

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sektor pertanian merupakan tulang punggung ketahanan pangan nasional yang menjadi salah satu penyerap tenaga kerja terbesar di Indonesia. Berdasarkan Survei Angkatan Kerja Nasional (Sakernas) Februari 2024, total penduduk yang bekerja mencapai 142,18 juta orang dengan Tingkat Pengangguran Terbuka (TPT) sebesar 4,82 persen (BPS, 2024). Data dari Kementerian Pertanian menunjukkan bahwa sektor pertanian menyerap 26,15 persen dari total tenaga kerja Indonesia pada triwulan III tahun 2024 (Kementerian Pertanian, 2024), mengindikasikan peran strategis sektor ini dalam perekonomian nasional. Dalam konteks pertanian modern, sistem irigasi menjadi infrastruktur vital yang menentukan produktivitas hasil panen. Indonesia memiliki sekitar 1,24 juta hektar jaringan irigasi yang melayani lahan sawah di seluruh nusantara (Direktorat Jenderal Sumber Daya Air, 2024). Namun, efisiensi distribusi air pada sistem irigasi eksisting masih menjadi tantangan besar, di mana kehilangan air akibat sistem operasi yang tidak optimal dapat mencapai 30-40% dari total air yang tersedia (Food and Agriculture Organization of the United Nations, 2020). Kondisi ini memerlukan pendekatan teknologi modern dalam pengelolaan dan operasi sistem irigasi untuk meningkatkan efisiensi penggunaan air.

Dalam sistem irigasi, sluice gate atau pintu air bukaan bawah merupakan struktur hidraulik kunci yang berfungsi sebagai pengatur debit aliran air dari saluran primer ke saluran sekunder atau tersier (Chaudry, 2008). Operasi gate yang tepat sangat menentukan distribusi air yang merata ke lahan-lahan pertanian. Ketika gate dibuka atau ditutup, terjadi fenomena aliran tidak tunak (*unsteady flow*) yang menghasilkan gelombang perambatan di sepanjang saluran, baik ke arah hulu (*backwater effect*) maupun ke arah hilir (*surge wave*). Pemahaman mendalam tentang dinamika aliran transien ini sangat penting untuk merancang strategi operasi gate yang optimal, mencegah *overtopping* atau *underflow*, serta meminimalkan risiko kerusakan struktur akibat fluktuasi tekanan yang tiba-tiba (Litrico & Fromion, 2009).

Secara matematis, aliran air di saluran terbuka dimodelkan menggunakan persamaan Saint-Venant, yang merupakan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik yang terdiri dari persamaan kontinuitas (konservasi massa) dan persamaan momentum (Chaudry, 2008). Persamaan Saint Venant pertama kali dirumuskan oleh Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant pada tahun 1871 dan hingga kini masih menjadi fondasi utama dalam analisis hidraulika saluran terbuka (de Saint-Venant, 1871). Meskipun persamaan Saint Venant telah disederhanakan dari persamaan Navier-Stokes lengkap, solusi analitik untuk kasus umum dengan geometri kompleks dan kondisi batas yang realistis sangat sulit diperoleh, sehingga pendekatan numerik menjadi pilihan yang paling praktis dan efektif (Leveque, 2002).

Dalam beberapa dekade terakhir, berbagai metode numerik telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan Saint-Venant. Metode-metode ini dapat dikategorikan menjadi tiga kelompok besar: metode beda hingga (finite difference methods), metode volume hingga (finite volume methods), dan metode elemen hingga (finite element methods) (Leveque, 2002). Setiap metode memiliki karakteristik, kelebihan, dan kekurangan yang berbeda dalam hal akurasi, stabilitas, dan efisiensi komputasi. Pemilihan metode numerik yang tepat sangat bergantung pada karakteristik masalah yang diselesaikan, termasuk kompleksitas geometri, tipe aliran (subcritical, critical, atau supercritical), dan keberadaan diskontinuitas seperti hydraulic jumps atau shock waves (Toro, 2009).

Salah satu metode yang populer dalam computational fluid dynamics adalah metode MacCormack, yang dikembangkan oleh Robert W. MacCormack pada tahun 1969 untuk menyelesaikan persamaan aliran hipersonik (Maccormack, 1969). Metode ini merupakan skema eksplisit dengan pendekatan predictor-corrector yang memberikan akurasi orde kedua dalam ruang dan waktu, yaitu $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ (Hoffmann, K. A., & Chiang, 2000). Kelebihan utama metode MacCormack adalah kemampuannya dalam menangkap diskontinuitas dan gelombang kejut (shock waves) dengan relatif tajam, membuatnya sesuai untuk simulasi aliran transien yang melibatkan perubahan cepat seperti operasi gate. Dalam konteks hidraulika saluran terbuka, penelitian oleh (Said, 2022) di Program Studi Magister Matematika Universitas Hasanuddin menunjukkan bahwa metode MacCormack berhasil mensimulasikan transpor sedimen permukaan dasar dengan akurasi yang baik. Namun, metode ini memiliki keterbatasan dalam bentuk oscillations numerik di sekitar diskontinuitas yang memerlukan penanganan khusus seperti artificial viscosity atau flux limiters (Hoffmann, K. A., & Chiang, 2000).

Di sisi lain, metode volume hingga (finite volume method) dengan skema Lax-Friedrichs telah lama dikenal sebagai metode yang robust dan stabil untuk menyelesaikan persamaan konservasi hiperbolik (Leveque, 2002). Metode Lax-Friedrichs, yang diperkenalkan oleh Peter Lax pada tahun 1954 (Lax, 1954), menggunakan pendekatan averaging fluks yang menghasilkan difusi numerik alami sehingga mampu meredam osilasi di sekitar diskontinuitas. Meskipun metode ini hanya memiliki akurasi orde pertama $O(\Delta t, \Delta x)$, stabilitasnya yang superior membuatnya menjadi pilihan yang menarik untuk simulasi jangka panjang atau sistem dengan banyak sel komputasi (Vreugdenhil, 1994). Penelitian oleh (Purwitaningsih, 2018) menggunakan metode volume hingga Lax-Friedrichs untuk menyelesaikan persamaan gelombang gravitasi aliran air dan menunjukkan bahwa solusi numerik konvergen ke solusi eksak dengan baik. Karakteristik difusif dari metode ini, meskipun mengurangi ketajaman dalam menangkap diskontinuitas, justru memberikan keuntungan dalam hal stabilitas dan kemudahan implementasi (Leveque, 2002).

Sebelum implementasi numerik dilakukan, pemahaman yang mendalam tentang karakteristik teoretis skema numerik menjadi sangat krusial. Analisis teoretis

mencakup tiga aspek fundamental: stabilitas, konsistensi, dan konvergensi. Analisis stabilitas, yang umumnya dilakukan melalui analisis Von Neumann, menentukan kondisi di mana solusi numerik tidak tumbuh secara tak terkendali seiring dengan iterasi waktu (Lax & Richtmyer, 1956). Untuk skema eksplisit seperti MacCormack dan Lax-Friedrichs, kondisi stabilitas biasanya dinyatakan dalam bentuk bilangan Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) yang membatasi ukuran langkah waktu relatif terhadap langkah spasial (LeVeque, 2002). Analisis konsistensi memverifikasi bahwa diskritisasi numerik mendekati persamaan diferensial asli ketika ukuran grid mendekati nol, yang diukur melalui truncation error. Sementara itu, analisis konvergensi menjamin bahwa solusi numerik mendekati solusi eksak ketika resolusi grid ditingkatkan. Menurut Lax Equivalence Theorem, untuk masalah well-posed, konsistensi dan stabilitas merupakan syarat cukup untuk konvergensi (Lax & Richtmyer, 1956). Oleh karena itu, sebelum membandingkan performa numerik kedua metode dalam kasus aplikatif, penelitian ini terlebih dahulu menetapkan landasan teoretis yang rigorous melalui analisis stabilitas, konsistensi, dan konvergensi untuk kedua skema numerik.

Beberapa penelitian terdahulu telah membandingkan performa berbagai metode numerik untuk menyelesaikan persamaan aliran saluran terbuka. (Purwitaningsih & Mungkasi, 2018) dalam penelitiannya mengenai metode volume hingga untuk menyelesaikan persamaan gelombang gravitasi aliran air menemukan bahwa metode volume hingga Lax-Friedrichs menghasilkan solusi numeris yang stabil dengan beberapa kondisi dan konvergen ke solusi eksak. Sebaliknya, metode volume hingga Lax-Wendroff yang memiliki akurasi lebih tinggi (second-order) ditemukan berhasil menyelesaikan gelombang kontinu dengan baik, tetapi menghasilkan osilasi artifisial saat menyelesaikan gelombang diskontinu. Temuan ini mengindikasikan bahwa metode dengan akurasi yang lebih tinggi tidak selalu memberikan hasil yang lebih baik untuk semua jenis masalah, terutama untuk kasus yang melibatkan diskontinuitas atau gradien yang tajam. Oleh karena itu, pemilihan metode numerik yang tepat harus mempertimbangkan tidak hanya akurasi teoretis, tetapi juga karakteristik masalah yang diselesaikan dan stabilitas solusi numerik.

Perbandingan sistematis antara metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs untuk kasus aliran transien pada saluran irigasi dengan sluice gate masih sangat terbatas dalam literatur. Sebagian besar penelitian terdahulu fokus pada satu metode tertentu atau membandingkan metode dengan order akurasi yang sama. Misalnya, (Magdalena et al., 2024) mengembangkan model numerik berbasis persamaan Saint-Venant untuk aliran di saluran dengan penampang tidak beraturan dan membandingkan hasilnya dengan software HEC-RAS, namun tidak melakukan perbandingan antar metode numerik yang berbeda. Studi oleh Juez et al. (2014) membandingkan berbagai skema volume hingga untuk transpor sedimen pada saluran dengan dasar bergerak, tetapi tidak mencakup metode MacCormack dalam perbandingan mereka. Dengan demikian, terdapat gap pengetahuan

mengenai karakteristik komparatif kedua metode ini, khususnya dalam konteks aliran transien yang diinduksi oleh operasi gate pada sistem irigasi.

Sebelum implementasi numerik dilakukan, pemahaman yang mendalam tentang karakteristik teoretis skema numerik menjadi sangat krusial. Analisis teoretis mencakup tiga aspek fundamental: stabilitas, konsistensi, dan konvergensi. Analisis stabilitas, yang umumnya dilakukan melalui analisis Von Neumann, menentukan kondisi di mana solusi numerik tidak tumbuh secara tak terkendali seiring dengan iterasi waktu (Lax, 1954). Untuk skema eksplisit seperti MacCormack dan Lax-Friedrichs, kondisi stabilitas biasanya dinyatakan dalam bentuk bilangan Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) yang membatasi ukuran langkah waktu relatif terhadap langkah spasial (Leveque, 2002). Analisis konsistensi memverifikasi bahwa diskritisasi numerik mendekati persamaan diferensial asli ketika ukuran grid mendekati nol, yang diukur melalui truncation error. Sementara itu, analisis konvergensi menjamin bahwa solusi numerik mendekati solusi eksak ketika resolusi grid ditingkatkan. Menurut Lax Equivalence Theorem, untuk masalah well-posed, konsistensi dan stabilitas merupakan syarat cukup untuk konvergensi (Lax & Richtmyer, 1956). Oleh karena itu, sebelum membandingkan performa numerik kedua metode dalam kasus aplikatif, penelitian ini terlebih dahulu menetapkan landasan teoretis yang rigorous melalui analisis stabilitas, konsistensi, dan konvergensi untuk kedua skema numerik.

Kajian numerik mengenai aliran pada saluran irigasi dengan *sluice gate* telah berkembang dalam beberapa dekade terakhir dengan berbagai pendekatan metode. Swamee (1992) mengembangkan solusi analitik untuk aliran *steady state* pada saluran dengan pintu sorong, namun pendekatan ini terbatas pada kondisi aliran konstan dan tidak dapat menangkap dinamika transien yang terjadi saat operasi pembukaan atau penutupan pintu (Swamee, 1992). Belaud et al. (2009) mengimplementasikan metode volume hingga untuk simulasi kontrol otomatis pintu air pada saluran irigasi, namun fokus penelitian mereka adalah pada sistem kontrol *feedback* tanpa melakukan analisis komparatif mendalam terhadap karakteristik numerik metode yang digunakan (Belaud, 2009). Studi oleh Litrico dan Fromion (2009) mengeksplorasi pemodelan analitik dan kontrol sistem irigasi, tetapi implementasi numerik yang digunakan tidak secara eksplisit membandingkan performa metode diskritisasi yang berbeda untuk kasus dengan pintu air sebagai kondisi batas internal (Litrico & Fromion, 2009).

Meskipun berbagai penelitian telah mengkaji pemodelan aliran pada saluran irigasi dan pengembangan metode numerik untuk persamaan Saint-Venant secara terpisah, terdapat kesenjangan dalam literatur terkait analisis komparatif sistematis antara metode numerik dengan karakteristik yang berbeda khususnya metode eksplisit orde tinggi versus metode konservatif orde rendah untuk kasus aliran transien yang diinduksi oleh operasi *sluice gate*. Operasi pintu air menghasilkan diskontinuitas tajam dalam profil aliran dan perubahan *regime* yang cepat (dari *subcritical* ke *supercritical* atau sebaliknya), yang merupakan tantangan numerik

signifikan dalam hal akurasi, stabilitas, dan konservasi properti fisis. Penelitian-penelitian terdahulu umumnya menggunakan satu metode tertentu untuk aplikasi spesifik tanpa melakukan evaluasi kuantitatif terhadap *trade-off* antara akurasi tinggi, stabilitas numerik, dan efisiensi komputasi dalam konteks sistem irigasi terkendali dengan pintu air.

Penelitian ini mengisi kesenjangan tersebut dengan melakukan analisis komparatif komprehensif antara metode MacCormack (eksplisit orde kedua) dan metode volume hingga Lax-Friedrichs (konservatif orde pertama) untuk simulasi aliran transien pada saluran irigasi dengan *sluice gate*. Kebaruan penelitian ini terletak pada evaluasi sistematis yang mencakup analisis teoretis (stabilitas, konsistensi, konvergensi), implementasi numerik untuk dua geometri saluran yang berbeda (persegi panjang dan trapesium), serta validasi kuantitatif menggunakan HEC-RAS sebagai standar referensi. Pendekatan ini memberikan perbandingan berbasis bukti yang dapat menjadi dasar pemilihan metode numerik yang tepat untuk aplikasi sistem irigasi modern.

Validasi hasil simulasi numerik merupakan aspek krusial dalam penelitian computational hydraulics. Dalam praktik engineering, software komersial seperti HEC-RAS (Hydrologic Engineering Center - River Analysis System) yang dikembangkan oleh US Army Corps of Engineers telah menjadi standar industri untuk analisis hidraulika saluran dan sungai (Brunner, 2020). HEC-RAS mengimplementasikan skema numerik implisit yang unconditionally stable dan memiliki fasilitas lengkap untuk memodelkan struktur hidraulik seperti gates, weirs, dan bridges. Penelitian oleh (Magdalena et al., 2024) menunjukkan bahwa validasi numerik dengan HEC-RAS memberikan hasil yang reliable untuk analisis aliran di saluran dengan geometri tidak beraturan. Oleh karena itu, membandingkan hasil metode numerik yang dikembangkan dengan HEC-RAS dapat memberikan validasi yang kredibel dan relevan untuk aplikasi praktis engineering. Pendekatan validasi numerik-ke-numerik ini, meskipun tidak seequivalen dengan validasi eksperimental, tetap memberikan benchmark yang valuable terutama ketika data eksperimen tidak tersedia atau sulit diperoleh (Brunner, 2020).

Dari perspektif penelitian akademik, studi ini berkontribusi pada body of knowledge dalam bidang computational hydraulics dan numerical methods for hyperbolic partial differential equations. Hasil penelitian dapat memberikan insights baru tentang karakteristik numerik metode MacCormack dan Lax-Friedrichs untuk aplikasi spesifik aliran saluran dengan internal boundaries seperti gates. Selain itu, metodologi perbandingan yang sistematis dan komprehensif yang dikembangkan dalam penelitian ini dapat menjadi template untuk studi komparatif serupa di bidang computational engineering lainnya (Leveque, 2002). Implementasi dalam MATLAB memfasilitasi proses *debugging*, validasi, dan visualisasi hasil simulasi secara efisien, sehingga mempercepat siklus pengembangan dan analisis.

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini bertujuan untuk melakukan analisis komparatif sistematis antara metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs dalam mensimulasikan aliran transien pada saluran irigasi dengan *sluice gate*. Perbandingan akan dilakukan dari berbagai aspek meliputi landasan teoretis (stabilitas, konsistensi, konvergensi), akurasi (melalui validasi dengan HEC-RAS dan metrik *error* seperti RMSD), dan kemampuan dalam menangkap fenomena fisis (melalui analisis perambatan gelombang dan konservasi massa). Implementasi kedua metode dilakukan dalam MATLAB dengan struktur kode yang modular untuk memastikan *reliability* dan *reproducibility* hasil.

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman mendalam tentang karakteristik komparatif kedua metode numerik untuk simulasi aliran transien pada sistem irigasi. Selain itu, penelitian ini juga diharapkan dapat menjadi fondasi untuk penelitian lanjutan yang lebih komprehensif, termasuk ekstensi ke geometri saluran yang lebih kompleks, implementasi metode numerik dengan orde akurasi lebih tinggi, integrasi dengan sistem kontrol otomatis, dan validasi eksperimental menggunakan flume laboratory atau pengukuran lapangan dari sistem irigasi eksisting. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya berkontribusi pada aspek akademik teoretis, tetapi juga membuka pathway untuk aplikasi praktis dalam mendukung pengelolaan air berkelanjutan (*sustainable water management*) dan irigasi presisi (*precision irrigation*) yang sangat relevan dengan tantangan ketahanan pangan dan pengelolaan sumber daya air di Indonesia.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah disampaikan, penelitian ini berfokus pada pemodelan aliran air dalam sistem irigasi terkendali menggunakan Persamaan Saint Venant (SVE) dan pendekatan numerik. Persamaan ini menggambarkan dinamika aliran pada saluran terbuka dan dapat menyajikan informasi mengenai tinggi muka air serta distribusi kecepatan terhadap waktu dan ruang.

Namun, dalam implementasinya terdapat beberapa persoalan mendasar yang perlu dirumuskan secara sistematis. Permasalahan tersebut berkaitan dengan pemilihan dan penerapan metode numerik yang tepat untuk menyelesaikan SVE, serta validasi terhadap model numerik yang dikembangkan agar dapat merepresentasikan kondisi aliran yang terjadi secara fisik di lapangan.

Adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana perbandingan karakteristik teoretis metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs ditinjau dari stabilitas, konsistensi, dan konvergensi dalam menyelesaikan Persamaan Saint-Venant untuk aliran transien pada saluran irigasi?
2. Bagaimana diskritisasi numerik Persamaan Saint-Venant satu dimensi menggunakan metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs untuk simulasi aliran transien pada saluran irigasi berpenampang persegi panjang dan trapesium dengan sluice gate?
3. Bagaimana perbandingan akurasi hasil simulasi numerik antara metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs dalam memodelkan perubahan tinggi muka air dan distribusi kecepatan akibat operasi pintu air pada saluran irigasi dengan penampang persegi panjang dan trapesium?
4. Bagaimana tingkat kesesuaian hasil simulasi numerik yang diperoleh dari kedua metode terhadap hasil simulasi menggunakan perangkat lunak HEC-RAS sebagai benchmark numerik?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, permasalahan dibatasi pada simulasi aliran transien saluran irigasi dengan sluice gate menggunakan persamaan Saint-Venant satu dimensi. Simulasi dilakukan pada dua jenis geometri penampang saluran, yaitu penampang persegi panjang dan penampang trapesium. Penelitian ini membandingkan dua metode numerik yaitu metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs serta melakukan validasi dengan perangkat lunak HEC-RAS sebagai benchmark numerik. Aliran diasumsikan satu dimensi dan tidak mempertimbangkan aliran lateral maupun transpor sedimen. Pengaruh turbulensi dimodelkan secara implisit melalui koefisien kekasaran Manning.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan model numerik aliran air pada sistem irigasi terkendali menggunakan pendekatan Persamaan Saint Venant satu dimensi. Model ini akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan dua skema yang berbeda, yaitu **metode MacCormack** dan **metode Volume Hingga**. Selain itu, penelitian ini bertujuan untuk mengevaluasi performa relatif kedua metode numerik dalam merepresentasikan dinamika aliran transien akibat operasi sluice gate, ditinjau dari aspek kestabilan numerik, akurasi, dan kesesuaian terhadap hasil simulasi HEC-RAS.

Secara khusus, penelitian ini memiliki tujuan sebagai berikut:

1. Menetapkan landasan teoretis melalui analisis stabilitas , konsistensi , dan konvergensi untuk metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs dalam menyelesaikan Persamaan Saint-Venant.
2. Mengimplementasikan diskritisasi numerik Persamaan Saint-Venant satu dimensi menggunakan metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs untuk simulasi aliran transien pada saluran irigasi dengan sluice gate
3. Menganalisis dan membandingkan akurasi hasil simulasi numerik antara metode MacCormack dan metode volume hingga Lax-Friedrichs dalam memodelkan perubahan tinggi muka air dan distribusi kecepatan aliran.
4. Membandingkan hasil simulasi numerik dari kedua metode dengan membandingkannya terhadap hasil simulasi perangkat lunak HEC-RAS sebagai benchmark numerik untuk menilai tingkat kesesuaian model numerik yang dikembangkan.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, baik secara teoritis maupun praktis, dalam bidang matematika terapan khususnya yang berkaitan dengan pemodelan hidrodinamika saluran terbuka. Adapun manfaat yang diharapkan adalah sebagai berikut:

1. **Manfaat Teoritis**

Penelitian ini memberikan kontribusi dalam pengembangan model matematis berbasis Persamaan Saint-Venant yang diselesaikan menggunakan dua pendekatan numerik yang berbeda, yaitu metode MacCormack dan metode Finite Volume. Perbandingan dua metode ini memperkaya kajian numerik dalam penyelesaian sistem konservatif hiperbolik serta memberikan wawasan tentang karakteristik stabilitas dan akurasi masing-masing skema dalam konteks aliran irigasi.

2. **Manfaat Praktis**

Hasil penelitian ini dapat dimanfaatkan sebagai acuan dalam perencanaan dan pengelolaan sistem irigasi terkendali. Model yang dikembangkan mampu memprediksi perubahan tinggi muka air dan distribusi kecepatan aliran sebagai respon terhadap variasi debit atau gangguan di saluran, sehingga dapat mendukung sistem pengambilan keputusan dalam pengoperasian pintu air atau katup otomatis.

3. **Manfaat dalam Pengembangan Teknologi Irigasi**

Dengan adanya model simulasi numerik yang efisien dan akurat, penelitian ini berpotensi menjadi bagian dari sistem kontrol cerdas (*smart irrigation system*) yang terintegrasi dengan sensor dan aktuator di lapangan. Hasil ini mendukung pengembangan teknologi irigasi presisi dan hemat air di era pertanian digital.

4. **Manfaat Akademik**

Penelitian ini dapat menjadi rujukan bagi mahasiswa, peneliti, maupun praktisi yang tertarik dalam pengembangan dan implementasi metode numerik untuk model aliran fluida, khususnya dalam kajian saluran terbuka dan sistem konservatif. Selain itu, penelitian ini juga dapat dijadikan pijakan awal untuk studi lanjut di bidang kontrol optimal dan simulasi numerik berbasis komputasi canggih.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Irigasi Terkendali

Teknologi irigasi modern telah mengalami transformasi signifikan dari sistem manual tradisional menjadi sistem otomatis yang terintegrasi dengan perangkat sensor dan aktuator (Litrico & Fromion, 2009). Sistem irigasi terkendali menggabungkan teknologi pemantauan real-time dengan mekanisme kontrol adaptif untuk mencapai distribusi air yang optimal pada jaringan saluran irigasi. Keunggulan utama sistem ini terletak pada kemampuannya memberikan respons cepat terhadap fluktuasi kondisi hidraulik melalui penyesuaian otomatis bukaan pintu air dan operasi pompa berdasarkan pembacaan sensor tinggi muka air serta debit di lokasi-lokasi kritis (Malaterre, P. O., 1998).

Implementasi sistem kontrol yang efektif membutuhkan model matematika yang dapat memprediksi perilaku dinamis aliran dalam jaringan saluran. Persamaan Saint Venant telah menjadi fondasi teoritis yang dominan dalam bidang ini karena kapasitasnya untuk mendeskripsikan fenomena aliran transien, termasuk perambatan gangguan hidrolik yang diakibatkan oleh operasi struktur kontrol dan variasi input debit (Schuurmans, J., 1999).

2.2 Persamaan Saint Venant

Formulasi matematis untuk mendeskripsikan dinamika aliran dalam saluran terbuka telah dikembangkan melalui sistem persamaan diferensial parsial yang dikenal sebagai Persamaan Saint Venant. Sistem persamaan ini merupakan kontribusi fundamental dari matematikawan Prancis Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant yang memperkenalkannya pada tahun 1871, dan hingga kini tetap menjadi kerangka teoritis utama dalam analisis hidraulika saluran terbuka (Chow, 1959). Formulasi ini menggabungkan prinsip-prinsip konservasi massa dan momentum untuk menggambarkan karakteristik aliran satu dimensi yang bersifat tidak permanen.

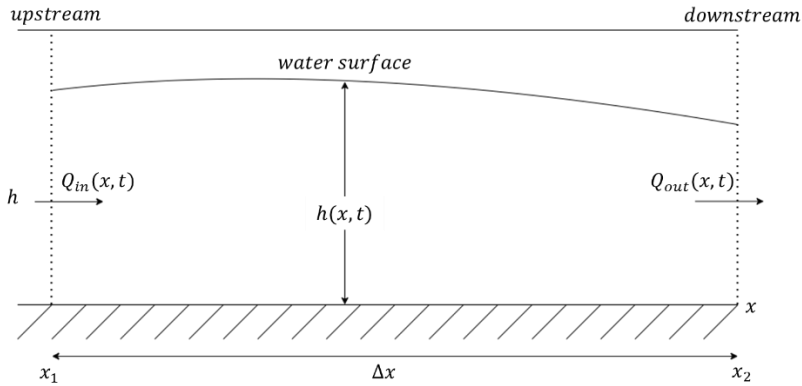
2.2.1 Persamaan Kontinuitas (Kekekalan Massa)

Persamaan Saint-Venant menggambarkan aliran tak-tunak satu dimensi pada saluran terbuka. Penurunan persamaan ini didasarkan pada hukum konservasi massa dan momentum yang diterapkan pada suatu elemen volume kontrol.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam penurunan persamaan Saint-Venant adalah sebagai berikut. Pertama, aliran bersifat satu dimensi, artinya kecepatan dan sifat-sifat aliran seragam pada setiap penampang melintang. Kedua, distribusi tekanan hidrostatik berlaku pada arah vertikal. Ketiga, kemiringan dasar saluran kecil sehingga $\sin \theta \approx \tan \theta$. Keempat, fluida bersifat incompressible atau massa jenis

konstan. Kelima, tidak ada aliran lateral ($q = 0$). Keenam, koefisien momentum $\beta = 1$ yang mengindikasikan distribusi kecepatan seragam pada penampang melintang.

Tinjau suatu elemen volume kontrol pada saluran terbuka dengan panjang Δx seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1. Elemen ini memiliki luas penampang basah $A(x, t)$, debit aliran masuk di hulu $Q(x, t)$, dan debit aliran keluar di hilir $Q(x + dx, t) = Q + (\partial Q / \partial x) dx$. Selain itu, elemen ini memiliki kedalaman air $h(x, t)$, kemiringan dasar saluran S_0 , dan kemiringan garis energi (energy slope) S_f . Volume kontrol ini digunakan sebagai basis untuk menurunkan persamaan kontinuitas dan momentum.



Gambar 1. Skema volume kontrol pada saluran terbuka

Hukum konservasi massa menyatakan bahwa massa tidak dapat diciptakan atau dimusnahkan. Untuk volume kontrol yang ditinjau, laju perubahan massa dalam volume kontrol sama dengan selisih massa yang masuk dan massa yang keluar. Secara matematis, hukum konservasi massa dapat dinyatakan sebagai:

Laju Perubahan Massa = Laju Massa Masuk – Laju Massa Keluar

Massa dalam volume kontrol pada waktu t adalah:

$$Massa = \rho \times Volume = \rho \times A(x, t) \times \Delta x$$

dimana ρ adalah massa jenis fluida (kg/m^3). Laju perubahan massa dalam volume kontrol terhadap waktu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A dx) \quad (1)$$

Laju massa masuk melalui penampang di hulu (posisi x):

$$\rho Q(x, t) \quad (2)$$

Laju massa keluar melalui penampang di hilir (posisi $x + dx$):

$$\rho Q(x + dx, t) = \rho \left[Q(x, t) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] \quad (3)$$

Substitusi ke dalam persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx) = \rho Q - \rho \left[Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] \quad (4)$$

Sederhanakan ruas kanan:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx) = -\rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (5)$$

Karena massa jenis ρ konstan (asumsi fluida incompressible), maka:

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} dx = -\rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (6)$$

Bagi kedua ruas dengan ρdx :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (7)$$

atau dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

dimana $A(x, t)$ merupakan luas penampang basah (m^2); $Q(x, t)$ merupakan debit aliran (m^3/s); x : posisi sepanjang saluran (m) dan t : waktu (s).

Persamaan di atas adalah persamaan kontinuitas atau persamaan konservasi massa untuk aliran tak-tunak satu dimensi pada saluran terbuka. Persamaan ini menyatakan bahwa laju perubahan luas penampang basah terhadap waktu ditambah dengan laju perubahan debit terhadap jarak adalah nol.

2.2.2 Persamaan Momentum

Persamaan momentum diturunkan dari hukum Newton kedua yang menyatakan bahwa laju perubahan momentum sama dengan resultan gaya yang bekerja pada sistem. Untuk volume kontrol yang sama, kita terapkan hukum ini pada arah aliran (sumbu x). Secara matematis, hukum Newton kedua untuk volume kontrol dapat dinyatakan sebagai:

$$\Sigma F = \text{Laju perubahan momentum dalam volume kontrol} \\ + \text{Fluks momentum neto keluar}$$

Pada elemen volume kontrol, terdapat beberapa gaya yang bekerja dalam arah aliran (sumbu x):

a. Gaya Gravitasi Komponen Aksial (F_g)

Komponen gaya berat fluida dalam arah aliran adalah:

$$F_g = \rho g A dx \sin \theta \quad (9)$$

Dengan asumsi sudut kemiringan kecil ($\sin \theta \approx \tan \theta = S_0$), maka:

$$F_g = \rho g A S_0 dx \quad (10)$$

dimana g adalah percepatan gravitasi (m/s^2) dan S_0 adalah kemiringan dasar saluran (m/m) = $\sin \theta \approx \tan \theta$.

b. Gaya Tekanan Hidrostatik (F_p)

Gaya tekanan hidrostatik bekerja pada kedua ujung volume kontrol. Dengan asumsi distribusi tekanan hidrostatik, gaya tekanan pada penampang di posisi x adalah:

$$F_{p1} = \rho g \bar{y} A \quad (11)$$

dimana $\bar{y}$ adalah kedalaman centroid penampang dari permukaan air. Gaya tekanan pada penampang di posisi $x + dx$ adalah:

$$F_{p2} = \rho g \left[\bar{y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} dx \right] \left[A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right] \quad (12)$$

Gaya tekanan neto adalah:

$$F_p = F_{p1} - F_{p2} = -\rho g \frac{\partial(\bar{y}A)}{\partial x} dx \quad (13)$$

Untuk saluran dengan lebar permukaan B , hubungan geometri menyatakan bahwa:

$$\frac{\partial(\bar{y}A)}{\partial x} = A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (14)$$

dimana h adalah kedalaman air dari dasar saluran. Dengan demikian:

$$F_p = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (15)$$

c. Gaya Gesek Dasar (F_f)

Gaya gesek yang bekerja pada dasar dan dinding saluran menghambat aliran. Gaya ini dapat dinyatakan sebagai:

$$F_f = -\tau_0 P dx = -\rho g A S_f dx \quad (16)$$

dimana τ_0 adalah tegangan geser pada dasar saluran (N/m^2), P adalah keliling basah (m), dan S_f adalah kemiringan garis energi (energy slope, m/m). Kemiringan garis energi S_f dapat dinyatakan menggunakan persamaan Manning atau Chezy $S_f = (n^2 Q^2)/(A^2 R^4/3)$ (Persamaan Manning) dimana n adalah koefisien kekasaran Manning dan R adalah jari-jari hidrolik ($R = A/P$).

Momentum fluida dalam volume kontrol adalah:

$$Momentum = (massa) \times (kecepatan) = (\rho A dx) \times V = \rho Q dx$$

karena $Q = A V$. Laju perubahan momentum terhadap waktu $\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q dx) = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx$

Fluks momentum yang masuk melalui penampang di hulu (posisi x):

$$\text{Momentum masuk} = \rho V Q = \rho \frac{Q^2}{A} \quad (17)$$

Fluks momentum yang keluar melalui penampang di hilir (posisi $x + dx$):

$$\text{Momentum keluar} = \rho \frac{Q^2}{A} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) dx \quad (18)$$

Fluks momentum neto keluar dari volume kontrol:

$$\begin{aligned} \Delta M &= \text{Momentum keluar} - \text{Momentum masuk} \\ &= \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \right] dx \end{aligned} \quad (19)$$

Menggabungkan semua komponen gaya dan momentum sesuai dengan hukum Newton kedua:

$$\Sigma F = \text{Laju perubahan momentum} + \text{Fluks momentum neto}$$

Substitusi semua komponen:

$$\rho g A S_0 dx - \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} dx - \rho g A S_f dx = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx + \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \right] dx \quad (20)$$

Bagi kedua ruas dengan ρdx :

$$g A S_0 - g A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) - g A S_f = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (21)$$

Susun ulang persamaan:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = g A S_0 - g A S_f \quad (22)$$

Karena $S_0 - S_f = -S_f$ untuk kemiringan dasar yang telah diperhitungkan dalam $\partial h / \partial x$, persamaan dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial h}{\partial x} + g A S_f = 0 \quad (23)$$

atau dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial h}{\partial x} + g A S_f = 0 \quad (24)$$

dimana $h(x, t)$ merupakan tinggi muka air (m) ; g merupakan percepatan gravitasi (m/s^2) ; S_f merupakan kemiringan gesek (akibat rugi-rugi energi) dan S_0 merupakan kemiringan dasar saluran.

Persamaan di atas adalah persamaan momentum atau persamaan konservasi momentum untuk aliran tak-tunak satu dimensi pada saluran terbuka. Persamaan ini menggambarkan keseimbangan antara percepatan aliran, perubahan momentum konveksi, gaya tekanan, dan gaya gesek.

Kedua persamaan (8) dan (24) membentuk sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik nonlinear yang menggambarkan dinamika aliran pada saluran terbuka. Persamaan (8) merepresentasikan konservasi massa, sedangkan persamaan (24) merepresentasikan konservasi momentum. Sistem ini membentuk sistem hiperbolik nonlinier yang menggambarkan fenomena transien dalam aliran air, seperti kenaikan tiba-tiba permukaan air (flood wave), pelepasan pintu air, dan pantulan gelombang (Wilson, 1972).

Hubungan antara variabel geometris penampang saluran dan kedalaman air h sangat bergantung pada bentuk penampang melintang. Untuk penampang persegi panjang dengan lebar dasar b , hubungan geometris bersifat linear: luas penampang basah $A = bh$, keliling basah $P = b + 2h$, jari-jari hidraulik $R = bh/(b + 2h)$, dan lebar permukaan bebas $B = b$ (konstan). Linearitas hubungan $A - h$ ini menyederhanakan diskritisasi numerik karena $\partial A/\partial h = b$ adalah konstanta. Sebaliknya, untuk penampang trapesium dengan lebar dasar b dan kemiringan sisi z (horizontal : vertikal = $z : 1$), hubungan geometris bersifat nonlinear: $A = (b + zh)h$, $P = b + 2h\sqrt{1 + z^2}$, $R = (b + zh)h/(b + 2h\sqrt{1 + z^2})$, dan $B = b + 2zh$. Nonlinearitas $A(h)$ pada penampang trapesium, di mana $\partial A/\partial h = b + 2zh$ bergantung pada h , memiliki implikasi penting terhadap kecepatan gelombang $c = \sqrt{(gA/B)}$, kondisi CFL, dan sensitivitas numerik dari skema diskritisasi yang digunakan.

Dalam banyak metode numerik, terutama skema eksplisit, persamaan Saint Venant ditulis dalam bentuk konservatif sebagai :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \quad (25)$$

dengan variabel konservatif :

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gAh \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ gAS_f \end{bmatrix} \quad (26)$$

Bentuk ini digunakan dalam banyak metode numerik konservatif seperti MacCormack, Finite Volume, WENO dan Godunov-type scheme (Leveque, 2002)

Dalam pendekatan eksplisit yang lebih sederhana, debit dapat dinyatakan sebagai $Q = A \cdot u$, sehingga sistem dapat ditulis ulang menjadi :

Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

Persamaan momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + gS_f = 0 \quad (28)$$

Formulasi ini umum dipakai pada metode MacCormack karena lebih mudah diimplementasikan untuk aliran dalam kanal dengan bentuk sederhana (Magdalena et al., 2024)

2.3 Metode MacCormack

Metode MacCormack merupakan metode numerik eksplisit yang umum digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial hiperbolik, termasuk Persamaan Saint Venant. Metode ini diperkenalkan oleh R.W. MacCormack pada tahun 1969 dalam studi dinamika fluida kompresibel, dan sejak itu banyak diadaptasi untuk berbagai aplikasi, termasuk aliran saluran terbuka (Maccormack, 1969). Hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode ini sangat baik untuk beberapa masalah aliran fluida (Said, Ribal & Mahie, 2017; Fikri dan Sumardi, 2022).

Metode MacCormack terdiri dari dua tahap, yaitu tahap prediktor dan tahap korektor. Misal diberikan persamaan linear adveksi satu dimensi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

dimana α merupakan kecepatan konstan dan $\alpha > 0$. Persamaan prediktor metode MacCormack diturunkan menggunakan beda hingga maju orde pertama. Skema beda maju dari u terhadap t menggunakan ekspansi deret Taylor berikut,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t)^3 \quad (30)$$

Berdasarkan persamaan (30) diperoleh

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (31)$$

Selanjutnya skema beda maju orde pertama dari u terhadap x menggunakan ekspansi deret Taylor berikut,

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (32)$$

Kemudian dari persamaan (32) diperoleh,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (33)$$

Substitusi persamaan (31) dan (33) ke persamaan (29),

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (34)$$

Pada tahap ini selanjutnya nilai sementara u_i^{n+1} dituliskan dengan notasi $\overline{u_i^{n+1}}$, sehingga diperoleh persamaan prediktor metode MacCormack sebagai berikut :

$$\overline{u_i^{n+1}} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha(u_{i+1}^n - u_i^n)) \quad (35)$$

Persamaan korektor menggunakan beda hingga mundur orde pertama untuk turunan pertama terhadap variabel waktu dan ruang. Pada turunan terhadap variabel ruang menggunakan nilai u sementara pada tingkat waktu $n + 1$ yang dituliskan dengan notasi $\overline{u_i^{n+1}}$. Kemudian nilai $u_i^{n+\frac{1}{2}}$ diperoleh dari,

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^n + \overline{u_i^{n+1}}}{2} \quad (36)$$

Skema beda hingga mundur setengah langkah didapatkan dari ekspansi deret Taylor berikut,

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \quad (37)$$

dari persamaan (37) diperoleh,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (38)$$

Selanjutnya pendekatan beda mundur orde pertama dari u_{i-1}^{n+1} menggunakan ekspansi deret Taylor,

$$u_{i-1}^{n+1} = u_i^{n+1} - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^{n+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (39)$$

Berdasarkan persamaan (39) diperoleh,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (40)$$

Kemudian menggunakan nilai u sementara yang dinotasikan $\overline{u_i^{n+1}}$ untuk pendekatan (35). Substitusi persamaan (38) dan (40) ke persamaan (29),

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \alpha \frac{\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_{i-1}^{n+1}}}{\Delta x} = 0 \quad (41)$$

Berdasarkan persamaan (41), diperoleh persamaan korektor metode MacCormack sebagai berikut :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_i^n + \overline{u_i^{n+1}} - \frac{\alpha \Delta}{\Delta x} (\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_{i-1}^{n+1}}) \right) \quad (42)$$

Jadi diperoleh skema numerik beda hingga metode MacCormack untuk persamaan (29) adalah sebagai berikut :

- Tahap Prediktor

$$\overline{u_i^{n+1}} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha (u_{i+1}^n - u_i^n)) \quad (43)$$

- Tahap Korektor

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_i^n + \overline{u_i^{n+1}} - \frac{\alpha \Delta}{\Delta x} (\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_{i-1}^{n+1}}) \right) \quad (44)$$

2.4 Metode Volume Hingga dengan Skema Lax-Friedrichs

Metode volume hingga didasarkan pada bentuk integral

$$\frac{d}{dx} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t)) \quad (45)$$

Dalam ruang dimensi satu, metode volume hingga membagi domain ruang ke dalam interval-interval. Metode volume hingga tidak secara langsung memperkirakan nilai di titik grid, domain dipecah ke dalam sel grid dan memperkirakan total integral dari q pada setiap sel grid dari masing-masing volume, atau sebenarnya rata-rata sel dari q . Setiap langkah waktu, nilai tersebut dimodifikasi dengan fluks pada tepi sel atau titik akhir interval. Masalah utama adalah menentukan fungsi fluks numeris yang dapat memperkirakan fluks secara tepat (Leveque, 2002).

Alat dasar yang digunakan untuk membangun metode volume hingga adalah masalah Riemann, yang menyederhanakan persamaan hiperbolik dengan initial data khusus. Data khusus tersebut adalah konstanta dengan satu lompatan diskontinu di beberapa titik, misalkan $x = 0$

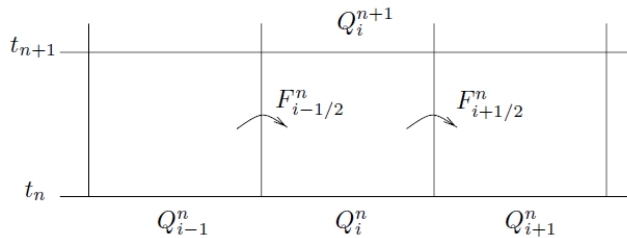
$$q(x, 0) = \begin{cases} q_l & \text{jika } x < 0 \\ q_r & \text{jika } x > 0 \end{cases} \quad (46)$$

Jika Q_{i-1} dan Q_i adalah rata-rata sel dari dua grid sel yang bersebelahan dalam grid volume hingga, kemudian dengan menyelesaikan masalah Riemann dengan $q_l = Q_{i-1}$ dan $q_r = Q_i$, diperoleh informasi yang dapat digunakan untuk menghitung fluks numeris dan memperbaharui rata-rata sel tiap langkah waktu.

Dimisalkan sel grid ke- i dengan

$$C_i = \left(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right) \quad (47)$$

seperti pada Gambar 2 berikut



Gambar 2. Ilustrasi metode volume hingga untuk memperbaharui rata-rata Q_i^n dengan fluks pada tepi sel. Diperlihatkan dalam ruang $x - t$

Nilai Q_i^n akan memperkirakan nilai rata-rata pada tiap interval ke- i pada waktu t_n :

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx \quad (48)$$

dimana $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ adalah panjang sel

Metode numeris dengan bentuk

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n), \quad (49)$$

dimana $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ adalah perkiraan rata-rata fluks pada $x = x_{i-\frac{1}{2}}$:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(q\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt, \quad (50)$$

Dimana $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ adalah langkah waktu.

Metode volume hingga yang spesifik tergantung pemilihan rumus fluks, tetapi pada umumnya, metode ini merupakan metode eksplisit dengan three-point stencil, yang berarti bahwa nilai Q_i^{n+1} bergantung pada tiga nilai Q_{i-1}^n , Q_i^n , dan Q_{i+1}^n pada level waktu sebelumnya.

Metode volume hingga Lax-Friedrichs untuk menyelesaikan hukum kekekalan $\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) = 0$ dinyatakan sebagai berikut

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (51)$$

dengan fluks sebagai berikut

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (f(Q_{i+1}^n) + f(Q_i^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) \quad (52)$$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (f(Q_i^n) + f(Q_{i-1}^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_i^n - Q_{i-1}^n) \quad (53)$$

2.5 Syarat Batas

Dalam pemodelan hidrodinamika satu dimensi menggunakan Persamaan Saint Venant, penentuan syarat batas (boundary conditions) merupakan langkah fundamental untuk menjamin keberadaan dan kekhasan solusi (well-posedness) dari

sistem persamaan hiperbolik (Vreugdenhil, 1994). Syarat batas mendefinisikan bagaimana aliran memasuki dan meninggalkan domain serta bagaimana interaksi aliran dengan struktur di dalam saluran dimodelkan. Pada penelitian ini digunakan tiga jenis syarat batas yang umum dalam simulasi aliran tidak tunak, yaitu Flow Hydrograph, Time Series Gate Openings, dan Normal Depth, sebagaimana direkomendasikan dalam HEC-RAS Hydraulic Reference Manual.

2.5.1 Flow Hydrograph

Flow hydrograph adalah syarat batas yang menentukan debit masuk sebagai fungsi waktu pada batas hulu. HEC-RAS memformulasikan hidrograf debit sebagai kondisi hulu untuk sistem Saint-Venant dengan perubahan debit dinyatakan sebagai (Brunner, 2020) :

$$\Delta Q_k^{n+1} = Q_k^n - Q_k, \quad (54)$$

yang selanjutnya dinyatakan dalam bentuk selisih hingga :

$$MUQ_m \Delta Q_k = MUB_m, \quad (55)$$

dengan $MUQ_m = 1$ dan $MUB_m = Q_1^{n+1} - Q_1$.

Flow hydrograph umum digunakan untuk memodelkan banjir sungai, rilis debit dari waduk, maupun debit pengaliran pada sistem irigasi (Henderson, 1966). Sebagai kondisi batas yang menggerakkan sistem (driving boundary), nilai debit hulu ini menjadi input langsung bagi penyelesaian numerik persamaan saint venant.

2.5.2 Time Series Gate Openings (T.S. Gate Openings)

Time series gate openings digunakan ketika terdapat struktur pintu air dengan bukaan yang berubah terhadap waktu, sehingga debit melewati pintu merupakan fungsi dari bukaan dan beda muka air. HEC-RAS menerapkan hubungan debit-head menggunakan persamaan orifice atau underflow gate :

$$Q = C_d b a(t) \sqrt{2g\Delta H}, \quad (56)$$

dimana C_d adalah koefisien debit, b lebar pintu, $a(t)$ tinggi bukaan pintu sebagai fungsi waktu, dan ΔH selisih muka air antara hulu dan hilir (Henderson, 1966).

Model ini memungkinkan representasi yang realistis terhadap operasi pintu air seperti pembukaan bertahap, pembukaan penuh, atau penutupan pada waktu tertentu. Menurut Dooge (1973), struktur kontrol seperti pintu air memainkan peran signifikan dalam distribusi debit dan respons hidraulik saluran, terutama pada aliran tidak tunak.

Koefisien debit (C_d) dalam persamaan gate bernilai kurang dari satu karena merupakan faktor koreksi yang memperhitungkan perbedaan antara debit teoritis

(berdasarkan persamaan energi ideal) dan debit aktual yang melewati pintu air. Secara fisik, nilai $C_d < 1$ disebabkan oleh fenomena kontraksi aliran (*vena contracta*): ketika air melewati bukaan pintu, garis arus aliran mengalami kontraksi sehingga luas penampang efektif aliran sesungguhnya lebih kecil dari luas bukaan pintu. Rasio antara ketebalan jet di titik kontraksi terhadap tinggi bukaan pintu disebut koefisien kontraksi (C_c), yang berkontribusi utama terhadap nilai $C_d < 1$. Selain itu, kehilangan energi akibat gesekan dan turbulensi di sekitar tepi pintu juga berkontribusi terhadap penurunan debit aktual. Nilai $C_d = 0.6$ yang digunakan dalam penelitian ini merupakan nilai standar yang telah banyak divalidasi dalam literatur hidraulika, khususnya untuk sluice gate vertikal pada kondisi aliran bebas (*free flow*) (Henderson, 1966; Swamee, 1992). Nilai ini konsisten dengan koefisien kontraksi teoritis untuk aliran di bawah pintu datar yang diturunkan dari analisis potensial (Rouse, 1946) dan telah dikonfirmasi melalui berbagai studi eksperimental.

2.5.3 Normal Depth

Normal depth digunakan sebagai syarat batas hilir ketika kondisi aliran di bagian hilir dianggap mengikuti kedalaman normal sesuai kemiringan dasar saluran. HEC-RAS menghitung kedalaman normal berdasarkan persamaan Manning (Chow, 1959) :

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S_0^{1/2}, \quad (57)$$

dengan n koefisien Manning, A luas penampang basah, R jari-jari hidraulik, dan S_0 kemiringan dasar. Nilai kedalaman hilir diperoleh melalui proses iterasi sehingga dapat digunakan sebagai kondisi batas muka air di hilir.

Normal depth lazim digunakan ketika hilir saluran panjang, seragam, dan tidak dipengaruhi struktur apa pun. Menurut (Henderson, 1966), kondisi kedalaman normal menghasilkan batas hilir yang stabil dan konsisten untuk penyelesaian numerik sistem aliran satu dimensi.

2.6 Konsistensi, Stabilitas dan Konvergensi

Skema beda hingga dianggap konsisten jika dapat direduksi menjadi persamaan diferensial parsial (PDP) awal tanpa variabel bebas. Jika dan, maka solusi yang menggunakan metode yang berbeda akan sama dengan solusi analitik PDP. Solusi yang menggunakan metode yang berbeda biasanya akan sesuai dengan solusi PDP, sehingga kriteria konsistensi dengan sendirinya terpenuhi. Jika selisih antara persamaan beda dan persamaan diferensial parsialnya menuju nol ketika panjang grid dibuat menuju nol, persamaan beda dianggap konsisten dengan persamaan differensial yang didekati. Dengan kata lain, persamaan beda dapat diubah menjadi PDP awal ketika panjang grid dibuat menuju nol (Alman, 2013).

Suatu persamaan beda hingga dihasilkan oleh penerapan skema numerik pada suatu persamaan differensial parsial. Solusi numerik dari persamaan beda hingga tersebut tidak selalu menghasilkan solusi yang sama dengan solusi eksak dari persamaan differensial parsial tersebut. Menurut Urroz (2004), persamaan beda hingga dikatakan stabil jika skema menghasilkan solusi yang terbatas (berhingga). Sebaliknya, jika solusi yang dihasilkan skema tidak terbatas, maka skema tersebut tidak stabil.

Ada banyak cara untuk melihat kestabilan persamaan beda. Metode yang dikembangkan oleh von Neumann adalah salah satu teknik yang paling umum digunakan untuk menganalisis kestabilan persamaan beda. Metode ini menggunakan komponen Deret Fourier untuk menyelesaikan suatu persamaan beda hingga ekspansi, seperti yang ditunjukkan di bawah ini :

$$\tilde{U}_i^n = \hat{U}^n e^{I(P\Delta x i)} \quad (58)$$

dengan $I = \sqrt{-1}$, dimana ρ^n merupakan amplitude pada waktu n dan P merupakan gelombang pada arah x .

Persamaan (58) sebelumnya disubstitusikan ke dalam persamaan beda yang akan dianalisis. Selanjutnya, dicari kondisi bagi Δx dan Δt agar $|\rho| \leq 1$, yang menunjukkan bahwa persamaan beda yang dibuat akan menghasilkan solusi yang berhingga untuk kondisi ini. Kondisi kestabilan yang dihasilkan oleh metode von Neumann dapat dituliskan sebagai berikut: (Alman, 2013)

1. Jika untuk nilai Δx dan Δt tertentu, $|\rho| \leq 1$, maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil bersyarat.
2. Jika untuk semua nilai Δx dan Δt , $|\rho| \leq 1$, maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil tak bersyarat.
3. Jika tidak ditemukan nilai Δx dan Δt sehingga $|\rho| \leq 1$, maka persamaan beda yang dibuat

2.7 Kestabilan Numerik dan Kondisi CFL

Dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial (PDP), keberhasilan suatu skema numerik sangat dipengaruhi oleh sifat kestabilannya. Kestabilan numerik berkaitan dengan kemampuan skema untuk mencegah pertumbuhan galat (error) dari suatu langkah waktu ke langkah berikutnya. Suatu skema numerik dikatakan stabil apabila galat yang muncul tidak mengalami amplifikasi tanpa batas selama proses iterasi waktu (Leveque, 2002).

Untuk persamaan hiperbolik seperti persamaan saint venant, kestabilan dan kovergensi solusi numerik sangat dipengaruhi oleh pemilihan langkah waktu Δt terhadap ukuran grid ruang Δx . Salah satu kriteria yang umum digunakan untuk menentukan langkah waktu yang sesuai adalah kondisi Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Kondisi ini pertama kali diperkenalkan oleh Courant, Friedrichs, dan Lewy dalam kajian metode beda hingga untuk persamaan diferensial parsial pada tahun 1928 (Courant, R., Friedrichs, K. & Lewy, 1928).

Secara konseptual, kondisi CFL menyatakan bahwa informasi fisik yang merambat dalam sistem harus dapat ditangkap oleh skema numerik yang digunakan. Dengan kata lain, domain ketergantungan numerik dari suatu metode harus memuat domain ketergantungan sejati dari persamaan diferensial parsial yang diselesaikan. Apabila kondisi ini tidak terpenuhi, maka solusi numerik tidak dapat merepresentasikan perilaku fisis sistem secara benar, sehingga konvergensi menuju solusi sejati tidak mungkin terjadi (Leveque, 2002).

Pada persamaan diferensial parsial hiperbolik seperti persamaan adveksi dan Persamaan Saint-Venant, informasi merambat dengan kecepatan hingga tertentu yang ditentukan oleh karakteristik sistem. Untuk memperjelas makna kondisi CFL, dipertimbangkan persamaan adveksi satu dimensi

$$q_t + \bar{u}q_x = 0 \quad (59)$$

dengan $\bar{u} > 0$ sebagai kecepatan adveksi konstan. Solusi eksak dari persamaan ini berupa pergeseran profil awal dengan kecepatan $\bar{u}$, sehingga dalam satu langkah waktu Δt , informasi merambat sejauh $\bar{u}\Delta t$ (Leveque, 2002).

Apabila digunakan metode eksplisit dengan stencil tiga titik, maka nilai solusi numerik pada satu sel hanya dipengaruhi oleh nilai pada sel-sel yang bersebelahan pada langkah waktu sebelumnya. Oleh karena itu, agar informasi fisik yang merambat tidak melampaui jangkauan skema numerik, jarak rambatan informasi dalam satu langkah waktu tidak boleh melebihi ukuran satu sel grid. Syarat ini dinyatakan dalam bentuk

$$\left| \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad (60)$$

Besaran

$$v = \left| \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \right| \quad (61)$$

disebut sebagai bilangan Courant (Courant number) (Leveque, 2002).

Secara umum, untuk sistem persamaan hiperbolik berbentuk hukum kekekalan

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(q)}{\partial x} = 0 \quad (62)$$

Kecepatan rambatan informasi ditentukan oleh nilai eigen matriks Jacobian fluks

$$A(q) = \frac{\partial f}{\partial q} \quad (63)$$

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ menyatakan nilai-nilai eigen dari matriks tersebut, maka bilangan Courant secara umum didefinisikan sebagai

$$v = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_p |\lambda_p| \quad (64)$$

Untuk metode eksplisit dengan stencil lokal, kondisi CFL memberikan syarat perlu kestabilan dalam bentuk

$$v \leq 1 \quad (65)$$

(Leveque, 2002).

Perlu ditekankan bahwa kondisi CFL bukan merupakan syarat cukup untuk kestabilan metode numerik. Meskipun kondisi CFL terpenuhi, metode numerik tertentu masih dapat bersifat tidak stabil, sehingga analisis kestabilan tambahan tetap diperlukan. Namun demikian, apabila kondisi CFL dilanggar, maka metode numerik dipastikan tidak akan konvergen (Leveque, 2002).

Perbedaan karakteristik persamaan diferensial parsial juga mempengaruhi bentuk kondisi CFL. Pada persamaan hiperbolik, kecepatan rambatan informasi bersifat terbatas, sehingga langkah waktu dapat dipilih sebanding dengan ukuran grid ruang. Sebaliknya, pada persamaan parabolik seperti persamaan difusi, domain ketergantungan sejati mencakup seluruh domain ruang untuk setiap waktu $t > 0$. Akibatnya, metode eksplisit memerlukan langkah waktu yang jauh lebih kecil, umumnya dengan orde

$$\Delta t = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (66)$$

atau alternatifnya menggunakan metode implisit yang lebih stabil karena domain ketergantungan numeriknya mencakup seluruh domain secara langsung (Leveque, 2002).

Dalam konteks Persamaan Saint-Venant satu dimensi, sistem ini merupakan sistem hiperbolik dengan nilai eigen matriks Jacobian fluks diberikan oleh

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh} \quad (67)$$

dengan u menyatakan kecepatan aliran dan h kedalaman air. Oleh karena itu, kondisi CFL untuk Persamaan Saint-Venant dapat dituliskan sebagai

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max|u \pm \sqrt{gh}|} \quad (68)$$

Kondisi ini digunakan sebagai dasar dalam pemilihan langkah waktu pada simulasi numerik Persamaan Saint-Venant menggunakan metode eksplisit, termasuk metode MacCormack dan metode volume hingga (Leveque, 2002).

2.8 Root Mean Square Deviation (RMSD)

Dalam analisis GCI untuk solusi dengan banyak titik data atau distribusi spasial, Root Mean Square Deviation (RMSD) digunakan untuk mengkuantifikasi perbedaan antara solusi pada berbagai tingkat refinasi grid. RMSD didefinisikan sebagai:

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_{mn}^2} \quad (69)$$

dimana k merupakan jumlah titik pengukuran dan ε_{mn} merupakan kesalahan absolut antara solusi pada mesh m dan n

Kesalahan absolut untuk setiap titik dihitung sebagai $\varepsilon_{mn} = f_m - f_n$. RMSD memberikan ukuran global dari perbedaan solusi dan lebih robust terhadap variasi lokal dibandingkan dengan evaluasi titik-per-titik. Penggunaan RMSD sangat penting dalam aplikasi dimana solusi memiliki variasi spasial yang kompleks dan terdapat kemungkinan crossover points di mana orde akurasi lokal menjadi tidak terdefinisi.

Baker et al. (2019) menggunakan relative RMSD dalam analisis konvergensi profil kecepatan aliran udara dengan mengevaluasi pada 1000 titik sepanjang garis pengukuran di tengah geometri model. Pendekatan ini memungkinkan evaluasi konvergensi yang lebih komprehensif dan robust dibandingkan dengan pengukuran di lokasi tunggal. Formulasi GCI dengan RMSD menjadi :

$$GCI_{fine} = \frac{F_s}{r^p - 1} \varepsilon_{rms,21} \quad (70)$$

dimana $\varepsilon_{rms,21}$ adalah RMSD antara solusi grid halus dan menengah.

2.9 Software HEC-RAS

HEC-RAS (Hydrologic Engineering Center's River Analysis System) adalah software komprehensif yang dikembangkan oleh U.S. Army Corps of Engineers untuk analisis hidraulik sistem sungai dan saluran terbuka. Software ini pertama kali dirilis pada tahun 1995 dan sejak itu telah menjadi standar industri untuk hydraulic modeling di seluruh dunia, digunakan oleh ribuan engineer, peneliti, dan praktisi dalam berbagai aplikasi water resources engineering (Brunner, 2020).

HEC-RAS memiliki empat komponen analisis utama yang dapat melakukan perhitungan untuk profil muka air steady flow, simulasi aliran tidak tunak (unsteady flow), analisis transpor sedimen, dan analisis kualitas air. Untuk keperluan penelitian ini, fokus diberikan pada modul unsteady flow analysis yang menggunakan persamaan Saint Venant lengkap untuk memodelkan propagasi gelombang dalam saluran terbuka. Software ini menyediakan interface grafis yang user-friendly, kemampuan pre-processing dan post-processing yang powerful, serta numerical schemes yang telah teruji dan tervalidasi secara ekstensif dalam literatur dan praktik engineering (Brunner, 2020).

Keunggulan HEC-RAS sebagai tool untuk hydraulic modeling terletak pada kombinasi antara robustness numerical schemes, flexibility dalam handling berbagai geometri saluran dan struktur hidraulik, dan extensive validation terhadap kasus-kasus benchmark dan data lapangan. Software ini dapat menangani berbagai struktur hidraulik seperti bridges, culverts, weirs, gates, dan inline structures lainnya dengan formulasi yang sophisticated. HEC-RAS juga menyediakan berbagai boundary condition options, termasuk stage hydrograph, flow hydrograph, rating curve, dan normal depth, yang memungkinkan representasi realistis dari kondisi upstream dan downstream (USACE, 2024).

Perlu ditegaskan bahwa dalam konteks penelitian ini, hasil simulasi HEC-RAS digunakan sebagai *benchmark* numerik (solusi referensi), bukan sebagai data hasil observasi lapangan ataupun eksperimen laboratorium. Output HEC-RAS merupakan solusi numerik yang dihasilkan oleh skema implisit Preissmann (empat titik) yang berbeda secara fundamental dari kedua metode eksplisit yang dikembangkan dalam penelitian ini. Perbedaan pendekatan numerik ini menjadikan perbandingan terhadap HEC-RAS sebagai *cross-verification* independen yang bermakna. HEC-RAS sendiri telah melalui proses validasi ekstensif terhadap data eksperimen dan data lapangan, serta telah digunakan dan dikutip dalam ribuan publikasi jurnal bereputasi tinggi di bidang *computational hydraulics*, termasuk *Journal of Hydraulic Engineering*, *Journal of Hydrology*, dan *Water Resources Research* (Brunner, 2020; USACE, 2024). Pendekatan validasi *numerical-to-numerical* ini lazim digunakan dalam riset metode numerik ketika data eksperimen tidak tersedia atau sulit diperoleh, karena kesesuaian antara dua implementasi numerik yang berbeda secara independen memberikan tingkat keyakinan yang memadai terhadap kebenaran solusi (Magdalena et al., 2024).