai generalisasi substansial dari prinsip ketidakpastian yang terkait dengan TKLQ dan transformasi kanonik linear berjendela quaternion (TKLWQ). Selain itu, prinsip-prinsip ketidakpastian yang berlaku pada TSKLQ menunjukkan perbedaan yang jelas dibandingkan dengan prinsip-prinsip yang diperkenalkan dalam Bhat dan Dar [2023].

Struktur utama artikel ini disusun sebagai berikut. Bagian 2.3. antara lain berisi kumpulan beberapa fakta dasar mengenai aljabar quaternion beserta sifat-sifatnya dan finisi transformasi Fourier quaternion (TFQ) dan sifat-sifat pentingnya. Bagian 2.4. mengulas secara singkat definisi transformasi kanonik linear quaternion (TKLQ) serta hubungannya dengan transformasi Fourier quaternion (TFQ). Selanjutnya, Bagian 2.5. membahas pengenalan transformasi kanonik linear quaternion S (TSKLQ), turunan beberapa sifat penting, dan prinsip-prinsip ketidakpastian yang terkait dengan transformasi tersebut.

2.3. Pengantar

Pada bagian ini, disajikan pembahasan tentang aljabar quaternion dan transformasi Fourier quaternion yang berikutnya banyak digunakan.

2.3.1. Aljabar Quaternion

Andaikan $\mathbb{H}$ adalah quaternion yang dilengkapi dengan sifat asosiatif. Quaternion $q \in \mathbb{H}$ dapat dituliskan dalam bentuk sebagaimana Bülow [1999]

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}, \quad (2.1)$$

di mana tiga bagian imajiner berbeda quaternion unit $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ and $\mathbf{k}$ memenuhi aturan perkalian:

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1. \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) menunjukkan bahwa perkalian tidak komutatif di $\mathbb{H}$. Untuk suatu $q \in \mathbb{H}$, maka berlaku

$$q = q_0 + \mathbf{q} = Sc(q) + V(q), \quad (2.3)$$

di mana $q_0 = Sc(q)$ dan $V(q) = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ secara berturut-turut menyatakan bagian skalar dan vektor atau quaternion murni.

Konjugasi quaternion $\bar{q}$ diberikan sebagai

$$\bar{q} = q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3. \quad (2.4)$$

Persamaan ini memenuhi

$$\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}. \quad (2.5)$$

Untuk setiap $q \in \mathbb{H}$, bagian skalar dan vektor dapat dituliskan dalam bentuk

$$Sc(q) = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \quad \text{and} \quad V(q) = \frac{1}{2}(q - \bar{q}). \quad (2.6)$$

Panjang atau norm dari quaternion q didefinisikan oleh persamaan

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (2.7)$$

Untuk setiap $q, t, p \in \mathbb{H}$ berlaku:

$$Sc(q) \leq |q|, \quad |\mathbf{q}| = |V(q)| \leq |q|, \quad \text{dan} \quad Sc(qpt) = Sc(ptq) = Sc(qpt). \quad (2.8)$$

Selanjutnya didefinisikan inner product untuk dua fungsi quaternion $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$ sebagai

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad d\mathbf{x} = dx_1 dx_2. \quad (2.9)$$

dengan simetri perkalian skalar

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= Sc(f, g) \\ &= \frac{1}{2} [(f, g) + (g, f)].\end{aligned}\quad (2.10)$$

Untuk $f = g$ pada persamaan (2.10), diperoleh norm $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})} = (f, f)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (2.11)$$

2.3.2. Transformasi Fourier Quaternion Dua Sisi

Pada bagian ini, dimulai dengan mendefinisikan transformasi Fourier quaternion (TFQ) dua-sisi, selanjutnya akan dikumpulkan beberapa sifat yang akan dibutuhkan nanti. Penjelasan lengkap tentang TFQ dan sifat-sifatnya dapat ditemukan dalam Chen dkk [2015], Hitzer [2007], Lian [2018], Lin [2020], Aboue [2020].

Definisi 2.3.1 Diberikan g dalam $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, definisi transformasi Fourier quaternion dua-sisi dari g dinyatakan sebagai:

$$\mathcal{F}_Q\{g\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2\pi\omega_1 x_1} g(\mathbf{x}) e^{-j2\pi\omega_2 x_2} d\mathbf{x}. \quad (2.12)$$

Contoh 1 Misal diberikan fungsi

$$g(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

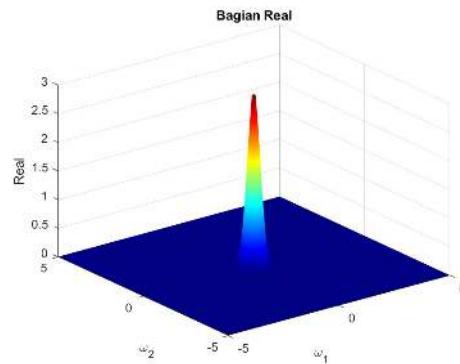
Maka transformasi Fourier quaternion dua-sisi diberikan oleh:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q\{g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2\pi\omega_1 x_1} g(\mathbf{x}) e^{-j2\pi\omega_2 x_2} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2\pi\omega_1 x_1} e^{-(x_1^2 + x_2^2)} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) e^{-j2\pi\omega_2 x_2} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2\pi\omega_1 x_1 - x_1^2} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) e^{-j2\pi\omega_2 x_2 - x_2^2} d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Dengan integral Gaussian terhadap $d(x_1, x_2)$, diperoleh:

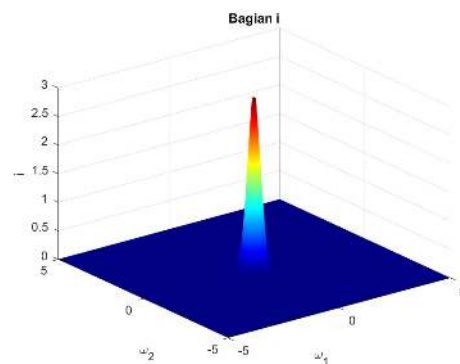
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Q\{g\}(\omega) &= \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \omega_1^2} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \omega_2^2} \\ &= \pi e^{-\pi^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\end{aligned}$$

Visualisasi grafik dari contoh fungsi transformasi kanonik linear quaternion disajikan pada gambar berikut.



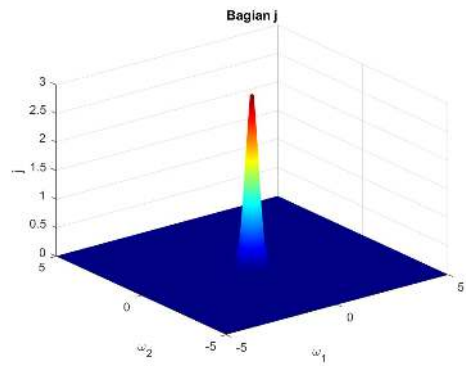
Gambar 2.1

Gambar 2.1 menunjukkan visualisasi grafis bagian real fungsi transformasi Fourier dari fungsi bernilai quaternion.



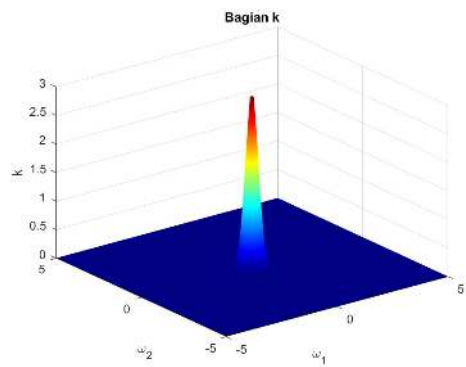
Gambar 2.2

Gambar 2.2 menunjukkan visualisasi grafis bagian i fungsi transformasi Fourier dari fungsi bernilai quaternion.



Gambar 2.3

Gambar 2.3 menunjukkan visualisasi grafis bagian j fungsi transformasi Fourier dari fungsi bernilai quaternion.



Gambar 2.4

Gambar 2.4 menunjukkan visualisasi grafis bagian k fungsi transformasi Fourier dari fungsi bernilai quaternion.

Definisi berikut menyajikan invers dari TFQ, yang menyatakan bahwa fungsi quaternion asli dapat dihasilkan menggunakan TFQ-nya seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

Definisi 2.3.2 Misalkan $g \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dan $\mathcal{F}_Q\{g\} \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$. Transformasi Fourier invers quaternion untuk g didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{F}_Q^{-1}[\mathcal{F}_Q\{g\}](x) = g(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i2\pi\omega_1 x_1} \mathcal{F}_Q\{g\}(\omega) e^{j2\pi\omega_2 x_2} d\omega. \quad (2.13)$$

Contoh 2 Dari contoh 1

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Q^{-1}[\mathcal{F}_Q\{g\}](x) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i2\pi\omega_1 x_1} \mathcal{F}_Q\{g\}(\omega) e^{j2\pi\omega_2 x_2} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i2\pi\omega_1 x_1} \pi e^{-\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) e^{j2\pi\omega_2 x_2} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \pi e^{i2\pi\omega_1 x_1 - \pi^2\omega_1^2} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) e^{j2\pi\omega_2 x_2 - \pi^2\omega_2^2} d\omega \\ &= e^{-(x_1^2 + x_2^2)} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Dari relasi (2.13), untuk setiap $g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ diperoleh:

$$\mathcal{F}_Q\{\mathcal{F}_Q\{g\}\}(x) = g(-\omega). \quad (2.14)$$

2.4. Transformasi Kanonik Linear Quaternion (TKLQ)

Pada bagian ini, direview kembali definisi transformasi kanonik linear quaternion dua-sisi (disingkat TKLQ) dan kemudian menyajikan hubungannya dengan transformasi Fourier quaternion (TFQ). Hubungan ini dikembangkan untuk mendapatkan hasil utama di bagian berikutnya. Untuk pembahasan yang lebih rinci tentang transformasi ini, dapat dilihat pada pustaka Achak dkk [2019], Zhang dan Li [2018].

Definisi 2.4.1 Diberikan $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2) = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ dalam $SL(2, \mathbb{R})$. TKLQ dari $f \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H}) \cap L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ didefinisikan melalui:

$$\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q\{f\}(\omega) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) f(x) K_{A_2}(x_2, \omega_2) dx, & \text{untuk } b_1 b_2 \neq 0 \\ \sqrt{d_1} e^{i\left(\frac{c_1 d_1}{2}\right) \omega_1^2} f(d_1 \omega_1, d_2 \omega_2) \sqrt{d_2} e^{j\left(\frac{c_2 d_2}{2}\right) \omega_2^2}, & \text{untuk } b_1 b_2 = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

Untuk kasus di atas, fungsi kernel dari TKLQ didefinisikan:

$$K_{A_1}(x_1, \omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{\frac{i}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} x_1^2 - \frac{2}{b_1} x_1 \omega_1 + \frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad (2.16)$$

dan

$$K_{A_2}(x_2, \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{\frac{i}{2} \left(\frac{a_2}{b_2} x_2^2 - \frac{2}{b_2} x_2 \omega_2 + \frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} \right)}. \quad (2.17)$$

Penelitian ini mempertimbangkan TKLQ dalam kasus $b_1 b_2 \neq 0$. Untuk matriks parameter tertentu $A_1 = A_2 = (a_i, b_i, c_i, d_i) = (0, 1, -1, 0)$ dengan $i = 1, 2$, definisi (2.15) disederhanakan menjadi definisi TFQ dua-sisi berikut:

$$\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_1 x_1} f(x) e^{-j\omega_2 x_2} \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_Q \{f\} \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.18)$$

di mana $\mathcal{F}_Q \{f\}$ didefinisikan oleh (2.12).

Definisi 2.4.2 Untuk suatu $f \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dengan $\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\} \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, definisi invers dari TKLQ dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{-\frac{i}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} x_1^2 - \frac{2}{b_1} x_1 \omega_1 + \frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} \right)} \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{-\frac{i}{2} \left(\frac{a_2}{b_2} x_2^2 - \frac{2}{b_2} x_2 \omega_2 + \frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} \right)} d\omega. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dari definisi TKLQ (2.15), diketahui bahwa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{\frac{i}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} x_1^2 - \frac{2}{b_1} x_1 \omega_1 + \frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} \right)} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{\frac{i}{2} \left(\frac{a_2}{b_2} x_2^2 - \frac{2}{b_2} x_2 \omega_2 + \frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{i\frac{d_1}{2b_1} \omega_1^2} e^{-i\frac{x_1 \omega_1}{b_1}} e^{i\frac{a_1}{2b_1} x_1^2} f(x) \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{j\frac{d_2}{2b_2} \omega_2^2} e^{-j\frac{x_2 \omega_2}{b_2}} e^{j\frac{a_2}{2b_2} x_2^2} dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi b_1} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{d_1}{2b_1} \omega_1^2} \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) e^{-j\frac{d_2}{2b_2} \omega_2^2} \sqrt{2\pi b_2} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\frac{x_1 \omega_1}{b_1}} e^{i\frac{a_1}{2b_1} x_1^2} f(x) e^{j\frac{a_2}{2b_2} x_2^2} e^{-j\frac{x_2 \omega_2}{b_2}} dx \\ = \mathcal{F}_Q \{h\} \left(\frac{\omega}{2\pi b} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

di mana

$$h(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1}x_1^2} f(\mathbf{x}) e^{\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2}x_2^2} \quad (2.22)$$

dan

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi\mathbf{b}}\right) = \left(\frac{\omega_1}{2\pi b_1}, \frac{\omega_2}{2\pi b_2}\right).$$

Untuk setiap $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, berlaku:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega} = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.23)$$

yang dikenal sebagai Teorema Parseval untuk TKLQ dua-sisi.

Contoh 3 Misal diberikan fungsi

$$f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Untuk $b_1 b_2 \neq 0$, transformasi kanonik linear quaternion diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{\frac{\mathbf{i}}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} x_1^2 - \frac{2}{b_1} x_1 \omega_1 + \frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} \right)} e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{\frac{\mathbf{j}}{2} \left(\frac{a_2}{b_2} x_2^2 - \frac{2}{b_2} x_2 \omega_2 + \frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} \right)} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{e^{\frac{\mathbf{i}}{2} \left(\frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} \right)}}{\sqrt{2\pi b_1}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{\mathbf{i}}{2} \left(\frac{a_1}{b_1} x_1^2 - \frac{2}{b_1} x_1 \omega_1 \right)} e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \\ &\quad \times e^{\frac{\mathbf{j}}{2} \left(\frac{a_2}{b_2} x_2^2 - \frac{2}{b_2} x_2 \omega_2 \right)} dx_1 dx_2 \frac{e^{\frac{\mathbf{j}}{2} \left(\frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} \right)}}{\sqrt{2\pi b_2}}. \end{aligned}$$

Dengan memisahkan bagian skalar dihasilkan bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q\{f\}(\omega) &= \frac{e^{\frac{j}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi b_1}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{j}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}x_1^2 - \frac{2}{b_1}x_1\omega_1\right) - x_1^2} \\
&\quad \times e^{\frac{j}{2}\left(\frac{a_2}{b_2}x_2^2 - \frac{2}{b_2}x_2\omega_2\right) - x_2^2} dx_1 dx_2 \frac{e^{\frac{j}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi b_2}} \\
&= \frac{e^{\frac{j}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi b_1}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\left(\frac{a_1}{2b_1} - 1\right)x_1^2 - \frac{j\omega_1}{b_1}x_1} \\
&\quad \times e^{\left(\frac{a_2}{2b_2} - 1\right)x_2^2 - \frac{j\omega_2}{b_2}x_2} dx_1 dx_2 \frac{e^{\frac{j}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi b_2}} \\
&= \frac{e^{\frac{j}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right) + \left(1 - \frac{j\omega_1}{2b_1}\right)\left(\frac{\frac{j\omega_1}{b_1}}{2\left(1 - \frac{j\omega_1}{2b_1}\right)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi b_1}} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(1 - \frac{j\omega_1}{2b_1}\right)\left(x_1 + \frac{\frac{j\omega_1}{b_1}}{2\left(1 - \frac{j\omega_1}{2b_1}\right)}\right)^2} e^{-\left(1 - \frac{j\omega_2}{2b_2}\right)\left(x_2 + \frac{\frac{j\omega_2}{b_2}}{2\left(1 - \frac{j\omega_2}{2b_2}\right)}\right)^2} \\
&\quad \times dx_1 dx_2 \frac{e^{\frac{j}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right) + \left(1 - \frac{j\omega_2}{2b_2}\right)\left(\frac{\frac{j\omega_2}{b_2}}{2\left(1 - \frac{j\omega_2}{2b_2}\right)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi b_2}}.
\end{aligned}$$

Dengan mengintegalkan terhadap x_1 dan x_2 , dihasilkan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) &= \frac{e^{\frac{j}{2} \left(\frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} \right) + \left(1 - j \frac{a_1}{2b_1} \right) \left(\frac{j \frac{\omega_1^2}{b_1}}{2 \left(1 - j \frac{a_1}{2b_1} \right)} \right)^2}}{\sqrt{2\pi b_1}} \sqrt{\frac{\pi}{\left(1 - j \frac{a_1}{2b_1} \right)}} \\
&\times \sqrt{\frac{\pi}{\left(1 - j \frac{a_2}{2b_2} \right)}} \frac{e^{\frac{j}{2} \left(\frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} \right) + \left(1 - j \frac{a_2}{2b_2} \right) \left(\frac{j \frac{\omega_2^2}{b_2}}{2 \left(1 - j \frac{a_2}{2b_2} \right)} \right)^2}}{\sqrt{2\pi b_2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{\omega_1^2}{a_1^2 + 4b_1^2} - \frac{\omega_2^2}{a_2^2 + 4b_2^2}}}{\sqrt{b_1 b_2}} e^{\frac{j}{2} \left(\frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{a_1 \omega_1^2}{4b_1^2 (a_1^2 + 4b_1^2)} \right)} \left(\frac{b_1^2}{a_1^2 + 4b_1^2} \right)^{1/4} \\
&\times e^{(j \frac{1}{2} \arctan(\frac{a_1}{2b_1}))} \left(\frac{b_2^2}{a_2^2 + 4b_2^2} \right)^{1/4} e^{(j \frac{1}{2} \arctan(\frac{a_2}{2b_2}))} \\
&\times e^{\frac{j}{2} \left(\frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{a_2 \omega_2^2}{4b_2^2 (a_2^2 + 4b_2^2)} \right)} \\
&= \left(\frac{b_2^2}{a_2^2 + 4b_2^2} \times \frac{b_1^2}{a_1^2 + 4b_1^2} \right)^{1/4} \frac{1}{b_1 b_2} e^{-\frac{\omega_1^2}{a_1^2 + 4b_1^2} - \frac{\omega_2^2}{a_2^2 + 4b_2^2}} \\
&\times e^{\frac{j}{2} \left(\frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{a_1 \omega_1^2}{4b_1^2} + \left(a_1^2 + 4b_1^2 + \left(\arctan\left(\frac{a_1}{2b_1}\right) \right) \right) \right)} \\
&\times e^{\frac{j}{2} \left(\frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{a_2 \omega_2^2}{4b_2^2} + \left(a_2^2 + 4b_2^2 + \left(\arctan\left(\frac{a_2}{2b_2}\right) \right) \right) \right)}
\end{aligned}$$

atau transformasi kanonik linear quaternionnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega) &= \left(\frac{b_2^2}{a_2^2 + 4b_2^2} \times \frac{b_1^2}{a_1^2 + 4b_1^2} \right)^{1/4} \frac{1}{b_1 b_2} e^{-\frac{\omega_1^2}{a_1^2 + 4b_1^2} - \frac{\omega_2^2}{a_2^2 + 4b_2^2}} \\
&\times (\cos q \cos v - \mathbf{i} \sin q \sin v - \mathbf{j} \cos q \cos v + \mathbf{k} \sin q \cos v).
\end{aligned}$$

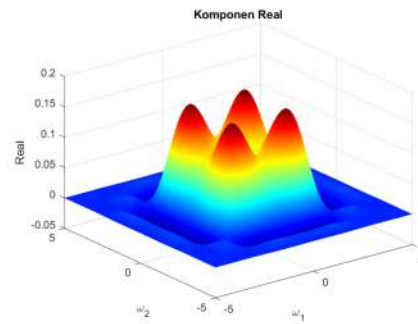
Dengan:

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{d_1}{b_1} \omega_1^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{a_2 \omega_1^2}{4b_1^2} + \left(a_1^2 + 4b_1^2 + \left(\arctan\left(\frac{a_1}{2b_1}\right) \right) \right) \right)$$

dan

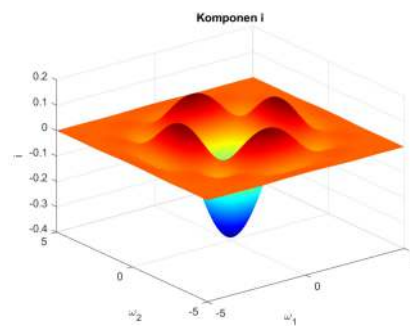
$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{b_2} \omega_2^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{a_2 \omega_2^2}{4b_2^2} + \left(a_2^2 + 4b_2^2 + \left(\arctan\left(\frac{a_2}{2b_2}\right) \right) \right) \right).$$

Visualisasi grafik contoh transformasi kanonik linear quaternion dari fungsi $f(x)$ disajikan pada gambar berikut.



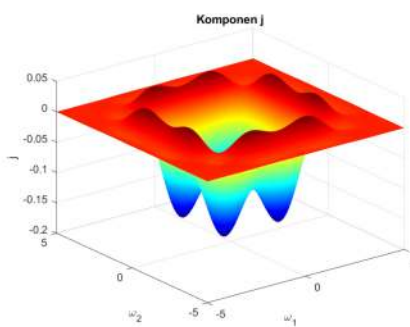
Gambar 2.5

Pada gambar 2.5 disajikan visualisasi bagian real fungsi transformasi kanonik linear dari fungsi bernilai quaternion, dengan nilai $a_1 = 1, b_1 = 1, d_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 1, d_2 = 1$.



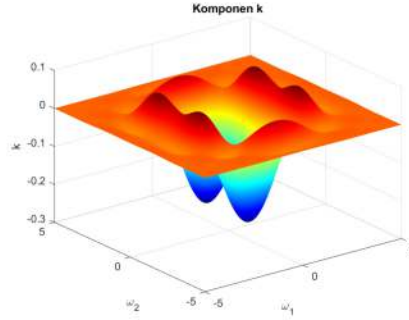
Gambar 2.6

Pada gambar 2.6 disajikan visualisasi bagian i fungsi transformasi kanonik linear dari fungsi bernilai quaternion, dengan nilai $a_1 = 1, b_1 = 1, d_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 1, d_2 = 1$.



Gambar 2.7

Pada gambar 2.7 disajikan visualisasi bagian j fungsi transformasi kanonik linear dari fungsi bernilai quaternion, dengan nilai $a_1 = 1, b_1 = 1, d_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 1, d_2 = 1$.



Gambar 2.8

Pada gambar 2.8 disajikan visualisasi bagian i fungsi transformasi kanonik linear dari fungsi bernilai quaternion, dengan nilai $a_1 = 1, b_1 = 1, d_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 1, d_2 = 1$.

2.5. Transformasi-S Kanonik Linear Quaternion dan Prinsip-Prinsip Ketidakpastian

Pada bagian ini, akan diperkenalkan transformasi-S kanonik linear quaternion (TSKLQ), dan akan diselidiki sifat-sifat utamanya yang akan berguna untuk menurunkan hasil utama dalam penelitian ini.

Definisi 2.5.1 (Definisi TSKLQ) Misalkan $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ adalah fungsi jendela quaternion tak nol. Transformasi-S kanonik linear quaternion S_ϕ^Q , didefinisikan untuk setiap fungsi $h \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ terhadap ϕ , oleh:

$$S_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})} K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x}. \quad (2.24)$$

Selanjutnya dikumpulkan fakta-fakta berikut yang terkait dengan definisi di atas:

- Berdasarkan persamaan (2.23) dan (2.24) diperoleh:

$$S_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \left\{ h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})} \right\}(\boldsymbol{\omega}). \quad (2.25)$$

- Menggunakan invers TKLQ persamaan (2.19) ke (2.25) menghasilkan:

$$h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})} = (\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{S}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})]. \quad (2.26)$$

- Jika $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{H}) \cap L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ memenuhi

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\mathbf{u} = 1. \quad (2.27)$$

Maka untuk suatu $h \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) d\mathbf{u} &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})} K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{u} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) K_{A_2}(x_2, \omega_2) \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})} d\mathbf{u} d\mathbf{x} \\ &= \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{h\}(\boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

yang menunjukkan bahwa definisi TSKLQ merujuk pada definisi TKLQ.

- Jika $\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = m(\boldsymbol{\omega})$, maka

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})} K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x} \\ &= \overline{m(\boldsymbol{\omega})} \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x} \\ &= \overline{m(\boldsymbol{\omega})} \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{h\}(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

- Jika diasumsikan bahwa $\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{u})$, maka:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})} K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x} - \mathbf{u}) K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x} \\ &= \mathcal{G}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

di mana $\mathcal{G}_\phi^Q$ adalah transformasi kanonik linear berjendela quaternion (TKLWQ) yang didefinisikan oleh:

$$\mathcal{G}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{x} - \mathbf{u})} K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x}. \quad (2.31)$$

Hal ini menunjukkan bahwa transformasi kanonik linear berjendela quaternion sebagaimana Gao dan Li [2020] merupakan kasus khusus dari TSKLQ.

Teorema 2.5.2 Misalkan ϕ adalah fungsi jendela quaternion. Jika $h, g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ adalah dua fungsi quaternion, maka relasi ortogonalitas berikut berlaku:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(S_\phi^Q h(\mathbf{u}, \omega) \overline{S_\phi^Q g(\mathbf{u}, \omega)}\right) d\omega d\mathbf{u} = \langle h\phi_{\mathbf{u}, \omega}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}. \quad (2.32)$$

di mana

$$\phi_{\mathbf{u}, \omega} = \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\mathbf{u}. \quad (2.33)$$

Secara khusus, jika $h = g$ diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |S_\phi^Q h(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\omega d\mathbf{u} = \phi_{\mathbf{u}, \omega} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2. \quad (2.34)$$

Bukti. Berdasarkan definisi TSKLQ (2.24) dan suku kedua dari (2.5), diperoleh:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(S_\phi^Q h(\mathbf{u}, \omega) \overline{S_\phi^Q g(\mathbf{u}, \omega)}\right) d\mathbf{u} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}x_1^2 - \frac{2}{b_1}x_1\omega_1 + \frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \times h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega)}\right. \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{a_2}{b_2}x_2^2 - \frac{2}{b_2}x_2\omega_2 + \frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \times \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{\frac{j}{2}\left(\frac{a_2}{b_2}t_2^2 - \frac{2}{b_2}t_2\omega_2 + \frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \\ & \quad \times \phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}, \omega) \overline{g(\mathbf{x})} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{\frac{j}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}t_1^2 - \frac{2}{b_1}t_1\omega_1 + \frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \Big) dt d\mathbf{x} d\mathbf{u} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{-\frac{ja_1}{2b_1}(x_1^2 - t_1^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{\frac{j}{b_1}(t_1 - x_1)\omega_1} h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega)}\right. \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{-\frac{ja_2}{2b_2}(x_2^2 - t_2^2)} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} e^{\frac{j}{b_2}(t_2 - x_2)\omega_2} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}, \omega) \overline{g(\mathbf{x})} \Big) dt d\mathbf{x} d\mathbf{u} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(e^{-\frac{ja_1}{2b_1}(x_1^2 - t_1^2)} h(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega)} e^{-\frac{ja_2}{2b_2}(x_2^2 - t_2^2)} \overline{g(\mathbf{x})}\right. \\ & \quad \times \phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}, \omega) \delta(\mathbf{t} - \mathbf{x}) \Big) dt d\mathbf{x} d\mathbf{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(h(\mathbf{t}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}, \omega)} \phi(\mathbf{u} - \mathbf{t}, \omega) \overline{g(\mathbf{t})}\right) d\mathbf{u} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(h(\mathbf{t}) \overline{g(\mathbf{t})} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\mathbf{u}\right) dt \\ &= \langle h\phi_{\mathbf{u}, \omega}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, bukti selesai. ■

Catatan 1 Berdasarkan persamaan (2.30) diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc\left(\mathcal{G}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \omega) \overline{\mathcal{G}_\phi^Q g(\mathbf{u}, \omega)}\right) d\omega d\mathbf{u} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})} \langle h, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}, \quad (2.35)$$

dan

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{G}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\omega d\mathbf{u} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2 \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2. \quad (2.36)$$

Dalam teorema berikut, akan diturunkan formula rekonstruksi yang terkait dengan transformasi-S kanonik linear.

Teorema 2.5.3 Misalkan $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ adalah fungsi jendela quaternion yang memenuhi kondisi:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\mathbf{u} = \phi_{\mathbf{u}, \omega}, \quad 0 < \phi_{\mathbf{u}, \omega} < \infty. \quad (2.37)$$

Kemudian, setiap sinyal quaternion $h \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dapat dihasilkan menggunakan formula inversi untuk TSKLQ, yaitu:

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{\phi_{\mathbf{u}, \omega}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}_{\phi}^Q h(\mathbf{u}, \omega) \phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega) K_{A_1}(x_1, \omega_1) K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{u} d\omega. \quad (2.38)$$

Bukti. Penerapan persamaan (2.32) dan (2.8) memberikan:

$$\begin{aligned} & \left\langle h \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\mathbf{u}, g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc \left(\mathcal{S}_{\phi}^Q h(\mathbf{u}, \omega) \overline{\mathcal{S}_{\phi}^Q g(\mathbf{u}, \omega)} \right) d\mathbf{u} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc \left(\mathcal{S}_{\phi}^Q h(\mathbf{u}, \omega) \int_{\mathbb{R}^2} K_{A_1}(x_1, \omega_1) \phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega) \overline{g(\mathbf{x})} K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{u} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} Sc \left(\mathcal{S}_{\phi}^Q h(\mathbf{u}, \omega) \phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega) K_{A_1}(x_1, \omega_1) K_{A_2}(x_2, \omega_2) \overline{g(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{u} d\omega d\mathbf{x} \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}_{\phi}^Q h(\mathbf{u}, \omega) \phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega) K_{A_1}(x_1, \omega_1) K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{u} d\omega, g \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Karena relasi (2.39) berlaku untuk setiap $g \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ maka:

$$h(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\mathbf{u} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}_{\phi}^Q h(\mathbf{u}, \omega) \phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega) K_{A_1}(x_1, \omega_1) K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{u} d\omega. \quad (2.40)$$

Hal ini berarti:

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{\phi_{\mathbf{u}, \omega}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{S}_{\phi}^Q h(\mathbf{u}, \omega) \phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega) K_{A_1}(x_1, \omega_1) K_{A_2}(x_2, \omega_2) d\mathbf{u} d\omega. \quad (2.41)$$

Dengan demikian, bukti selesai. ■

2.5.1. Prinsip Ketidakpastian Tipe Heisenberg untuk TSKLQ

Hasil berikut menyajikan prinsip ketidakpastian tipe Heisenberg untuk TKLQ, yang merupakan generalisasi non-trivial dari ketaksamaan TFQ yang dibahas oleh penulis dalam Zhu dan Zheng [2021].

Teorema 2.5.4 Untuk setiap $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dan $\alpha, \gamma \geq 1$, berlaku:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |\mathcal{F}_Q\{f\}(\omega)|^2 d\xi \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \geq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx. \quad (2.42)$$

Generalisasinya dalam kerangka TKLQ akan menghasilkan hasil penting berikut.

Teorema 2.5.5 Dengan asumsi yang sama seperti pada Teorema 2.5.4, untuk semua $\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q\{f\} \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, berlaku:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |2\pi b|^{-2\alpha} |\omega|^{2\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q\{f\}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q\{f\}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Bukti. Mengganti $f(x)$ dengan $h(x)$ dalam (2.42) diperoleh:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |e^{i\frac{a_1}{2b_1}x_1^2} f(x) e^{i\frac{a_2}{2b_2}x_2^2}|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |\mathcal{F}_Q\{h\}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ \geq \int_{\mathbb{R}^2} |e^{i\frac{a_1}{2b_1}x_1^2} f(x) e^{i\frac{a_2}{2b_2}x_2^2}|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dengan menyederhanakan, diperoleh:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} \left| \frac{1}{2\pi b} \right|^{2\alpha+1} |\mathcal{F}_Q\{h\}(\frac{\omega}{2\pi b})|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ \geq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Berdasarkan persamaan (2.21) diperoleh:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} \left| \frac{1}{2\pi b} \right|^{2\alpha+1} \left| \sqrt{2\pi b_1} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{d_1}{2b_1}\omega_1^2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q\{f\}(\omega) e^{-i\frac{d_2}{2b_2}\omega_2^2} \sqrt{2\pi b_2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ \geq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} \left| \frac{1}{2\pi b} \right|^{2\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q\{f\}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ \geq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Menggunakan Teorema Parseval (2.23) pada sisi kanan persamaan di atas, kita mendapatkan:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |2\pi b|^{-2\alpha} |\omega|^{2\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

yang memberikan hasil yang diinginkan. ■

Catatan 2 Untuk $\alpha = \gamma = 1$, diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^2 |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}|^2 d\omega \geq (4\pi^2)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx \right)^2. \quad (2.46)$$

Teorema 2.5.6 Untuk setiap $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dan $\alpha, \gamma \geq 1$, berlaku:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \phi_{u, \omega}^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Bukti. Dari Teorema 2.5.5, diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dengan memasukkan (2.19) ke dalam suku pertama identitas di atas, diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Mengintegrasikan relasi di atas terhadap du akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \right. \\ & \times \left. \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right] du \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega du. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dengan demikian:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](x)|^2 dx du \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \\ & \quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega du \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega du. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Mengganti $\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}$ dengan $\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}$ akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}](x)|^2 dx du \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Dengan menerapkan relasi (2.26) dan (2.34) diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x) \overline{\phi(u-x, \omega)}|^2 dx du \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(u, \omega)|^2 du. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Persamaan ini setara dengan:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 \phi_{u, \omega} dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \phi_{u, \omega} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dengan menyederhanakan relasi di atas, diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \phi_{u, \omega}^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Bukti selesai. ■

Catatan 3 Berdasarkan persamaan (2.30) dan (2.36) diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\gamma} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{2\alpha} |2\pi b|^{-2\alpha} |\mathcal{G}_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \\ & \geq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

ini dikenal sebagai prinsip ketidakpastian Heisenberg untuk TKLWQ oleh Gao dan Li [2021]. Jika relasi (2.27) dipenuhi, Teorema 2.5.6 merujuk pada Teorema 2.5.5.

2.5.2. Ketaksamaan Pitt untuk TSKLQ

Pada subbagian ini, ditetapkan ketaksamaan Pitt dari domain TKLQ ke domain TSKLQ. Untuk tujuan ini, pertama-tama diperkenalkan ketaksamaan Pitt yang terkait dengan TKLQ.

Teorema 2.5.7 (Ketaksamaan Pitt TKLQ Zhu dan Zheng [2020]) *Misalkan $f \in S(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ dan $0 \leq \alpha < 2$. Maka berlaku:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega \leq \frac{M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha |f(x)|^2 dx, \quad (2.57)$$

di mana:

$$M_\alpha = \pi^\alpha \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{4}\right)} \right]^2.$$

Disini $S(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ adalah ruang Schwartz quaternion dan $\Gamma(t)$ adalah fungsi gamma.

Sekarang, perluasan ketaksamaan Pitt dalam konteks TSKLQ disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.5.8 (Ketaksamaan Pitt untuk TSKLQ) *Misalkan $\psi \in S(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ adalah fungsi jendela quaternion tak nol. Maka, untuk setiap $f \in S(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$ yang memenuhi $S_\phi^Q \{f\} \in S(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, berlaku:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |S_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \leq \frac{\phi_{u, \omega} M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha |f(x)|^2 dx. \quad (2.58)$$

Bukti. Berdasarkan persamaan (2.57) diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega \leq \frac{M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha |f(x)|^2 dx. \quad (2.59)$$

Dengan menerapkan (2.18) ke sisi kanan identitas (2.59) diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\omega)|^2 d\omega \leq \frac{M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](x)|^2 dx, \quad (2.60)$$

Mengintegralkan relasi di atas terhadap du diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |S_\phi^Q \{f\}(u, \omega)|^2 d\omega du \leq \frac{M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^\alpha |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [S_\phi^Q \{f\}](x)|^2 dx du. \quad (2.61)$$

Dengan bantuan relasi (2.26) diperoleh:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\omega d\mathbf{u} \leq \frac{M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{x}|^\alpha |f(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \omega)}|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{u}. \quad (2.62)$$

Dengan demikian,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\omega d\mathbf{u} \leq \frac{M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\mathbf{u} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{x}|^\alpha |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.63)$$

yang merupakan hasil yang diinginkan. ■

Sebagai konsekuensi langsung dari ketaksamaan Pitt yang terkait dengan TSKLQ, dapat disimpulkan catatan berikut:

Catatan 4 Perlu dicatat bahwa dengan menetapkan $\alpha = 0$ dalam Teorema 2.5.8, diperoleh ketaksamaan berikut:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\omega d\mathbf{u} \leq \phi_{\mathbf{u}, \omega} \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.64)$$

Catatan 5 Berdasarkan relasi (2.30) dan (2.36) Teorema 2.5.8 di atas disederhanakan menjadi:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{G}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\omega d\mathbf{u} \leq \frac{M_\alpha}{|b_1 b_2|^\alpha} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{x}|^\alpha |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.65)$$

Ketaksamaan ini merupakan prinsip ketidakpastian Pitt untuk transformasi kanonik linear berjendela quaternion, dibandingkan dengan Gao dan Li [2021] berikut,

$$\int_{\mathbb{R}^t} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^{-\alpha} |\mathcal{G}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \omega)|^2 d\omega d\mathbf{u} \leq \frac{M_\alpha}{4\pi^2 |b_1 b_2|^\alpha} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^t; \mathbb{H})}^2 \int_{\mathbb{R}^t} |\mathbf{x}|^\alpha |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.66)$$

di mana

$$M_\alpha = \pi^\alpha \left[\Gamma\left(\frac{2t - \alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{2t + \alpha}{4}\right) \right]^2,$$

untuk $0 \leq \alpha \leq t$ dan Γ adalah fungsi gamma.

Teorema 2.5.9 (Ketaksamaan Hausdorff–Young untuk TSKLQ) Misalkan $r \in [1, 2]$

dan s sedemikian hingga $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Maka, untuk setiap $f \in L^r(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})$, berlaku:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{u} \right)^{1/s} \\ & \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})|^r d\mathbf{u} \right)^{1/r} \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^2; \mathbb{H})}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

di mana:

$$C_r = (r^{1/r} s^{-1/s})^{1/2}.$$

Bukti. Ketaksamaan Hausdorff–Young untuk TKLQ menyatakan bahwa:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} \right)^{1/s} \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}. \quad (2.68)$$

Menerapkan relasi (2.66) ke sisi kanan identitas (2.68) di atas, diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} \right)^{1/s} \\ & \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](\mathbf{x})|^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Dengan ini, disimpulkan bahwa:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} \right)^{1/s} \\ & \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](\mathbf{x})|^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Dengan demikian:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}(\boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{u} \right)^{1/s} \\ & \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q \{f\}](\mathbf{x})|^r d\mathbf{x} d\mathbf{u} \right)^{1/r}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{u} \right)^{1/s} \\ & \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(\mathcal{L}_{A_1, A_2}^Q)^{-1} [\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}](\mathbf{x})|^r d\mathbf{x} d\mathbf{u} \right)^{1/r}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Hal ini mengarah pada:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{u} \right)^{1/s} \\ & \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x}) \overline{\phi(\mathbf{u} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})}|^r d\mathbf{x} d\mathbf{u} \right)^{1/r}. \quad (2.73) \end{aligned}$$

Yang setara dengan:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{S}_\phi^Q \{f\}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})|^s d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{u} \right)^{1/s} \\ & \leq C_r^2 (2\pi)^{2/s-1} (|b_1| |b_2|)^{1/s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})|^r d\mathbf{u} \right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Bukti selesai. ■

Berikut visualisasi grafis dari fungsi transformasi-S linear kanonik quaternion.

Contoh 4 Diberikan Fungsi:

$$f(\mathbf{x}) = e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)}$$

dan

$$\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = e^{-\frac{1}{5}(x_1^2+x_2^2+\omega_1^2+\omega_2^2)}.$$

Berdasarkan persamaan (2.31), transformasi-S kanonik linear quaternion dari fungsi $f(x)$ didapatkan sebagai:

$$\begin{aligned} S_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}x_1^2 - \frac{2}{b_1}x_1\omega_1 + \frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right)} e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{5}\left((u_1-x_1)^2 + (u_2-x_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2}} \\ &\quad \times e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a_2}{b_2}x_2^2 - \frac{2}{b_2}x_2\omega_2 + \frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right)} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

dengan memisahkan bagian skalar, dihasilkan

$$\begin{aligned} S_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1}} e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}x_1^2 - \frac{2}{b_1}x_1\omega_1\right)} e^{-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{5}\left((u_1-x_1)^2 + (u_2-x_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2\right)} \\ &\quad \times e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a_2}{b_2}x_2^2 - \frac{2}{b_2}x_2\omega_2\right)} dx_1 dx_2 \frac{1}{2\pi b_2} e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi b_1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}x_1^2 - \frac{2}{b_1}x_1\omega_1\right)} e^{-\frac{1}{4}x_1^2} e^{-\frac{1}{5}(u_1-x_1)^2} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{5}\omega_1^2} dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{a_2}{b_2}x_2^2 - \frac{2}{b_2}x_2\omega_2\right)} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{4}x_2^2} e^{-\frac{1}{5}(u_2-x_2)^2} e^{-\frac{1}{5}\omega_2^2} dx_2 \frac{e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi b_2}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, masing-masing bagian integral diarahkan ke bentuk integral

Gaussian, sehingga dihasilkan:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\phi^Q h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) &= \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_1^2 + \omega_1^2)}}{\sqrt{2\pi b_1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{a_1}{b_1}x_1^2 - \frac{2}{b_1}x_1\omega_1\right)} \\
&\quad \times e^{-\frac{j}{4}x_1^2} e^{-\frac{1}{5}(x_1^2 - 2u_1x_1)} dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{a_2}{b_2}x_2^2 - \frac{2}{b_2}x_2\omega_2\right)} \\
&\quad \times e^{-\frac{j}{4}x_2^2} e^{-\frac{1}{5}(x_2^2 - 2u_2x_2)} dx_2 \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_2^2 + \omega_2^2)}}{\sqrt{2\pi b_2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_1^2 + \omega_1^2)}}{\sqrt{2\pi b_1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)x_1^2 + \left(\mathbf{i}\frac{\omega_1}{b_1} + 2u_1\right)x_1} dx_1 \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)x_2^2 + \left(\mathbf{j}\frac{\omega_2}{b_2} + 2u_2\right)x_2} dx_2 \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_2^2 + \omega_2^2)}}{\sqrt{2\pi b_2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_1^2 + \omega_1^2)}}{\sqrt{2\pi b_1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)\left(x_1^2 - \frac{\left(\mathbf{i}\frac{\omega_1}{b_1} + 2u_1\right)}{\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)}x_1\right)} dx_1 \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)\left(x_2^2 - \frac{\left(\mathbf{j}\frac{\omega_2}{b_2} + 2u_2\right)}{\left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)}x_2\right)} dx_2 \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_2^2 + \omega_2^2)}}{\sqrt{2\pi b_2}} \\
&= \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_1^2 + \omega_1^2) + \left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{i}\frac{\omega_1}{b_1} + 2u_1\right)}{2\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi b_1}} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)\left(x_1 - \frac{\left(\mathbf{i}\frac{\omega_1}{b_1} + 2u_1\right)}{\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)}\right)^2} dx_1 \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)\left(x_2 - \frac{\left(\mathbf{j}\frac{\omega_2}{b_2} + 2u_2\right)}{\left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)}\right)^2} dx_2 \\
&\quad \times \frac{e^{-\frac{j}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_2^2 + \omega_2^2) + \left(\mathbf{i}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{i}\frac{\omega_2}{b_2} + 2u_2\right)}{2\left(\mathbf{i}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi b_2}}.
\end{aligned}$$

maka setelah integral Gaussian,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\phi^Q h(u, \omega) &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\left(\frac{d_1}{b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_1^2 + \omega_1^2) + \left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{i}\frac{\omega_1}{b_1} + 2u_1\right)}{2\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi b_1}} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\mathbf{i}\frac{a_1}{2b_1} + \frac{9}{20}\right)}} \\
&\times \sqrt{\frac{\pi}{\left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)}} \frac{e^{-\frac{\mathbf{j}}{2}\left(\frac{d_2}{b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5}(u_2^2 + \omega_2^2) + \left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)\left(\frac{\left(\mathbf{j}\frac{\omega_2}{b_2} + 2u_2\right)}{2\left(\mathbf{j}\frac{a_2}{2b_2} + \frac{9}{20}\right)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi b_2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{b_1 b_2}} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1}\right)^2\right)\left(\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2}\right)^2\right)} \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\times e^{-\frac{1}{5}(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{9}{5}u_1^2 - \frac{9}{20}\frac{\omega_1^2}{b_1^2} + \frac{2a_1 u_1 \omega_1}{b_1^2}}{\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1}\right)^2} + \frac{\frac{9}{5}u_2^2 - \frac{9}{20}\frac{\omega_2^2}{b_2^2} + \frac{2a_2 u_2 \omega_2}{b_2^2}}{\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2}\right)^2}\right)} \\
&\times (\cos q \cos v - \mathbf{i} \sin q \sin v - \mathbf{j} \cos q \sin v + \mathbf{k} \sin q \cos v)
\end{aligned}$$

di mana:

$$q = \left(\frac{d_1}{2b_1}\omega_1^2 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(\frac{9u_1\omega_1}{5b_1}\right) - \frac{a_1}{2b_1}\left(4u_1^2 - \frac{\omega_1^2}{b_1^2}\right)}{4\left(\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1}\right)^2\right)} - \arctan\left(\frac{-10a_1}{9b_1}\right)$$

dan

$$v = \left(\frac{d_2}{2b_2}\omega_2^2 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(\frac{9u_2\omega_2}{5b_2}\right) - \frac{a_2}{2b_2}\left(4u_2^2 - \frac{\omega_2^2}{b_2^2}\right)}{4\left(\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2}\right)^2\right)} - \arctan\left(\frac{-10a_2}{9b_2}\right).$$

Bagian real:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{b_1 b_2}} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1}\right)^2\right)\left(\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2}\right)^2\right)} \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\times e^{-\frac{1}{5}(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{9}{5}u_1^2 - \frac{9}{20}\frac{\omega_1^2}{b_1^2} + \frac{2a_1 u_1 \omega_1}{b_1^2}}{\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1}\right)^2} + \frac{\frac{9}{5}u_2^2 - \frac{9}{20}\frac{\omega_2^2}{b_2^2} + \frac{2a_2 u_2 \omega_2}{b_2^2}}{\left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2}\right)^2}\right)} \\
&\times \cos q \cos v.
\end{aligned}$$

Bagian i

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{b_1 b_2}} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{1}{4}} \\ & \times e^{-\frac{1}{5}(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{9}{5}u_1^2 - \frac{9}{20} \cdot \frac{\omega_1^2}{b_1^2} + \frac{2a_1 u_1 \omega_1}{b_1^2}}{\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1} \right)^2} + \frac{\frac{9}{5}u_2^2 - \frac{9}{20} \cdot \frac{\omega_2^2}{b_2^2} + \frac{2a_2 u_2 \omega_2}{b_2^2}}{\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2} \right)^2} \right)} \\ & \times (-\sin q \sin v). \end{aligned}$$

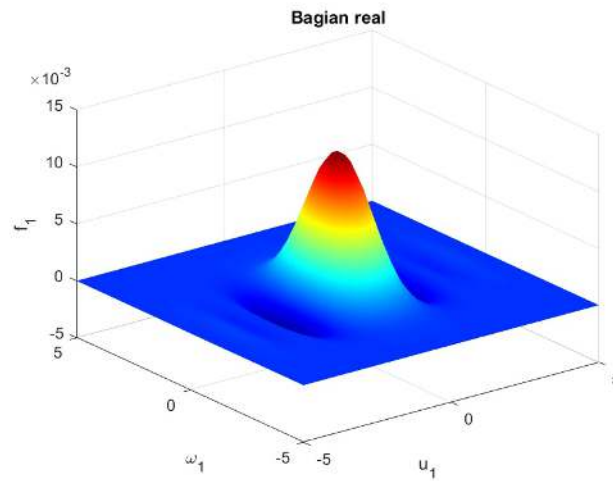
Bagian j:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{b_1 b_2}} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{1}{4}} \\ & \times e^{-\frac{1}{5}(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{9}{5}u_1^2 - \frac{9}{20} \cdot \frac{\omega_1^2}{b_1^2} + \frac{2a_1 u_1 \omega_1}{b_1^2}}{\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1} \right)^2} + \frac{\frac{9}{5}u_2^2 - \frac{9}{20} \cdot \frac{\omega_2^2}{b_2^2} + \frac{2a_2 u_2 \omega_2}{b_2^2}}{\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2} \right)^2} \right)} \\ & \times (-\cos q \sin v). \end{aligned}$$

Bagian k:

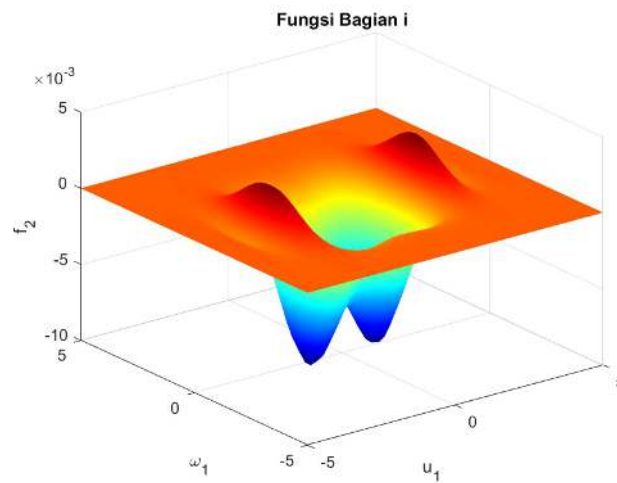
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{b_1 b_2}} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{1}{4}} \\ & \times e^{-\frac{1}{5}(u_1^2 + u_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{9}{5}u_1^2 - \frac{9}{20} \cdot \frac{\omega_1^2}{b_1^2} + \frac{2a_1 u_1 \omega_1}{b_1^2}}{\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{2b_1} \right)^2} + \frac{\frac{9}{5}u_2^2 - \frac{9}{20} \cdot \frac{\omega_2^2}{b_2^2} + \frac{2a_2 u_2 \omega_2}{b_2^2}}{\left(\frac{9}{20} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{2b_2} \right)^2} \right)} \\ & \times \sin q \cos v. \end{aligned}$$

Visualisasi grafik dari contoh fungsi transformasi-S kanonik linear quaternion disajikan pada gambar 2.9, 2.10, 2.11, dan 2.12.



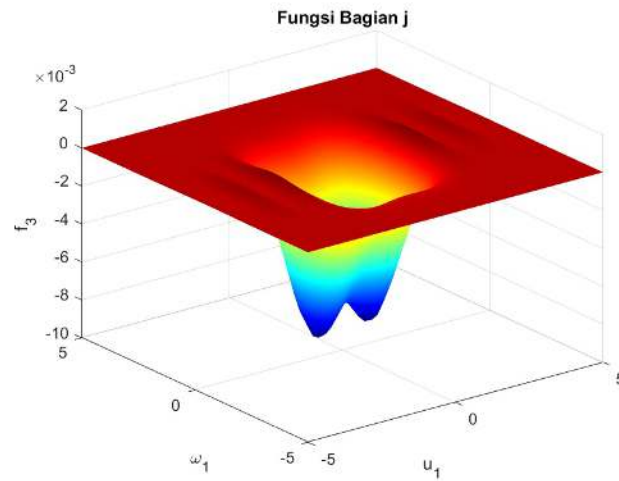
Gambar 2.9

Pada gambar 2.9 disajikan bagian real dari transformasi-S kanonik linear quaternion fungsi bernilai quaternion. Dengan nilai $a_1 = 100$; $b_1 = 5$; $d_1 = 0.01$; $a_2 = 25$; $b_2 = 7$; $d_2 = 0,04$.



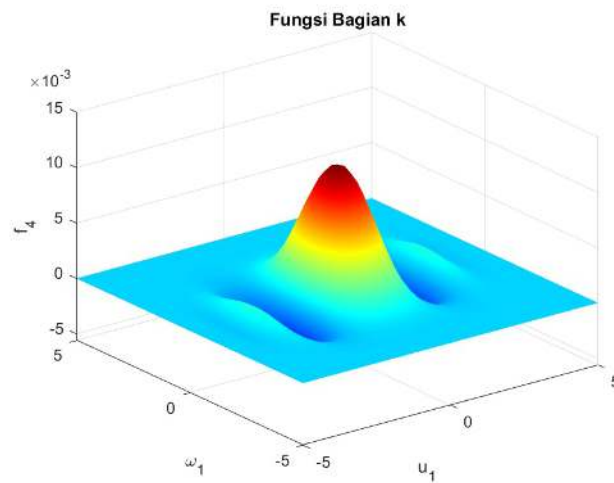
Gambar 2.10

Pada gambar 2.10 disajikan bagian i dari transformasi-S kanonik linear quaternion fungsi bernilai quaternion. Dengan nilai $a_1 = 100$; $b_1 = 5$; $d_1 = 0.01$; $a_2 = 25$; $b_2 = 7$; $d_2 = 0,04$.



Gambar 2.11

Pada gambar 2.11 disajikan bagian j dari transformasi-S kanonik linear quaternion fungsi bernilai quaternion. Dengan nilai $a_1 = 100$; $b_1 = 5$; $d_1 = 0.01$; $a_2 = 25$; $b_2 = 7$; $d_2 = 0,04$.



Gambar 2.12

Pada gambar 2.12 disajikan bagian k dari transformasi-S kanonik linear quaternion fungsi bernilai quaternion. Dengan nilai $a_1 = 100$; $b_1 = 5$; $d_1 = 0.01$; $a_2 = 25$; $b_2 = 7$; $d_2 = 0,04$.

2.6. Kesimpulan

Penelitian ini memperkenalkan transformasi-S kanonik linear quaternion, yang merupakan generalisasi alami dari transformasi-S kanonik linear dalam kerangka aljabar quaternion. Beberapa sifat utamanya telah dibahas secara rinci. Berbagai jenis prinsip ketidakpastian yang terkait dengan transformasi ini juga telah diselidiki, yaitu prinsip ketidakpastian Heisenberg dan ketaksamaan Pitt.

DAFTAR PUSTAKA

- L. P. Chen, K. I. Kou, M. S. Liu, Pitt's inequality and the uncertainty principle associated with the quaternion Fourier transform, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, **423** (1), 681–700, 2015.
- E. Hitzer, Quaternion Fourier transform on quaternion fields and generalizations, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **20** (3), 497–517, 2007.
- P. Lian, Uncertainty principle for the quaternion Fourier transform, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **467** (2), 1258–1269, 2018.
- T. Bülow, Hypercomplex Spectral Signal Representations for the Processing and Analysis of Images, Ph.D. thesis, University of Kiel, Germany, 1999.
- P. Lian, Sharp Hausdorff-Young inequalities for the quaternion Fourier transforms, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, 697-703, 2020.
- A. Abouelaz, A. Achak, R. Daher, N. Safouane, Donoho-Stark's Uncertainty Principle for the quaternion Fourier transform, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **26**, 587-597, 2020.
- X. Zhu, S. Zheng, Uncertainty principles for the two-sided quaternion linear canonical transform, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, **39**, 4436-4458, 2020.
- A. Achak, A. Abouelaz, R. Daher, N. Safouane, Uncertainty principles for the quaternion linear canonical transform, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **29**, Article 99, 2019.
- X. Zhu, S. Zheng, On uncertainty principle for the two-sided quaternion linear canonical transform, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, **12** (3), 2021. <https://doi.org/10.1007/s11868-021-00395-x>.
- Y. N. Zhang, B. Z. Li, Novel uncertainty principles for two-sided quaternion linear canonical transform, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **28**, Article 15, 2018, <https://doi.org/10.1007>.

- M. Bahri, R. Ashino, Uncertainty principles related to quaternionic windowed Fourier transform, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **18** (3), 2020, 2050015.
- M. Bahri, On two-dimensional quaternion Wigner-Ville distribution, *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, Article ID 139471, <https://doi.org/10.1155/2014/139471>.
- M. Bahri, M. Saleh, Relation between Quaternion Fourier transform and quaternion Wigner-Ville distribution associated with linear canonical transform, *Journal of Applied Mathematics*, **2017**, Article ID 3247364, <https://doi.org/10.1155/2017/3247364>.
- F. A. Shah, A. Y. Tantary, Linear canonical Stockwell transform, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **484** (1), 2020, 123673.
- M. Bahri, S. Toaha, C. Lande, A generalized S-transform in linear canonical transform, *Journal of Physics: Conference Series*, **341**, 2019, 062005.
- Q. Xiang, K. Y. Qin, The linear canonical transform and its application to time-frequency signal analysis, in: 2009 International Conference on Information Engineering and Computer Science, Wuhan, China.
- M. Y. Bhat, A. H. Dar, Multiresolution analysis for linear canonical S transform, *Adv. Oper. Theory* 6, **68**, 2021, <https://doi.org/10.1007/s43036-021-00164-z>.
- M. Y. Bhat, A. H. Dar, Quaternion linear canonical S-transform and associated uncertainty principles, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **21** (1), 2023, 2250035.
- W. B. Gao, B. Z. Li, Quaternion windowed linear canonical transform of two-dimensional signals, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **30** (16), 2020, <https://doi.org/10.1007/s00006-020-1042-4>
- W. B. Gao, B. Z. Li, Uncertainty Principle for the two-sided quaternion windowed linear canonical transform, *Circuits Syst. Signal Process.*, 2021, <https://doi.org/10.1007/s00034-021-01841-3>.

- M. C. Xin, B. Z. Li, On new Wigner-Ville distribution associated with linear canonical transform, EURASIP J. Adv. Signal Process., **2021**, Article 56, 2021.
- D. Y. Wei, Y. M. Li, Linear canonical Wigner-Ville distribution and its application, Optik, **125** (1), 89-92, 2014.
- Z. C. Zhang, The optimal linear canonical Wigner distribution of noisy linear frequency-modulated signals, IEEE Signal Process. Lett., **26** (8), 1127-1131, 2009.
- F. A. Shah, A. Y. Tantary, Quaternionic shearlet transform, Optik, **175**, 115-125, 2018.
- F. A. Shah, A. A Teali, A. Y. Tantary, Linear canonical wavelet transform in quaternion domains, Advances in Applied Clifford Algebras, **31**, 2021.