

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini, kasus bencana gempabumi masih menjadi salah satu kasus bencana fisik alam terbesar di dunia, khususnya daerah yang berada dalam kawasan *belt of fire*, yang mengakibatkan banyak korban jiwa yang berjatuh. Hal ini menunjukkan pentingnya upaya mitigasi bencana yang terintegrasi dan visioner untuk meminimalisasi dampak buruk yang ditimbulkan.

Gempabumi dapat terjadi karena pelepasan energi potensial elastis oleh aktivitas geologi di bawah permukaan bumi yang terkonversi ke dalam bentuk energi seismik dan energi lainnya, dan dirasakan wujudnya dalam bentuk guncangan. Pelepasan energi potensial elastis tersebut dapat terjadi, ketika zona sesar yang terkait tidak mampu menahan tekanan atau tegangan yang besar dari peristiwa tumbukan antar lempeng. Oleh karena itu, magnitudo gempabumi dapat bergantung pada besar energi potensial elastis yang tersimpan dan terakumulasi (Matsu'ura, 2024). Salah satu faktor utama yang berperan dalam menentukan akumulasi besar energi potensial elastis pemicu gempabumi adalah kekakuan dari zona sesar (Gatti, 2021).

Sebagian besar penanganan kasus gempabumi saat ini masih melalui pemberitahuan peringatan dini mengenai lokasi dan waktu terjadinya gempabumi. Kenyataannya, terkadang prediksi terjadinya gempabumi yang disebarkan masih kurang akurat dan tidak efektif khususnya pada periode waktu saat masyarakat di sekitar daerah potensial gempabumi dalam keadaan tertidur atau kurang terjaga. Oleh karena itu, diperlukan jenis penanganan gempabumi lainnya yang dapat mengatasi kekurangan-kekurangan tersebut.

Penelitian Soleimani (2020) dan Fereidooni (2022) menginspirasi jenis penanganan gempabumi yang digunakan pada penelitian ini, yaitu penanganan gempabumi melalui injeksi suatu cairan ionik *task-specific* pada zona sesar. Cairan ionik merupakan materi kimia yang telah banyak diaplikasikan di berbagai bidang, karena fleksibilitas keunggulannya. Salah satu keunggulannya adalah cairan ini dapat memodifikasi sifat fisik dan kimia dari suatu materi sesuai dengan konteks penggunaannya yang diinginkan (Pei, et al., 2022; Soleimani, 2020). Untuk mendapatkan hasil yang optimal, maka lokasi lempeng yang akan diinjeksikan cairan ionik harus merupakan titik hiposenter yang tepat. Oleh karena itu, dipertimbangkan menggunakan metode *double difference* yang digunakan oleh Massinai et al. (2024). Cairan ionik akan mengakibatkan perubahan pada struktur mineral dari zona sesar yang terinjeksi melalui reaksi substitusi kimia, sedemikian sehingga berpotensi mengurangi kekakuan zona sesar yang terkait.

Sejatinya, sejak pertama kali fenomena gempabumi terekam, telah banyak penelitian yang membahas mengenai bencana alam ini, khususnya dalam

memodelkannya secara matematika. Pada tahun 1944, dua seismolog terkenal dunia, Gutenberg dan Richter, merumuskan persamaan yang dapat digunakan untuk menentukan magnitudo dan frekuensi kejadian dari suatu gempa bumi (Gutenberg dan Richter, 1944). Seiring perkembangan zaman, penelitian mengenai pemodelan gempa bumi berkembang lebih maju. Kagho et al. (2015) memodelkan dinamika gempa bumi dibawah pengaruh kekuatan dorongan magma. Model ini memberikan gambaran tentang bagaimana interaksi antara kekuatan magma dan pergerakan lempeng tektonik dapat mempengaruhi dinamika gempa bumi, serta bagaimana berbagai parameter mekanik dari model berperan dalam peristiwa tersebut. Fogang et al. (2021) mengembangkan pemodelan dinamika gempa bumi dari Kagho et al. (2015) dengan melibatkan konsep fraksional, yaitu hukum pangkat fraksional dan gesekan orde fraksional, yang membuat modelnya lebih representatif.

Dalam penelitian yang bersifat simulatif ini, model matematika yang dikonstruksi tidak hanya mengakomodasi gaya-gaya yang dapat menimbulkan terjadinya gempa bumi, seperti yang dikembangkan oleh Kagho et al. (2015) dan Fogang et al. (2021), tetapi juga melibatkan variabel mekanik tambahan dari zona sesar, serta aplikasi cairan ionik *task-specific* yang merepresentasikan intervensi penanganan gempa bumi. Berdasarkan teori energi potensial elastis, kekakuan zona sesar (modulus geser) dan displacement sesar (displacement elastis uniaksial di sepanjang zona sesar) diidentifikasi sebagai faktor kunci yang menentukan akumulasi energi potensial elastis yang berasal dari tumbukan lempeng tektonik yang memicu gempa bumi. Model ini merepresentasikan dinamika variabel mekanik dari suatu zona sesar dengan melibatkan pengaruh suatu cairan ionik *task-specific* seiring berjalannya waktu setelah diinjeksikan ke dalam zona sesar tersebut. Variabel-variabel mekanik yang dimaksud antara lain kekakuan zona sesar, displacement sesar, dan tegangan tektonik pada zona sesar. Setelah model dikonstruksi, dilakukan analisis kestabilan model pada titik kesetimbangannya dengan menggunakan metode Lyapunov. Eksistensi fungsi Lyapunov yang memenuhi syarat-syarat yang dibutuhkan untuk model menjamin kestabilan global dari model pada titik kesetimbangan yang dievaluasi (Elkaranshaw, et al., 2021). Nilai kompartemen dari titik kesetimbangan model yang stabil digunakan untuk menentukan energi potensial elastis pemicu gempa bumi dari peristiwa tumbukan lempeng tektonik yang terkait. Energi potensial elastis menjadi acuan dalam mengestimasi magnitudo gelombang permukaan dan magnitudo momen untuk menetapkan kategori gempa bumi.

Penelitian ini dikaji dan dianalisa dalam sebuah tulisan dengan judul **“Pemodelan Matematika Mekanika Zona Sesar di Bawah Injeksi Cairan Ionik *Task-Specific* dan Implikasinya terhadap Gempabumi dengan Magnitudo Rendah”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian, rumusan masalah diberikan sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk model matematika dari dinamika variabel mekanik zona sesar (kekakuan zona sesar, displacement sesar, dan tegangan tektonik) yang melibatkan pengaruh injeksi cairan ionik *task-specific* sebagai bentuk intervensi pengendalian magnitudo gempabumi ?
2. Dengan dikonstruksinya model matematika mekanika zona sesar di bawah injeksi cairan ionik *task-specific*, bagaimana analisis kestabilan dan perilaku dari model tersebut terhadap keadaan kesetimbangan seiring berjalannya waktu ?
3. Berdasarkan analisis kestabilan dan perilaku dari model matematika mekanika zona sesar di bawah injeksi cairan ionik *task-specific* terhadap keadaan kesetimbangan, bagaimana interpretasi dari hasil analisis tersebut, dan perannya dalam menentukan magnitudo gempabumi yang dapat terjadi ?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, diberikan asumsi-asumsi yang menjadi batasan masalah penelitian. Asumsi-asumsinya adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini bersifat simulatif.
2. Tugas khusus dari cairan ionik pada penelitian ini adalah merubah struktur mineral dari zona sesar.
3. Penelitian ini tidak membahas arah vektor dari seluruh entitas yang terlibat dalam model, melainkan terfokus pada besar entitasnya.
4. Terdapat empat kompartemen model pada penelitian ini, yaitu kekakuan zona sesar yang dinotasikan dengan K , displacement sesar yang dinotasikan dengan X , tegangan tektonik pada zona sesar yang dinotasikan dengan P , dan volume cairan ionik *task-specific* yang diinjeksikan ke dalam zona sesar yang dinotasikan dengan C .
5. Model yang dikonstruksi, zona sesarnya dalam keadaan deformasi elastis.
6. Pemilihan lempeng tektonik (zona sesar) yang menjadi target injeksi cairan ionik *task-specific* adalah lempeng tektonik yang memiliki ukuran kecil, dan memiliki sejarah frekuensi dan intensitas yang cukup tinggi menyebabkan terjadinya gempabumi.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dari penelitian ini, maka tujuan penelitian diuraikan sebagai berikut:

1. Memformulasikan model matematika dari dinamika variabel mekanik zona sesar yang melibatkan pengaruh injeksi cairan ionik *task-specific* sebagai bentuk intervensi pengendalian magnitudo gempabumi.

2. Menganalisa kestabilan dan perilaku dari model matematika mekanika zona sesar di bawah injeksi cairan ionik *task-specific* terhadap keadaan kesetimbangan seiring berjalannya waktu.
3. Memberikan gambaran mengenai interpretasi dari hasil analisis kestabilan dan perilaku dari model matematika mekanika zona sesar di bawah injeksi cairan ionik *task-specific* terhadap keadaan kesetimbangan, dan perannya dalam menentukan magnitudo gempabumi yang dapat terjadi.

1.5 Manfaat Penelitian

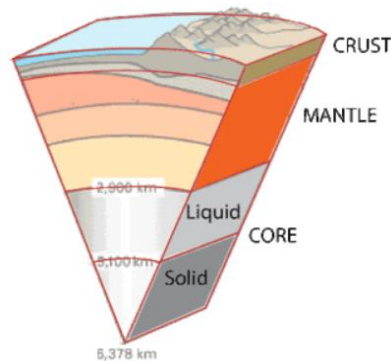
Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah

1. Menambah pengetahuan masyarakat mengenai deskripsi gempabumi.
2. Memberikan informasi mengenai bentuk penanganan gempabumi yang inovatif, visioner dan biodegradable, yaitu penanganan gempabumi dengan menggunakan cairan ionik tertentu. Bentuk penanganan ini dapat menjadi opsi penanganan gempabumi yang diharapkan mampu memperbesar kemungkinan eksistensi gempabumi yang akan terjadi bukan dalam skala megnitudo besar.
3. BMKG (Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika), selaku instansi resmi yang terkait dengan gempabumi, dapat mempertimbangkan dan menjadikan model matematika mekanika zona sesar di bawah injeksi cairan ionik *task-specific* sebagai model tambahan dalam mendeskripsikan dan mengidentifikasi keadaan di zona pertemuan lempeng tektonik.
4. Sebagai dasar penelitian-penelitian selanjutnya khususnya yang berkaitan dengan bentuk penanganan kasus bencana gempabumi.

1.6 Teori

1.6.1 Kerak Bumi

Bumi sebagai rumah kehidupan memiliki tiga lapisan utama geologi, yaitu kerak bumi, mantel bumi, dan inti bumi. Kerak bumi, yang merupakan lapisan terluar dari bumi, tersusun dari oksigen sebesar 46%, silikon sebesar 27%, aluminium sebesar delapan persen, besi sebesar lima persen, kalsium sebesar tiga persen, natrium, kalium, dan magnesium sebesar dua persen, dan sisanya merupakan materi-materi kimia lainnya yang jumlahnya relatif sangat rendah (dibawah satu persen).



Gambar 1.1 Struktur lapisan geologi bumi

Sumber: United States Geological Survey (USGS), public domain

Terdapat dua jenis kerak bumi, yaitu kerak benua (kerak yang kaya akan silikat aluminium) dan kerak samudera (kerak yang didominasi oleh kandungan silikat magnesium). Kerak benua memiliki ketebalan sekitar 50 km , dan penyusun utamanya adalah batuan granit. Sedangkan, kerak samudra memiliki ketebalan sekitar 10 km , dan penyusun utamanya adalah batuan basalt. Kerak samudra membentuk sebagian besar dasar lautan, mencakup sekitar 70%, dari bumi (Johnson, et al., 2017).

1.6.2 Zona Sesar

Arus konveksi magma yang terdapat di mantel atas (astenosfer) merupakan penyebab utama terbentuknya lempeng tektonik. Arus konveksi ini memberikan dorongan kuat kepada litosfer, sedemikian sehingga litosfer tersebut terpisah menjadi beberapa kepingan-kepingan yang disebut sebagai lempeng tektonik. Pergerakan lempeng-lempeng tektonik tidak selalu berlangsung secara mulus, melainkan sering menghasilkan zona-zona lemah baik di batas lempeng maupun di dalam lempeng yang terkait. Zona-zona lemah ini dikenal sebagai zona sesar, yaitu daerah di kerak bumi yang tersusun atas struktur patahan yang mencakup inti sesar dan zona kerusakan akibat deformasi tektonik yang berlangsung secara kontinyu. Zona sesar tersebut telah diteliti secara ekstensif, mulai dari aspek geometrinya hingga sifat internalnya, menggunakan berbagai metode seismologi modern untuk memahami evolusi dan mekanika sesar (Cai, et al., 2024; Zeng, et al., 2023).

Zona sesar terbentuk terutama di sepanjang batas lempeng tektonik, dan juga terkadang di dalam lempeng tektonik, dimana batuan yang terkait mengalami perubahan struktur internal dan sifat mekanik akibat proses deformasi tektonik. Lempeng tektonik pada kerak benua mengandung sebagian besar batuan granit, sedangkan batuan utama yang membentuk lempeng tektonik pada kerak samudera adalah batuan basalt (Johnson, et al., 2017). Batuan yang membentuk lempeng tektonik biasanya mengandung kekakuan spesifik untuk setiap batumannya. Faktor

utama yang dapat menentukan besar atau rendahnya kekakuan dari batuan lempeng tektonik (kekakuan lempeng tektonik) adalah keberadaan mineral pada lempeng tersebut, seperti mineral kuarsa dan mineral feldspar (Fereidooni, 2022).

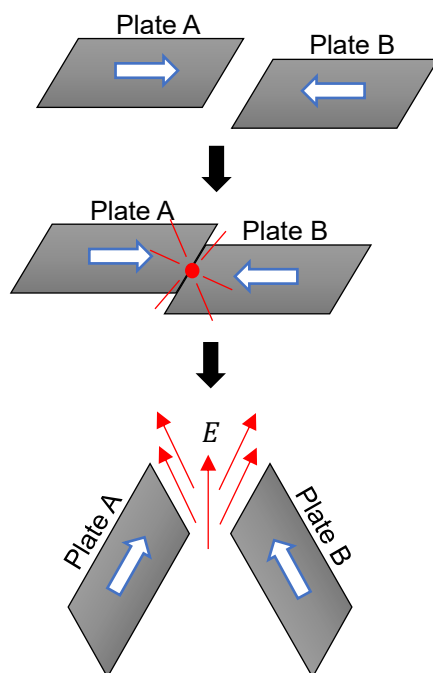
Mineral adalah unsur atau senyawa kimia yang umumnya berbentuk kristal dan terbentuk sebagai hasil proses geologi. Terdapat berbagai jenis mineral di bawah permukaan bumi. Mineral kuarsa dan mineral feldspar adalah dua mineral yang paling melimpah di kerak benua. Kedua mineral ini diklasifikasikan sebagai silikat rangka, dan biasanya ditemukan dalam batuan beku (seperti granit, riolit, dan basalt), batuan metamorf dan batuan sedimen detrital.

Kuarsa terdiri dari silika murni SiO_2 dengan tetrahedron yang tersusun dalam rangka tiga dimensi. Kuarsa sangat melimpah jumlahnya dalam batuan sedimen detrital karena sangat tahan terhadap pelapukan. Sebagian besar feldspar terdiri dari silika dengan aluminium, kalium, natrium, dan kalsium. Terdapat dua jenis feldspar, yaitu feldspar ortoklas KAlSi_3O_8 dan feldspar plagioklas $(\text{Ca}, \text{Na})\text{AlSi}_3\text{O}_8$. Feldspar ortoklas mengandung kalium, silika, dan aluminium yang banyak ditemukan pada batuan felsik di kerak benua. Sedangkan, feldspar plagioklas mengandung natrium dan kalsium yang banyak ditemukan pada batuan mafik di kerak samudera. Pada feldspar ini, larutan padat (Ca, Na) menunjukkan serangkaian mineral yang terdiri dari satu ujung seri dengan kalsium $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$ disebut anorthit, dan ujung lainnya dengan natrium $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$ disebut albit. Kuarsa dan feldspar ortoklas tergolong dalam mineral felsik (Johnson, et al., 2017).

1.6.3 Gempabumi

Bentuk eksistensi gempabumi yang dapat dirasakan adalah berupa guncangan di permukaan bumi. Gempabumi merupakan guncangan yang terjadi akibat pelepasan energi potensial elastis yang tersimpan dalam batuan, yang diakibatkan oleh deformasi pada litosfer (Matsu'ura, 2024).

Proses terbentuknya gempabumi diawali dari arus konveksi magma cair di astenosfer yang mendorong lempeng tektonik untuk bergerak dengan bebas. Akibatnya, lempeng-lempeng tersebut dapat saling menabrakan diri, dan kemudian berpotensi terjadi peristiwa tumbukan antar lempeng tektonik. Dalam proses berlangsungnya tumbukan antar lempeng, terjadi akumulasi energi potensial elastis yang akan berkontribusi pada besar magnitudo gempabumi (Matsu'ura, 2024). Apabila lempeng (zona sesar) yang terkait sudah tidak dapat menahan tekanan atau tegangan dari peristiwa tumbukan antar lempeng, maka energi potensial elastis akan dilepaskan dalam wujud energi seismik. Energi seismik merupakan sumber energi yang dibutuhkan oleh gelombang gempabumi (gelombang seismik) untuk menjalar dari titik hiposenter gempabumi ke permukaan bumi dengan radius penjaran gelombang tertentu.



Gambar 1.2 Proses pelepasan energi potensial elastis (E) dari peristiwa tumbukan antar lempeng tektonik

Selain kerusakan hingga kehancuran fisik alam (lingkungan, bangunan dan fasilitas publik yang hancur), eksistensi gempa bumi juga dapat memicu terjadinya bencana fisik alam lainnya, seperti longsor, likuifaksi, hingga tsunami (Johnson, et al., 2017).

1.6.4 Cairan Ionik

Cairan ionik telah berkembang sebagai salah satu temuan materi kimia yang inovatif dan revolusioner dalam kajian kimia modern. Umumnya, cairan ionik memiliki beberapa keunggulan, diantaranya adalah stabilitas termal yang tinggi (Soleimani, 2020), volatilitas dan tekanan uapnya rendah, potensi besar sebagai katalisator yang baik (Zhao dan Malhotra, 2002), biodegradable dan ramah lingkungan pada saat diterapkan (Earle dan Seddon, 2000), dan sifat fisik dan kimianya menarik untuk berbagai aplikasi (Ferraz, et al., 2011).

Cairan ionik merupakan cairan yang terbentuk dari hasil kombinasi antara materi kation dan materi anion yang terikat secara elektrostatis. Karakteristik, sifat, dan keunggulan dari masing-masing materi kation dan anion akan diberikan kepada produk baru cairan ionik yang dihasilkan. Artinya cairan ionik dapat diatur keunggulannya sesuai dengan aplikasi yang diinginkan (Soleimani, 2020). Cairan ionik memiliki berbagai jenis cairan. Beberapa diantaranya adalah cairan ionik *task-*

specific (Korade, et al., 2016), cairan ionik *supported* (Tian, et al., 2013), dan cairan ionik *acid* (Amarasekara, 2016).

1.6.4.1 Cairan Ionik *Task-specific*

Cairan ionik *task-specific* adalah jenis cairan ionik yang dapat dibuat atau dimodifikasi untuk kebutuhan tugas tertentu. Sebagai contoh, dirancang cairan ionik yang memiliki kemampuan dapat memisahkan CO₂ dari aliran gas, maka cairan ioniknya harus memiliki kation yang mengandung gugus fungsional amina (Bates, et al., 2002). Sedangkan, apabila kationnya adalah gugus asam sulfonat, maka cairan ioniknya memiliki kemampuan yang baik dalam melarutkan dan mengkatalisis dalam reaksi esterifikasi (Cole, et al., 2002). Beberapa aplikasi lainnya dari cairan ionik *task-specific* seperti sintesis kimia organik, stabilitas nanopartikel, dan aplikasinya di bidang elektrokimia (Soleimani, 2020).

1.6.4.2 Cairan ionik *Supported*

Terkadang, penggunaan cairan ionik memiliki beberapa kendala atau masalah. Salah satu masalah yang cukup sering terjadi adalah besarnya jumlah cairan ionik yang digunakan, sedemikian sehingga menjadi tidak ekonomis. Untuk mengatasi masalah tersebut, para ahli kimia merancang cairan ionik *supported* (Soleimani, 2020).

Cairan ionik *supported* adalah jenis cairan ionik yang didukung oleh suatu bahan lain (salah satu contohnya adalah substrat padat) untuk meningkatkan fungsionalitas dan stabilitasnya, dan menghemat penggunaannya saat diaplikasikan (Zhao, et al., 2007; Jadhav, et al., 2013; Choi, et al., 2013; Kim dan Chi, 2004).

Mekanisme aplikasi cairan ionik *supported* dilakukan dengan cara menempelkan bahan kimianya pada substrat. Akibatnya, stabilitas cairan ioniknya meningkat, dan memungkinkan cairan ioniknya dapat didaur ulang beberapa kali (Sans, et al., 2011). Salah satu substrat yang biasa digunakan untuk stabilisasi suatu cairan ionik adalah gel silika. Gel silika memiliki permukaan yang memuat dua jenis gugus fungsional, yaitu siloksan (Si – O – Si) dan silanol (Si – OH). Oleh karena itu, modifikasi gel silika dan pemasangan gugus yang berbeda pada gel tersebut dapat dilakukan dengan gugus siloksan atau silanol. Umumnya, modifikasi gel silika dengan gugus silanol dianggap sebagai mekanisme utama dalam stabilisasi berbagai gugus fungsional pada gel silika (Corma, 1997; Banerjee, et al., 2001; Armistead, et al., 1969; Mehnert, et al., 2002; Mehnert, 2005).

1.6.4.3 Cairan Ionik *Acid*

Cairan ionik *acid* adalah jenis cairan ionik yang mengandung gugus asam (komponen asam) pada materi struktur kation atau materi struktur anionnya. Dengan adanya komponen asam pada cairan ionik, maka cairan ionik tersebut dapat memiliki kemampuan atau keunggulan dari materi kation atau materi anionnya yang tergolong

asam, dan juga dari materi kimia yang dikombinasikan lainnya yang bukan tergolong asam (Amarasekara, 2016).

Cairan ionik *N-metil-2-pirrolidoniun metil sulfonate* merupakan salah satu contoh cairan ionik *acid*. Cairan ionik ini telah digunakan sebagai katalis dalam reaksi esterifikasi, memiliki aktivitas katalitik yang tinggi, sedemikian sehingga reaksi kimianya dapat dilakukan dengan mudah pada suhu kamar (Zhang, et al., 2007; Gui, et al., 2004).

Umumnya, beberapa keunggulan dari cairan ionik *acid* adalah katalisator yang baik, stabilitas termal, ramah lingkungan, fleksibel dalam desain yang diinginkan (khususnya dalam pemilihan komponen asam untuk keunggulan spesifik yang diinginkan dari cairan ionik), persiapan yang sederhana, dan umumnya, biayanya cukup rendah (Soleimani, 2020). Pada beberapa aplikasi lainnya, komponen asam dari cairan ionik *acid* dapat menurunkan kekakuan dari batuan dengan merubah struktur mineralnya (Gill, 2015; Soleimani, 2020; Pei, et al., 2022; Fereidooni, 2022).

1.6.5 Energi Potensial Elastis

Elastisitas adalah kemampuan suatu materi untuk kembali ke bentuk semula setelah mengalami deformasi (perubahan fisik atau bentuk dari materi), yang disebabkan oleh gaya yang diberikan ke materi tersebut berangsur-angsur menghilang. Materi elastis dapat menyimpan suatu energi, akibat dikenakan gaya atau tekanan. Energi yang dimaksud adalah energi potensial elastis.

Energi potensial elastis adalah energi yang tersimpan di dalam suatu materi yang mengalami deformasi yang disebabkan oleh pemampatan atau peregangan dari materi tersebut terhadap posisi setimbangnya. Berikut ini diberikan formula dari energi potensial elastis (sistem pegas) (Serway dan Jewett, 2010)

$$E = \frac{1}{2} k X^2 \quad (1)$$

dengan,

E : Energi potensial elastis (J)

k : Konstanta kekakuan materi ($\frac{N}{m}$)

X : Displacement materi (m).

Displacement materi merupakan perubahan bentuk dari suatu materi, yang merujuk pada selisih antara perubahan panjang dan panjang awal dari materi tersebut. Perubahan panjang yang dimaksud dapat berupa pemampatan atau peregangan dari materi, akibat adanya gaya eksternal yang mengenainya. Jika gaya yang mengenainya adalah gaya dorong maka variabel X dapat dinyatakan sebagai panjang kompresinya. Sedangkan, jika gayanya adalah gaya tarik maka variabel X dapat dinyatakan sebagai panjang regangannya (Serway dan Jewett, 2010).

1.6.6 Gaya Restoratif

Gaya restoratif atau gaya pemulih adalah gaya yang bekerja pada suatu materi untuk mengembalikan materi tersebut ke posisi keseimbangan (posisi semula) setelah mengalami deformasi. Gaya restoratif umumnya berkaitan dengan sifat elastis dari materi, dan dapat dijelaskan fenomenanya dengan menggunakan konsep dari hukum Hooke. Gaya restoratif dapat diformulasikan sebagai berikut (Serway dan Jewett, 2010):

$$F_R = kX \quad (2)$$

dengan,

F_R : Gaya restoratif (N)

1.6.7 Modulus Kekakuan

Modulus kekakuan, atau sering juga disebut sebagai modulus geser, merupakan ukuran kemampuan suatu materi dalam menahan deformasi yang terjadi, akibat adanya tegangan geser yang terdapat pada materi tersebut. Saat materi mengalami deformasi, maka modulus kekakuannya dapat ditinjau berdasarkan sejauh mana materinya dapat mempertahankan bentuk aslinya dibawah pengaruh tegangan geser. Tegangan geser dapat terjadi karena gaya yang mengenai materi sejajar terhadap permukaannya. Modulus kekakuan dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$K = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} \quad (3)$$

dengan,

K : Modulus kekakuan (Pa)

σ_s : Tegangan geser (Pa)

ε_s : Regangan geser.

Regangan geser merupakan ukuran deformasi dari suatu materi, akibat pengaruh tegangan geser yang bekerja pada materi tersebut (Bhavikatti, 2010).

Modulus kekakuan juga dapat diestimasi berdasarkan kecepatan gelombang geser dan densitas dari suatu materi padat melalui persamaan berikut (Khalilidermani dan Knez, 2024):

$$K = (v_s)^2 \rho \quad (4)$$

dengan,

v_s : Kecepatan gelombang geser $\left(\frac{m}{s}\right)$

ρ : Densitas materi $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$.

Kecepatan gelombang geser merupakan kecepatan rambat gelombang yang bergerak melalui suatu materi padat, dengan arah gerakan partikel di dalam materi tersebut tegak lurus terhadap arah perambatan gelombangnya (Shearer, 2019; Khalilidermani dan Knez, 2024). Densitas dari materi padat, seperti batuan, dapat diestimasi besarnya dengan menggunakan formula Brocher (2005) sebagai berikut:

$$\rho(v_p) = 1.6612v_p - 0.4721(v_p)^2 + 0.0671(v_p)^3 - 0.0043(v_p)^4 + 0.000106(v_p)^5 \quad (5)$$

dengan,

ρ : Densitas batuan $\left(\frac{g}{cm^3}\right)$

v_p : Kecepatan gelombang kompresi $\left(\frac{km}{s}\right)$.

Setiap koefisien polinomial dalam Persamaan (5) memiliki satuan implisit sehingga suku-suku $(v_p)^n$ (untuk $n = 1, \dots, 5$) menghasilkan densitas yang konsisten secara dimensi. Kecepatan gelombang kompresi merupakan kecepatan rambat gelombang yang bergerak melalui suatu materi (padat, cair, atau gas) dengan arah gerakan partikel di dalam materi tersebut sejajar atau searah dengan arah perambatan gelombangnya (Shearer, 2019; Khalilidermani dan Knez, 2024). Hingga saat ini, Persamaan (5) masih digunakan dalam studi-studi terkini (Tadiello dan Braitenberg, 2021).

1.6.8 Energi Seismik

Energi seismik adalah energi yang berasal dari energi potensial elastis yang tersimpan dalam batuan lempeng tektonik di zona subduksi atau sekitar zona sesar, akibat akumulasi tegangan tektonik dari peristiwa interaksi antar lempeng yang terkait, yang dapat dilepaskan secara tiba-tiba, saat batuanannya tidak mampu lagi menahan tegangan tersebut, yang memicu gempa yang dirasakan di permukaan bumi (Johnson, et al., 2017).

Energi seismik yang dilepaskan oleh sumber gempabumi dapat menentukan magnitudo gelombang permukaan (Matsu'ura, 2024), sedemikian sehingga energi ini menjadi indikator penting dalam menentukan kekuatan guncangan yang dapat dirasakan di permukaan bumi. Oleh karena itu, Choy dan Boatwright (1995) memformulasikannya, dan diberikan sebagai berikut:

$$M_s = \frac{(\log(E_s) - 4.4)}{1.5} \quad (6)$$

dengan,

E_s : Energi seismik (J)

M_s : Magnitudo gelombang permukaan.

Selain magnitudo gelombang permukaan M_s , magnitudo gempabumi lainnya yang dapat digunakan untuk mengestimasi kekuatan gempabumi adalah magnitudo momen M_w . Pusat studi Gempa Nasional atau PUSGEN (2017) memformulasikan persamaan yang menyatakan hubungan antara magnitudo gelombang permukaan dan magnitudo momen sebagai berikut:

$$M_w = 0.6016M_s + 2.476 \quad (7)$$

untuk rentang magnitudo, 2.8 – 6.1, dan

$$M_w = 0.92396M_s + 0.5671 \quad (8)$$

untuk rentang magnitudo 6.2 – 8.7. USGS, sebagai organisasi yang mewadahi kasus gempabumi, juga memformulasikan magnitudo momen M_w sebagai berikut:

$$M_w = \frac{(\log(E_s) - 5.24)}{1.44} \quad (9)$$

1.6.9 Model Matematika

Model matematika merupakan representasi suatu objek yang dikonstruksi dalam bentuk matematika untuk menyederhanakan kompleksitas dari objek tersebut. Model matematika dapat terdiri dari satu persamaan atau lebih dari satu persamaan matematika. Jenis persamaannya dapat bervariasi, seperti persamaan antar variabel dalam domain himpunan tertentu, persamaan diferensial, dan lain-lain. Persamaan diferensial merepresentasikan perubahan suatu entitas sebagai respons terhadap perubahan entitas lainnya. Salah satu jenis dari model matematika adalah sistem persamaan diferensial.

Sistem persamaan diferensial merupakan sekumpulan persamaan diferensial yang saling terkait dan bekerja dalam merepresentasikan dinamika dari suatu objek. Diberikan salah satu contoh sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x; t) \quad (10)$$

Persamaan (10) dapat disebut sebagai sistem persamaan non autonomus, karena terdapat variabel bebas t yang muncul secara eksplisit. Apabila variabel t tersebut implisit, maka Persamaan (10) merupakan sistem persamaan autonomus yang dinotasikan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (11)$$

Persamaan (11) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Pada Persamaan (11), variabel x dan f adalah vektor di $\mathbb{R}^n$. Vektor x , dinotasikan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, berada dalam himpunan L (subhimpunan $\mathbb{R}^n$). Fungsi f , dinotasikan $f: L \rightarrow \mathbb{R}^n$, dan berada dalam himpunan $C^1(L)$. Himpunan $C^1(L)$ merupakan himpunan semua fungsi yang turunan parsial pertamanya kontinu di himpunan L . Vektor $\dot{x}$ menyatakan turunan pertama variabel x terhadap waktu t yang dinotasikan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ (Boyce, et al., 2017).

1.6.10 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan adalah suatu titik yang merepresentasikan keadaan dari sistem yang tidak mengalami perubahan seiring berjalannya waktu.

Definisi 1 (Wiggins, 1990)

Diberikan sistem autonomus sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x)$$

dengan variabel $x \in \mathbb{R}^n$. Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik keseimbangan dari sistem $\dot{x} = f(x)$, jika

$$f(\bar{x}) = 0 \tag{12}$$

Contoh 1

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1^2 - 49 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 7x_2\end{aligned} \tag{13}$$

Titik kesetimbangan dari sistem pada Persamaan (13) dapat diperoleh melalui Persamaan (12) sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \Rightarrow x_1^2 - 49 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \text{ atau } x_1 \text{ lainnya sebesar } -7$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \Rightarrow x_1 + 7x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{7}x_1$$

disubstitusi x_1 yang pertama, yaitu $x_1 = 7$, ke persamaan $x_2 = -\frac{1}{7}x_1$, maka diperoleh $x_2 = -1$, sedemikian sehingga titik kesetimbangan pertama dapat dituliskan $\bar{x}_a = (7, -1)$. Melalui cara yang sama, diperoleh titik kesetimbangan kedua $\bar{x}_b = (-7, 1)$, jika disubstitusi x_1 yang lainnya, yaitu $x_1 = -7$, ke persamaan $x_2 = -\frac{1}{7}x_1$.

1.6.11 Metode Linearisasi

Metode linearisasi adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk menyederhanakan sistem persamaan diferensial tak linear menjadi bentuk linear di sekitar titik tertentu, sehingga analisis dan penentuan solusi (termasuk kestabilan sistem) menjadi lebih mudah. Linearisasi dilakukan dengan menggunakan konsep pendekatan ekspansi deret Taylor dari sistem persamaan diferensial tak linear di sekitar titik kesetimbangannya. Melalui ekspansi deret Taylor, akan diperoleh sistem persamaan diferensial yang linear termasuk matriks Jacobian. Matriks Jacobian adalah matriks hasil linearisasi dari ekspansi deret Taylor terhadap sistem persamaan diferensial tak linear.

Jika terdapat fungsi $f_i(x)$ yang tak linear dalam sistem pada Persamaan (11) maka sistem tersebut merupakan sistem persamaan diferensial tak linear. Bentuk umum deret Taylor dari sistem pada Persamaan (11) yang tak linear di sekitar titik kesetimbangan $\bar{x}$ adalah

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!} (x - \bar{x})^n \quad (14)$$

Matriks Jacobian dari sistem pada Persamaan (11) yang tak linear dengan menggunakan ekspansi deret Taylor adalah sebagai berikut (Boyce, et al., 2017):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Contoh 2

Karena sistem pada Persamaan (13) merupakan sistem persamaan diferensial tak linear, maka sistem tersebut dapat dijadikan sebagai contoh dari penggunaan metode linearisasi. Diberikan kembali sistem pada Persamaan (13) sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 - 49$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 7x_2$$

Pada sistem ini terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu $\bar{x}_a = (7, -1)$ dan $\bar{x}_b = (-7, 1)$. Misalkan, dipilih titik kesetimbangan $\bar{x}_a$ untuk linearisasi sistemnya. Tahapan linearisasinya, diawali dengan membentuk deret Taylor dari sistemnya di sekitar titik kesetimbangan $\bar{x}_a$ berdasarkan bentuk umum deret Taylor. Karena vektor x berada di $\mathbb{R}^2$, maka terdapat dua persamaan dari ekspansi deret Taylornya. Kedua persamaan dari ekspansi deret Taylor dari sistemnya diberikan sebagai berikut:

$$f_1(x) = f_1(\bar{x}) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + R_{f_1}$$

$$f_2(x) = f_2(\bar{x}) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + R_{f_2}$$

Dengan mensubstitusikan $f_1(x) = \frac{dx_1}{dt}$, $f_2(x) = \frac{dx_2}{dt}$, $f_1(\bar{x}) = 0$, $f_2(\bar{x}) = 0$, $\bar{x}_1 = 7$, dan $\bar{x}_2 = -1$ ke ekspansi deret Taylor dari sistem pada Persamaan (13), sehingga diperoleh

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - 7) + \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 + 1) + R_{f_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1}(x_1 - 7) + \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2}(x_2 + 1) + R_{f_2}.$$

Karena diasumsikan vektor x dekat dengan vektor $\bar{x}$ akibatnya nilai dari suku tak linear R_{f_1} dan R_{f_2} sangat mendekati nol, sedemikian sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - 7) \\ (x_2 + 1) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Selanjutnya, setiap entri dari matriks pada Persamaan (16) diisi dengan nilai sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} = 2x_1 \Rightarrow \frac{\partial f_1(7, -1)}{\partial x_1} = 14$$

$$\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1(7, -1)}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} = 1 \Rightarrow \frac{\partial f_2(7, -1)}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} = 7 \Rightarrow \frac{\partial f_2(7, -1)}{\partial x_2} = 7$$

disubstitusikan $\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} = 14$, $\frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} = 1$, dan $\frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} = 7$ ke Persamaan (16), sedemikian sehingga diperoleh hasil linearisasi dari sistem pada Persamaan (13) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - 7) \\ (x_2 + 1) \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = 14x_1 - 98$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 7x_2$$

1.6.12 Fungsi Lyapunov

Fungsi Lyapunov merupakan suatu fungsi khusus yang dapat digunakan untuk menentukan dan memeriksa kestabilan lokal hingga global dari suatu model matematika.

Definisi 2 (Luenberger, 1979)

Diberikan fungsi $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, dengan himpunan $D \subset \mathbb{R}^n$, dan titik $\bar{x} \in D$ merupakan titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial tak linear berdimensi- n $\dot{x} = f(x)$. Fungsi $V(x)$ disebut sebagai fungsi Lyapunov jika memenuhi ketiga pernyataan berikut:

1. Fungsi $V(x)$ kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang juga kontinu di himpunan D .
2. Fungsi $V(x) > 0$, untuk titik $x \neq \bar{x}$ dalam himpunan D , dan jika titik $x = \bar{x}$ maka fungsi $V(\bar{x}) = 0$ (dengan titik $\bar{x}$ merupakan titik minimum dari fungsi $V(x)$).
3. Turunan $\dot{V}(x) \leq 0$, untuk setiap titik x dalam himpunan D .

Syarat Kestabilan Lokal dan Global Fungsi Lyapunov

1. Jika turunan $\dot{V}(x) \leq 0$ dan fungsi $V(x)$ adalah fungsi tak terbatas secara radial maka sistem tak linear $\dot{x} = f(x)$ pada titik kesetimbangan $\bar{x}$ adalah stabil asimtotik global.
2. Jika turunan $\dot{V}(x) \leq 0$ dan fungsi $V(x)$ adalah bukan fungsi tak terbatas secara radial maka sistem tak linear $\dot{x} = f(x)$ pada titik kesetimbangan $\bar{x}$ adalah stabil asimtotik lokal.

Fungsi $V(x)$ adalah fungsi tak terbatas secara radial, jika memenuhi implikasi berikut (Marquez, 2003):

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

Metode Krasovskii

Untuk kebutuhan mendapatkan fungsi Lyapunov dari model matematika, seorang matematikawan bernama Krasovskii merancang suatu metode yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi fungsi Lyapunov dari model matematika yang dikenal sebagai metode Krasovskii. Untuk lebih memudahkan dalam proses rancangan fungsi Lyapunov, disusun tahapan demi tahapan konstruksi fungsinya berdasarkan metode Krasovskii. Tahapan dalam mengkonstruksi fungsi Lyapunov melalui metode Krasovskii diberikan sebagai berikut:

1. Kontruksi kandidat fungsi Lyapunov dengan menggunakan persamaan $V(x) = f^T(x)Rf(x)$.
Fungsi $f(x)$ adalah fungsi yang terdapat pada ruas kanan dari model $\dot{x} = f(x)$. Variabel T adalah operasi transpos. Variabel R adalah suatu matriks dengan ordo yang disesuaikan dengan dimensi model yang digunakan. Sebagai contoh, jika model berada dalam domain $\mathbb{R}^n$ maka ordo dari matriks R adalah $n \times n$. Sembarang matriks R yang dipilih harus merupakan matriks definit positif, karena untuk memenuhi syarat definit positif dari fungsi Lyapunov, saat disubstitusi ke kandidat fungsi Lyapunov $V(x) = f^T R f$. Untuk menentukan definit dari suatu matriks, maka periksa nilai eigennya. Apabila semua nilai eigennya bernilai positif, maka matriksnya adalah matriks definit positif. Sedangkan apabila semua nilai eigennya bernilai negatif, maka matriksnya adalah matriks definit negatif.
2. Diferensialkan kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ satu kali terhadap vektor x . Sebagai contoh, jika vektor $x = (x_1, x_2)$ maka diferensialkan fungsi $V(x)$ satu kali masing-masing terhadap x_1 dan x_2 , sedemikian sehingga diperoleh turunan parsial $\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}$ dan $\frac{\partial V(x)}{\partial x_2}$.
3. Periksa kekontinyuan dari kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ dan turunan parsial pertamanya di himpunan D . Apabila keduanya tidak kontinu di himpunan D , maka konstruksi ulang kandidat fungsi Lyapunovnya dengan mensubstitusi matriks R lainnya, dan kerjakan tahapan kedua dan seterusnya.
4. Periksa kepositifan kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ saat disubstitusi titik $x \neq \bar{x} \in D$. Apabila terdapat titik $x \in D$ yang saat disubstitusi ke fungsi $V(x)$, fungsinya

- bernilai negatif, maka konstruksi ulang kandidat fungsi Lyapunovnya dengan mensubstitusi matriks R lainnya, dan kerjakan tahapan kedua dan seterusnya.
5. Periksa nilai kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ saat disubstitusi titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari model yang terkait. Apabila saat titik $\bar{x}$ disubstitusi ke fungsi $V(x)$, dan diperoleh hasil $V(x) \neq 0$, maka konstruksi ulang kandidat fungsi Lyapunovnya dengan mensubstitusi matriks R lainnya, dan kerjakan tahapan kedua dan seterusnya.
 6. Periksa titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari model yang terkait sebagai titik stasioner dari kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$. Apabila titik $\bar{x}$ tidak memenuhi $\frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x} = 0$, maka titik tersebut bukan merupakan titik stasioner dari fungsi $V(x)$, sedemikian sehingga konstruksi ulang kandidat fungsi Lyapunovnya dengan mensubstitusi matriks R lainnya, dan kerjakan tahapan kedua dan seterusnya.
 7. Bentuk matriks Hessian dari kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ (definisi matriks Hessian diberikan pada definisi 3).
 8. Periksa definit positif (atau semidefinit positif) dari matriks Hessian yang diperoleh. Apabila matriksnya definit negatif, maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari model yang terkait bukan titik minimum dari kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$, sedemikian sehingga konstruksi ulang kandidat fungsi Lyapunovnya dengan mensubstitusi matriks R lainnya, dan kerjakan tahapan kedua dan seterusnya.
 9. Diferensialkan kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ terhadap variabel t . Proses penurunannya diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= f^T(x) R f(x) \\
 \Rightarrow V &= f^T R f \\
 \Rightarrow \dot{V} &= \dot{f}^T R f + f^T R \dot{f} \\
 \Rightarrow \dot{V} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right)^T R f + f^T R \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \\
 \Rightarrow \dot{V} &= \left(\frac{dx}{dt} \right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T R f + f^T R \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right) \\
 \Rightarrow \dot{V} &= f^T J^T R f + f^T R J f \\
 \Rightarrow \dot{V} &= f^T (J^T R + R J) f
 \end{aligned} \tag{17}$$

dengan J adalah matriks Jacobian dari model matematika $\dot{x} = f(x)$, dan dapat dinotasikan dengan $J = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$.

10. Karena seluruh entri dalam matriks R belum terisi secara spesifik, maka untuk mengisinya dapat digunakan persamaan $J^T R + R J = -Q$, dengan matriks Q yang dipilih adalah matriks definit positif yang setiap entrinya diisi dengan nilai yang

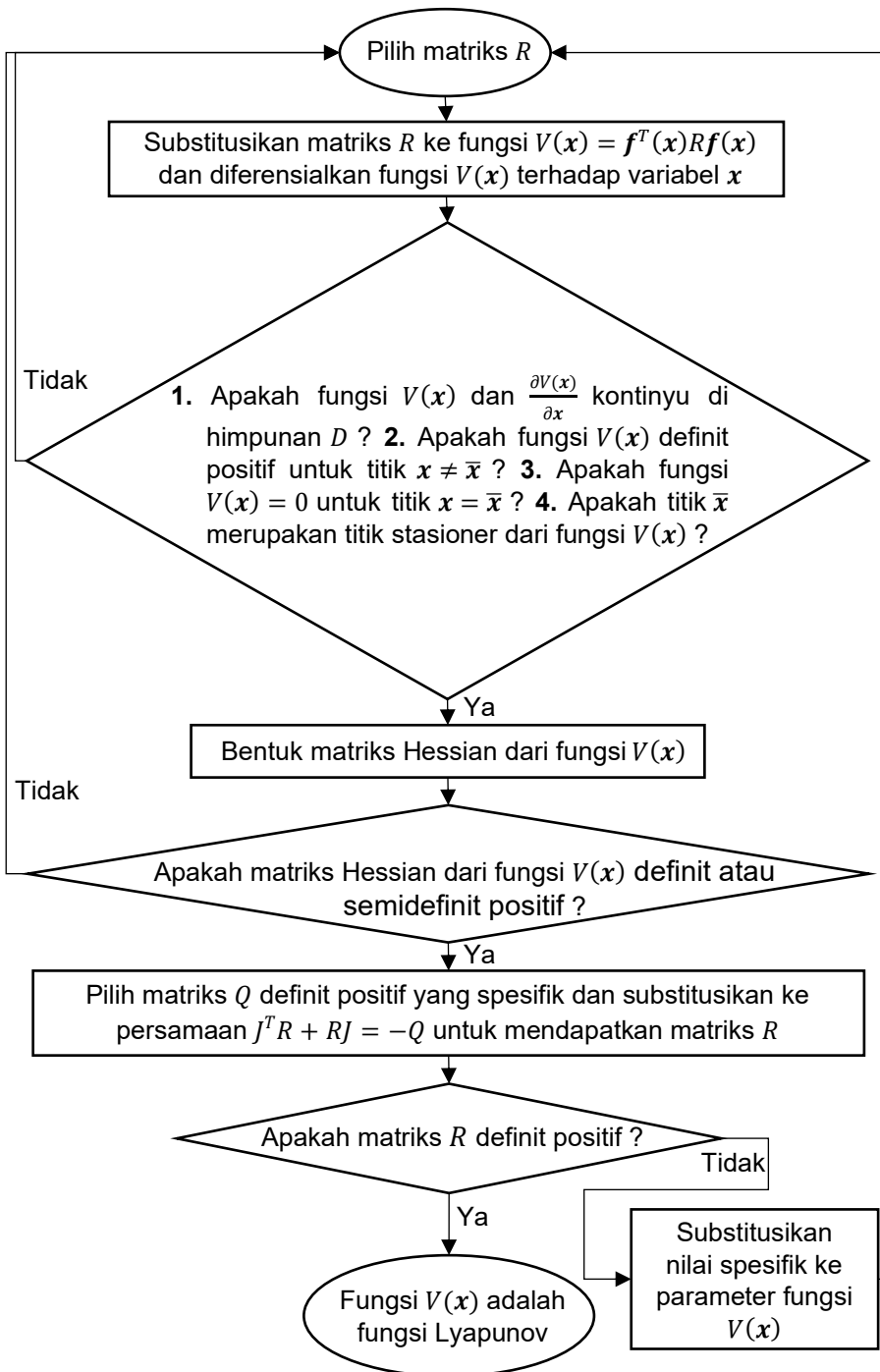
spesifik. Salah satu pilihan matriks Q yang dapat digunakan adalah matriks identitas, yang juga merupakan matriks definit positif, yang ordonya disesuaikan dengan dimensi model yang digunakan. Persamaan $J^T R + R J = -Q$ akan menjamin syarat ketiga dari fungsi Lyapunov, yaitu turunan $\dot{V} \leq 0$. Apabila matriks R yang diperoleh adalah matriks definit negatif, maka konstruksi ulang kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ dengan mensubstitusi matriks R lainnya, dan kerjakan tahapan kedua dan seterusnya.

11. Jika matriks R yang definit positif (yang memenuhi syarat dari tahapan-tahapan sebelumnya) belum ditemukan, maka kerjakan tahapan-tahapannya secara numerik. Substitusikan nilai spesifik ke semua variabel dari kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$, termasuk dalam memilih matriks R yang setiap entrinya memiliki nilai yang spesifik dan definit positif. Selanjutnya, kerjakan tahapan kedua dan seterusnya.
12. Matriks R yang definit positif dan telah memenuhi syarat dari tahapan-tahapan sebelumnya, disubstitusi ke persamaan $V(x) = f^T(x) R f(x)$, sedemikian sehingga kandidat fungsi Lyapunov $V(x)$ merupakan fungsi Lyapunov dari model yang terkait.

Definisi 3 (Park, 2007)

Diberikan fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Jika fungsi $f(x)$ terdiferensialkan dua kali terhadap titik $x \in \mathbb{R}^n$, maka matriks Hessian dari fungsi $f(x)$ diberikan sebagai berikut:

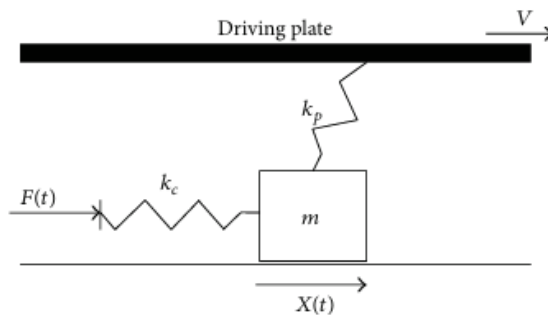
$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (18)$$



Gambar 1.3 Diagram alir konstruksi fungsi Lyapunov menggunakan metode Krasovskii

1.6.13 Model Dinamika Gempabumi dibawah Pengaruh Dorongan Magma

Model Kagho et al. (2015) ini menggambarkan dinamika siklus gempabumi yang direpresentasikan melalui sistem fisik satu dimensi. Sistem fisik yang dimaksud adalah sebuah balok yang bergerak di atas permukaan kasar dan terhubung dengan dua buah pegas. Balok merepresentasikan segmen kerak bumi. Permukaan kasar merepresentasikan zona sesar atau area gesekan lempeng tektonik, sedangkan, pegas merepresentasikan kekakuan materi yang menghubungkan balok dengan materi elastis lainnya. Pegas pertama dengan kekakuan k_p dihubungkan ke titik yang bergerak secara konstan dengan kecepatan V_c , merepresentasikan pergerakan lempeng tektonik. Pegas kedua dengan kekakuan k_c dihubungkan ke titik kesetimbangan dari balok, merepresentasikan elastisitas batuan di sekitar segmen kerak. Pergerakan balok dipengaruhi oleh gaya gesekan di zona sesar $f\left(\frac{dX}{dt}\right)$ dan gaya dorong dari aliran magma $F(t)$. Berikut ini diberikan gambar model pegas-balok dari gempabumi berdasarkan kajian Kagho et al. (2015).



Gambar 1.4 Model pegas-balok dari gempabumi
Sumber: Kagho et al. (2015)

Modelnya diformulasikan sebagai berikut:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -k_p(X - V_c t) - k_c X - f\left(\frac{dX}{dt}\right) + F(t) \quad (19)$$

dengan,

- m : Massa balok atau massa dari segmen kerak bumi yang mengalami deformasi (kg)
- X : Displacement balok (m)
- k_p : Kekakuan pegas yang menghubungkan antara balok dan lempeng tektonik yang bergerak, yang menarik balok menuju ke titik lempeng bergerak ($\frac{N}{m}$)

- V_c : Kecepatan konstan dari pergerakan lempeng tektonik yang menarik balok $\left(\frac{m}{s}\right)$
- k_c : Kekakuan pegas batuan di sekitar balok yang menahan dan mengembalikan balok ke posisi semula $\left(\frac{N}{m}\right)$.

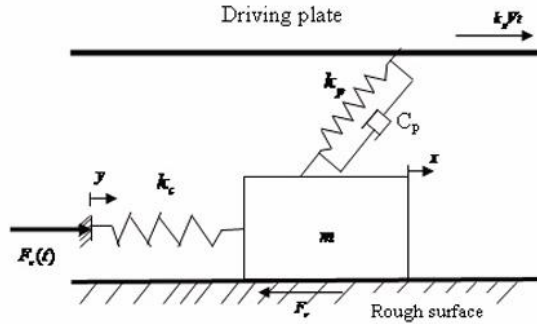
Pada Persamaan (19), suku $m \frac{d^2X}{dt^2}$ merupakan gaya total yang menyebabkan pergerakan mendadak segmen kerak bumi yang dapat memicu terjadinya gempabumi akibat slip di zona sesar. Gaya total tersebut sebanding dengan akumulasi dari gaya restoratif pertama $F_{R_1} = -k_p(X - V_c t)$, gaya restoratif kedua $F_{R_2} = -k_c X$, gaya gesekan antara bidang patahan $F_f = f \left(\frac{dX}{dt}\right)$ yang merupakan bagian redaman dari Persamaan (19), dan gaya eksternal yang berasal dari dorongan magma $F(t)$.

Tabel 1.1 Fase gempabumi, peristiwa yang terkait fase gempabumi, dan representasi peristiwa yang terkait fase gempabumi terhadap Persamaan (19)

Fase gempabumi	Peristiwa	Representasi Model (19)
Akumulasi tegangan	Balok belum bergerak, pegas k_p meregang	Nilai $-k_p(X - V_c t)$ semakin besar
Pelepasan energi	Balok mulai bergerak (gempabumi)	Variabel $\frac{d^2X}{dt^2} > 0$ akibat kegagalan gesekan
Pergerakan kerak bumi	Balok bergerak cepat	Nilai $\frac{dX}{dt}$ semakin besar
Kembali terkunci	Balok berhenti bergerak	Variabel $\frac{dX}{dt} \rightarrow 0$, model stabil

1.6.14 Model Dinamika Gempabumi yang Dipicu oleh Aliran Naik Magma dengan Hukum Pangkat Fraksional dan Gesekan Orde Fraksional

Model Fogang et al. (2021) merupakan perluasan dari model pegas-balok klasik dari gempabumi. Pada model ini, dinamika gempabumi terhadap waktu t dimodelkan lebih representatif karena melibatkan pendekatan konsep fraksional, yaitu hukum pangkat fraksional dan gesekan orde fraksional. Hukum pangkat fraksional merepresentasikan gaya restoratif nonlinear dari batuan. Sedangkan gesekan orde fraksional merepresentasikan redaman (seperti gaya gesek) dengan efek memori dan nonlinearitas (yang umum dan representatif terjadi pada proses slip antar batuan). Berikut ini diberikan gambar model pegas-balok dari gempabumi berdasarkan kajian Fogang et al. (2021).



Gambar 1.5 Model pegas-balok dari gempa bumi
Sumber: Pelap et al. (2016)

Modelnya diformulasikan sebagai berikut:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{d^q X}{dt^q} \right) = -k_p (X - V_c t) - k_c (X - y) - k \operatorname{sgn}(X) |X|^\alpha - C_p \frac{d^r X}{dt^r} - C_1 \operatorname{sgn} \left(\frac{d^r X}{dt^r} \right) \left| \frac{d^r X}{dt^r} \right|^\varepsilon - F_r \left(\frac{d^q X}{dt^q} / V_{ch} \right) \quad (20)$$

dengan,

- q dan r : Orde dari turunan fraksional
- k_c : Kekakuan pegas yang menghubungkan antara balok dan dinding saluran magma, menunjukkan kekakuan batuan di sekitar balok terhadap gaya dorong magma $\left(\frac{N}{m} \right)$
- y : Displacement dinding saluran magma (m)
- k : Kekakuan balok yang ditinjau dari perilaku elastisitas nonlinearnya $\left(\frac{N}{m} \right)$
- $\operatorname{sgn}(\cdot)$: Fungsi tanda dari entitas yang menggunakannya, menunjukkan arah dari entitas tersebut
- α : Nilai pangkat dari variabel, menunjukkan keadaan nonlinearitas dari gaya yang terkait
- C_p : Koefisien redaman viskos linear ($kg \ s^{r-2}$)
- C_1 : Koefisien redaman viskos nonlinear ($kg \ m^{1-\varepsilon} \ s^{r\varepsilon-2}$)
- ε : Derajat dari turunan fraksional
- F_r : Gaya gesek antara balok dan permukaan di bawahnya, yang nilainya bergantung pada kecepatan sesaat balok terhadap kecepatan karakteristik V_{ch} (N)
- V_{ch} : Kecepatan karakteristik yang menentukan ambang perubahan perilaku gaya gesek seiring bertambahnya kecepatan gerak balok $\left(\frac{m}{s} \right)$.

Pada Persamaan (20), suku $m \frac{d}{dt} \left(\frac{d^q X}{dt^q} \right)$ merupakan gaya total yang menyebabkan pergerakan mendadak segmen kerak bumi dengan melibatkan efek memori dan nonlinearitas melalui turunan fraksional, yang dapat memicu terjadinya gempabumi akibat peristiwa slip di zona sesar. Gaya total tersebut sebanding dengan akumulasi dari gaya restoratif pertama $F_{R_1} = -k_p(X - V_c t)$, gaya restoratif kedua $F_{R_2} = -k_c(X - y)$, gaya restoratif ketiga $F_{R_3} = -k \operatorname{sgn}(X)|X|^\alpha$, gaya redaman viskos linear $F_{d_1} = C_p \frac{d^r X}{dt^r}$, gaya redaman viskos nonlinear $F_{d_2} = C_1 \operatorname{sgn} \left(\frac{d^r X}{dt^r} \right) \left| \frac{d^r X}{dt^r} \right|^\varepsilon$, dan gaya gesek $F_f = F_r \left(\frac{d^q X}{dt^q} / V_{ch} \right)$. Efek memori yang dihasilkan dari penerapan hukum pangkat fraksional dan gesekan orde fraksional pada model ini adalah memungkinkan model menggambarkan dinamika gaya pemicu gempabumi tidak hanya bergantung pada kondisi saat ini, tetapi juga pada pengaruh sejarah deformasinya di masa lalu. Dengan demikian, model menjadi lebih representatif terhadap perilaku kompleks dan historis dari rentetan peristiwa slip yang terjadi di zona sesar.

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikerjakan melalui studi literatur (penelitian pustaka) dengan menggunakan referensi-referensi ilmiah, kredibel, dan relevan dengan topik penelitian ini.

2.2 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dimulai pada bulan Maret 2024 dan direncanakan hingga Februari 2026. Penelitian ini dikerjakan di departemen matematika, departemen geofisika, departemen fisika, departemen kimia, dan perpustakaan FMIPA Universitas Hasanuddin.

2.3 Prosedur Penelitian

Prosedur atau tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

2.3.1 Identifikasi Masalah

Tahapan pertama ini menetapkan bencana gempabumi sebagai fokus permasalahan penelitian. Identifikasi komprehensif mengenai gempabumi dilakukan sebagai bagian integral dari rancangan penanganan gempabumi yang lebih visioner.

2.3.2 Studi Literatur

Studi literatur yang dilakukan adalah tinjauan pustaka dari berbagai macam sumber referensi termasuk sumber non-tulisan yang berkaitan dengan gempabumi. Selain itu, tinjauan pustaka ini dilakukan untuk merancang ide atau gagasan menangani kasus bencana gempabumi.

2.3.3 Formulasi Model Matematika

Hasil yang diperoleh dari tahapan identifikasi masalah dan studi literatur ini adalah berupa deskripsi dan ide penanganan gempabumi. Pada penelitian ini, ditetapkan bentuk penanganan gempabumi adalah penerapan materi kimia khusus, yaitu cairan ionik *task-specific*, pada zona sesar yang diharapkan dapat memperkecil kemungkinan terjadinya gempabumi bermagnitudo besar. Selanjutnya, berdasarkan ide tersebut, dikonstruksi model matematika yang akan merepresentasikan dinamika variabel-variabel mekanik zona sesar pemicu gempabumi dengan melibatkan

pengaruh injeksi cairan ionik *task-specific* pada zona sesar tersebut. Model matematika yang dikonstruksi terdiri dari empat kompartemen, yaitu kekakuan zona sesar (K), displacement sesar (X), tegangan tektonik pada zona sesar (P), dan volume cairan ionik *task-specific* yang diinjeksikan ke dalam zona sesar (C). Model yang dikonstruksi ini berada dalam domain bilangan real tak negatif.

2.3.4 Analisis Kestabilan

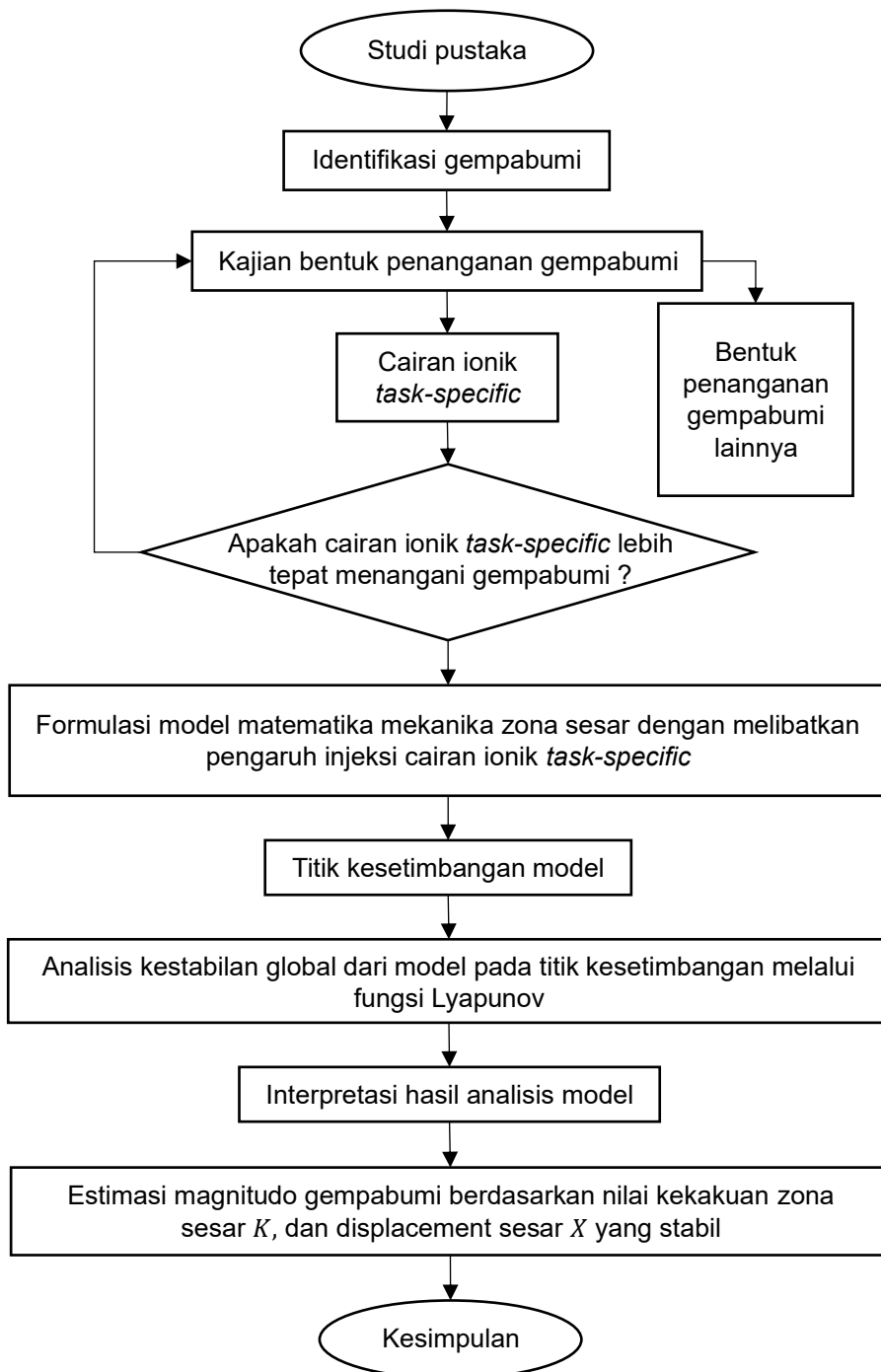
Tahapan ini dapat digunakan untuk memprediksi besar atau perilaku dari variabel mekanik zona sesar yang terdapat pada model seiring berjalannya waktu. Prosedur pada tahapan ini dimulai dengan penentuan titik kesetimbangan dari model. Kemudian berdasarkan titik kesetimbangan yang diperoleh, dianalisa kestabilan model pada titik kesetimbangan tersebut menggunakan metode Lyapunov. Setelah menganalisa kestabilan model, maka dilakukan simulasi numerik pada model dengan menggunakan *software* maple.

2.3.5 Estimasi Magnitudo Gempabumi

Nilai kesetimbangan dari kekakuan zona sesar K , dan displacement sesar X yang stabil akan digunakan untuk mengestimasi energi potensial elastis pemicu gempabumi pada zona sesar yang terkait. Selanjutnya estimasi energi potensial elastis yang diperoleh akan digunakan untuk mengestimasi magnitudo gempabumi yang potensial terjadi.

2.3.6 Penarikan Kesimpulan

Setelah dilakukan analisis dan simulasi terhadap model, maka dibuat kesimpulan berdasarkan hasil yang diperoleh dari tahapan tersebut.



Gambar 2.1 Diagram alir dari metode penelitian