

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang memiliki peran penting dalam memodelkan berbagai masalah nyata, baik dalam bidang komputer, kimia, teknik, maupun riset operasi. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , di mana V adalah himpunan simpul (*vertex*) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul. Representasi visual dan fleksibilitas teori graf menjadikannya alat yang sangat berguna untuk menyederhanakan dan menyelesaikan masalah yang kompleks, seperti masalah transportasi, jaringan komunikasi, hingga struktur molekul.

Terdapat berbagai jenis pelabelan graf tergantung pada sifat dan tujuan pemberian label pada unsur-unsur graf, salah satunya adalah pelabelan harmonis. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis. Misal, $G = (V(G), E(G))$ suatu graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dimana banyaknya titik pada G dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya sisi pada G dinotasikan dengan $|E(G)|$. Pelabelan harmonis adalah fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)| - 1\}$, yang menginduksi fungsi pelabelan sisi $(xy) \ f^*: E(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)| - 1\}$, dimana saat sisi (x, y) dilabeli $f^*(xy) = f(x) + f(y) \pmod q$ berbeda untuk setiap sisi (xy) di $E(G)$. (Graham, R. L., Sloan, N. J., 1980). Berdasarkan definisi tersebut, maka $|E(G)| \geq |V(G)|$ merupakan syarat perlu dari suatu G sedemikian sehingga G memenuhi suatu pelabelan harmonis.

Pengembangan lebih lanjut dari konsep pelabelan harmonis telah menghasilkan varian baru yang dikenal sebagai pelabelan harmonis ganjil. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Suatu graf $G(p, q)$ dikatakan memiliki pelabelan harmonis ganjil apabila terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian sehingga fungsi terinduksi pada sisi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$, yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$, merupakan fungsi bijektif (Liang & Bai, 2009). Dalam penelitian tersebut, Liang dan Bai juga membuktikan beberapa sifat dasar, salah satunya adalah syarat perlu bahwa graf yang memiliki pelabelan harmonis ganjil harus merupakan graf bipartit.

Berikut beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai graf harmonis ganjil. Liang dan Bai (2009) sendiri telah membuktikan bahwa graf lintasan P_n dan graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil. Penelitian ini kemudian dikembangkan oleh Saputri, Sugeng, dan Froncek (2013) yang mengkaji pelabelan harmonis ganjil pada graf prisma terampat $C_n \times P_m$ dan membuktikan keberadaannya untuk kasus $n \equiv 0 \pmod 4$. Selain itu, Jeyanthi dan Philo (2016) juga memperluas kajian ini pada kelas graf yang berkaitan dengan siklus, serta membuktikan pelabelan pada graf shadow dan splitting. Dan masih banyak penelitian lain yang berkaitan dengan topik ini.

Meskipun penelitian mengenai berbagai kelas graf, seperti graf lintasan, graf bintang, hingga graf gabungan siklus telah dilakukan, masih terdapat banyak kelas graf lain yang belum dikaji keberadaan pelabelan harmonis ganjilnya. Salah satu graf

yang menarik untuk diteliti adalah graf ubur-ubur (*Jellyfish Graph*). Graf ini unik karena memiliki struktur kombinasi antara graf siklus C_4 sebagai pusat dan graf lintasan sebagai "tentakel" atau anting (*pendant*), yang merepresentasikan kompleksitas struktur siklik dan asiklik dalam satu kesatuan (Akbari, Kaneria, & Parmar, 2022).

Hingga saat ini, konstruksi fungsi pelabelan harmonis ganjil secara spesifik untuk kelas Graf Ubur-ubur J_n belum dieksplorasi secara mendalam. Penelitian sebelumnya lebih banyak berfokus pada keluarga graf prisma atau graf shadow. Oleh karena itu, terdapat kebutuhan untuk merumuskan fungsi injektif yang tepat pada titik-titik Graf Ubur-ubur agar menginduksi label sisi ganjil yang berbeda.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengonstruksi dan membuktikan keberadaan pelabelan harmonis ganjil pada Graf Ubur-ubur J_n untuk $n \geq 3$.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimanakah konstruksi fungsi pelabelan yang dapat diberikan pada graf ubur-ubur J_n
2. Apakah fungsi pelabelan yang telah diberikan memenuhi ketentuan pelabelan harmonis ganjil sehingga graf ubur-ubur J_n merupakan graf harmonis ganjil?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi untuk pelabelan harmonis ganjil pada graf ubur-ubur J_n untuk $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang ada, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi fungsi pelabelan harmonis ganjil pada graf ubur-ubur J_n dan membuktikan bahwa graf ubur-ubur J_n merupakan graf harmonis ganjil.

1.5 Manfaat Penelitian

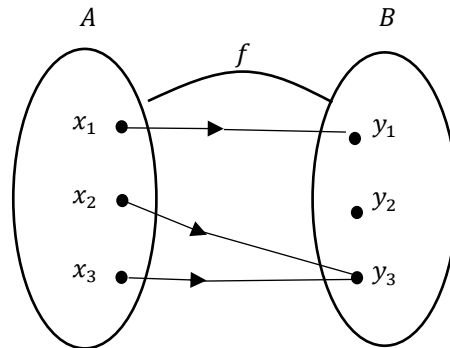
Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah memberikan informasi tambahan dan menambah wawasan bagi para pembaca mengenai pelabelan harmonis ganjil dan Sebagai referensi bagi peneliti lain yang ingin mengembangkan pelabelan harmonis ganjil pada graf hasil operasi lainnya.

1.6 Landasan Teori

Graf harmonis ganjil merupakan salah satu topik dalam teori graf yang mengintegrasikan konsep pelabelan titik dan sisi dengan sifat-sifat fungsi. Pemahaman mendalam mengenai prinsip-prinsip tersebut menjadi landasan krusial dalam konstruksi penelitian ini. Oleh karena itu, bab ini akan menguraikan secara sistematis teori-teori pendukung yang mencakup definisi fungsi, pengertian dasar graf, serta mekanisme pelabelan harmonis ganjil.

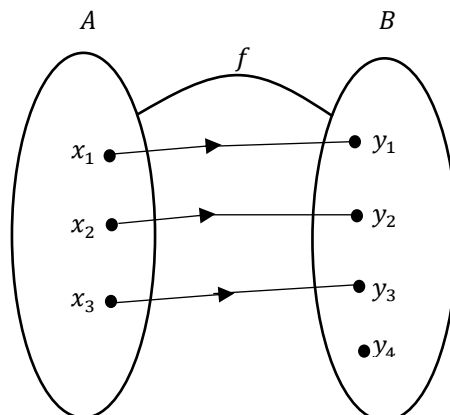
1.6.1 Fungsi

Definisi 1.6.1.1 Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Sebuah fungsi f dari A ke B , dinotasikan dengan $f: A \rightarrow B$, adalah aturan yang memasangkan setiap elemen $x \in A$ dengan tepat satu elemen $y \in B$. dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan ditulis dengan $f: x \rightarrow f(x)$, sedangkan x biasa disebut prapeta dari $f(x)$. Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut, dinotasikan dengan $R(f)$. (Amir & Prasajo, 2016).



Gambar 1.6.1.1 Fungsi

Definisi 1.6.1.2 Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut injektif (atau satu-satu) jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$, maka berlaku $x_1 = x_2$. Secara ekuivalen, jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ (Rosen, 2012).

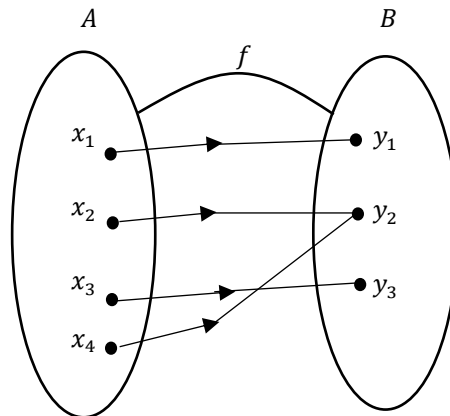


Gambar 1.6.1.2 Fungsi Injektif

Berdasarkan gambar tersebut, nampak bahwa x_1, x_2 , dan x_3 masing-masing memiliki peta ke y_1, y_2, y_3 dan y_4 yang berbeda, tidak ada dua x yang menuju y yang

sama. Hal ini memenuhi syarat injektif, dimana Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dengan setiap anggota A yang berbeda memiliki peta yang berbeda di B .

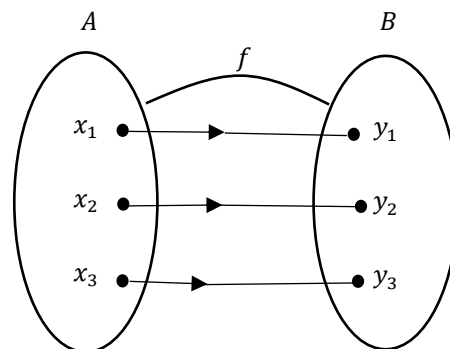
Definisi 1.6.1.3 Suatu fungsi $f: A \xrightarrow{\text{pada}} B$ disebut pada (onto), atau surjektif, jika dan hanya jika untuk setiap elemen $b \in B$ terdapat elemen $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$. Suatu fungsi disebut surjektif jika fungsi tersebut bersifat pada (onto) (Rosen, 2012).



Gambar 1.6.1.3 Fungsi Surjektif

Berdasarkan gambar tersebut, nampak bahwa x_1, x_2, x_3 , dan x_4 memiliki panah yang mencakup seluruh anggota y_1, y_2 , dan y_3 , sehingga tidak ada anggota B yang tidak memiliki pasangan di A . Hal ini memenuhi syarat surjektif, dimana suatu fungsi f dikatakan surjektif jika setiap anggota di kodomain B merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu anggota di domain A .

Definisi 1.6.1.4 Jika fungsi f satu-satu pada, maka f disebut sebagai fungsi bijektif (Rosen, 2012).



Gambar 1.6.1.4 Fungsi Bijektif

Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa $f: A \rightarrow B$ tidak ada dua anggota himpunan A menuju anggota himpunan B yang sama, hal ini memenuhi syarat injektif. Selain itu, karena setiap anggota Himpunan B habis terpetakan atau memiliki pasangan di himpunan A maka fungsi ini memenuhi syarat surjektif. Karena fungsi f bersifat injektif dan surjektif maka fungsi ini adalah fungsi bijektif

1.6.2 Konsep Dasar Graf

Teori graf adalah kajian mengenai struktur yang merepresentasikan hubungan antarobjek. Sebagai landasan pembahasan lebih lanjut, pada bagian ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan teori graf.

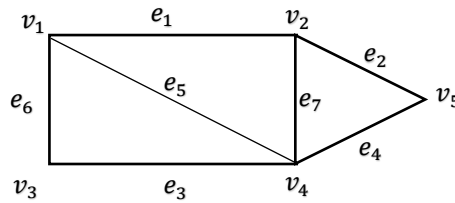
Definisi 1.6.2.1 Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga, yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan dari elemen-elemen $V(G)$ disebut sisi (*edge*). (Hasmawati, 2020).

Berdasarkan dari definisi 1.6.2.1 Himpunan V diasumsikan sebagai himpunan yang tidak kosong ($V \neq \emptyset$). Elemen-elemen dalam himpunan E terdiri dari pasangan tak terurut, sehingga sisi yang menghubungkan simpul u dan v dapat dinyatakan sebagai uv atau vu . Jumlah simpul dalam graf G didefinisikan sebagai orde (*order*), yang dinotasikan dengan $p = |V(G)|$, sedangkan jumlah sisi didefinisikan sebagai ukuran (*size*), yang dinotasikan dengan $q = |E(G)|$.

Definisi 1.6.2.3 Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand & Zhang, 2011).

Definisi 1.6.2.4 Misalkan G adalah sebuah graf dan v adalah suatu simpul dalam G . Derajat dari simpul v , yang dinotasikan sebagai $\deg(v)$. Berdasarkan nilainya, simpul dapat dikategorikan sebagai simpul genap atau ganjil, serta memiliki penamaan khusus seperti simpul terisolasi untuk derajat nol dan simpul ujung untuk derajat satu. (Chartrand & Zhang, 2011).

Definisi 1.6.2.4 Suatu jalan pada graf G adalah barisan titik dari G yaitu $u_0, u_1, \dots, u_l$ sedemikian sehingga u_i dan u_{i+1} bertetangga untuk $0 \leq i \leq l-1$. Barisan tersebut dinotasikan dengan $W = \{u_0, u_1, \dots, u_l\}$, sehingga W adalah suatu jalan $u_0 - u_l$, dimana u_0 adalah titik awal dari W dan u_l adalah titik ujung dari W . Karena jalan W memiliki l sisi yaitu $u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{l-1}u_l$, maka jalan W disebut memiliki panjang l . Suatu trail adalah suatu jalan yang setiap sisinya berbeda. Suatu lintasan adalah suatu jalan yang setiap titiknya berbeda. (West, Douglas B., 2001).

Contoh 1.6.2.1**Gambar 1.6.2.1 Graf G**

Himpunan titik dan sisi dari graf G pada gambar 1.6.2.2 masing-masing adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Berdasarkan graf G pada gambar 1.6.2.2 diketahui beberapa keterangan sebagai berikut.

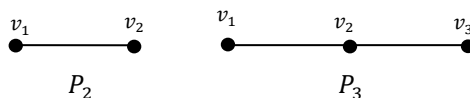
- Karena sisi e_1 menghubungkan v_1 dan v_2 , maka v_1 dan v_2 bertetangga.
- Derajat dari setiap titik graf G adalah $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = \deg(v_5) = 4$, $\deg(v_4) = 2$. Sehingga derajat maksimum dari graf G adalah $\Delta(G) = 4$ dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G) = 2$.
- Berdasarkan nilainya, simpul dapat dikategorikan sebagai simpul ganjil adalah v_1 dan v_2 sedangkan simpul genap adalah v_4, v_3 , dan v_5 .
- Contoh jalan pada graf G adalah $v_4 - v_2: v_4, e_3, v_3, e_6, v_1, e_5, v_4, e_7, v_2$ dengan panjang jalan 4
- Contoh trail pada graf G adalah $T = v_1, v_2, v_4, v_1, v_3$ karena tidak ada sisi yang dilewati dua kali dan sisi yang dilewati adalah e_1, e_7, e_5, e_6 .
- Pada graf G memiliki suatu lintasan dimana $P = v_3, v_1, v_4, v_5$ dengan panjang lintasan adalah 3 karena melewati sisi e_6, e_5, e_4 .

1.6.3 Graf Lintasan dan Graf Siklus

Dalam teori graf terdapat beberapa jenis graf misalnya graf lintasan, dan graf siklus. Adapun definisi dari graf-graf tersebut ialah sebagai berikut :

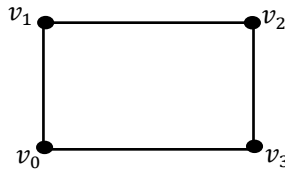
Definisi 1.6.3.1 Graf lintasan (path graph) dengan n simpul, dinotasikan dengan P_n , adalah graf yang simpul-simpulnya dapat diurutkan menjadi $v_1, v_2, \dots, v_n$ sedemikian sehingga himpunan sisinya adalah $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$ (Munir, 2003).

Contoh 1.6.3.1 Graf lintasan P_2 dengan himpunan titik $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$ dan himpunan sisi $E(P_2) = \{v_1 v_2\}$. Dan graf lintasan P_3 dengan himpunan titik $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(P_3) = \{v_1 v_2, v_2 v_3\}$.

**Gambar 1.6.3.1 Graf lintasan P_2 dan P_3**

Definisi 1.6.3.2 Graf siklus dengan n simpul ($n \geq 3$), dinotasikan dengan C_n , adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n dengan menambahkan sisi yang menghubungkan simpul terakhir v_n ke simpul pertama v_1 . Himpunan sisinya adalah $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{v_n v_1\}$ (Chartrand & Zhang, 2011).

Contoh 1.6.3.2 Graf siklus C_4 (segi empat) himpunan titik $V(C_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(C_4) = \{v_0 v_1, v_0 v_3, v_1 v_2, v_2 v_3\}$.



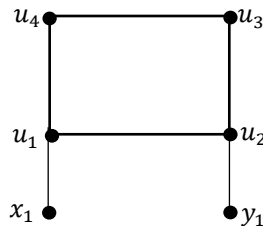
Gambar 1.6.3.2 Graf siklus C_4

1.6.4 Graf Ubur-ubur

Dalam penelitian ini, objek yang dikaji adalah Graf Ubur-ubur. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Gustiani, Fran, dan Huda (2023), Graf n -Ubur-ubur (dinotasikan dengan J_n) didefinisikan sebagai graf yang dikonstruksi dari sebuah graf siklus C_n dan dua buah graf lintasan yang identik, yaitu P_k dengan orde $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Definisi 1.6.4.1 Graf ubur-ubur adalah graf yang dibentuk oleh satu graf siklus C_n dan sepasang graf lintasan $P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ dengan cara menghubungkan satu diantara ujung simpul tiap-tiap graf lintasan pada sebarang dua simpul di graf siklus yang bersebelahan. Graf ubur-ubur dapat dinotasikan dengan J_n . (Gustiani, Fran, & Huda, 2023).

Contoh 1.6.4.1 Untuk memperjelas definisi di atas, berikut disajikan contoh graf ubur-ubur J_4 .



Gambar 1.6.4 1 Graf ubur-ubur J_4

Berdasarkan gambar diatas graf ubur-ubur J_4 mempunyai 6 simpul dengan 4 simpul merupakan simpul dari graf siklus C_4 dan 2 simpul lainnya berasal dari dua graf lintasan $P_{\lceil \frac{4}{2} \rceil}$ yang dilekatkan dengan dua simpul di C_4 yang berdekatan, dengan

simpul-simpul u_1, u_2, u_3, u_4 , merupakan simpul dari graf C_4 dan x_1, y_1 merupakan simpul dari graf $P_{\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}}$.

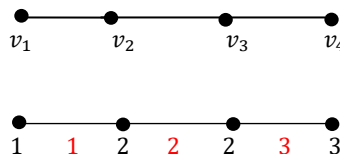
1.6.5 Pelabelan Graf

Teori pelabelan graf merupakan salah satu topik yang berkembang pesat dalam ranah kombinatorika dan teori graf. Pelabelan graf sering kali digunakan untuk memodelkan masalah penetapan nilai pada struktur jaringan tertentu.

Definisi 1.6.5.1 Pelabelan suatu graf adalah suatu pemetaan yang memasangkan setiap elemen graf yaitu himpunan sisi atau himpunan titik ke bilangan bulat positif, yang disebut label. (*Chartrand & Zhang, 2011*).

Jika domain dari pemetaan tersebut adalah himpunan titik, maka disebut pelabelan titik (vertex labeling). Jika domainnya adalah himpunan sisi, maka disebut pelabelan sisi (edge labeling). Apabila domainnya mencakup titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (total labeling). Dalam banyak kasus, pelabelan titik sering digunakan untuk menginduksi label pada sisi berdasarkan aturan operasi tertentu, seperti penjumlahan atau selisih label titik-titik yang bersesuaian (*Gallian, 2015*).

Contoh 1.6.5.1 Berikut diberikan graf lintasan P_4 dengan himpunan titik $V(P_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(P_4) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$. Graf lintasan P_4 dapat diberi label sebagai berikut.



Gambar 1.6.5.1 Pelabelan total pada graf P_4

1.6.6 Pelabelan Harmonis Ganjil

Pelabelan harmonis ganjil merupakan pengembangan dari konsep pelabelan harmonis yang pertama kali diperkenalkan untuk menjawab permasalahan representasi graf menggunakan bilangan bulat non-negatif dengan batasan paritas tertentu.

Definisi 1.6.6.1 Graf G dikatakan graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian sehingga menginduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ yang bersifat bijektif, dan f adalah fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf G . (*Liang, Bai, 2009*).

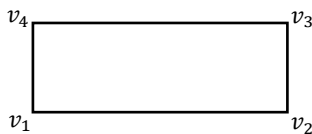
Sebuah graf G dikatakan sebagai graf harmonis ganjil jika graf tersebut memuat pelabelan harmonis ganjil. Berbeda dengan pelabelan harmonis biasa yang

menggunakan operasi modulo q , pelabelan harmonis ganjil menggunakan operasi penjumlahan langsung di mana hasil penjumlahannya dipetakan secara tepat ke himpunan bilangan ganjil pertama sebanyak q . Salah satu sifat penting dari graf harmonis ganjil adalah graf tersebut haruslah graf bipartit. Jika suatu graf memiliki siklus dengan panjang ganjil (seperti segitiga C_3), maka graf tersebut tidak mungkin memiliki pelabelan harmonis ganjil. (Jeyanthi & Philo, 2016).

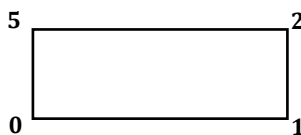
Teorema 1.6.6.1 Graf Siklus C_n adalah Graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0 \pmod{4}$. (Liang, Bai, 2009).

Akibat dari teorema diatas adalah jika n ganjil maka C_n bukan graf harmonis ganjil.

Contoh 1.6.6.1



Gambar 1.6.6.1 Graf Siklus C_4

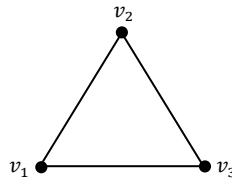
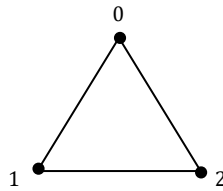
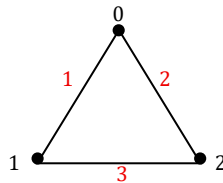


Gambar 1.6.6.2 Pelabelan titik pada graf Siklus C_4



Gambar 1.6.6.3 Pelabelan harmonis ganjil pada Siklus C_4

Berdasarkan pelabelan pada graf C_4 seperti pada Gambar 1.6.6.2, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2,5\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 1.6.6.3. Berdasarkan Gambar 1.6.6.3, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut merupakan fungsi bijektif dengan range $\{1,3,5,7\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada C_4 merupakan suatu pelabelan harmonis ganjil.

Contoh 1.6.6.2**Gambar 1.6.6.4** Graf siklus C_3 **Gambar 1.6.6.5** Pelabelan titik yang injektif pada graf siklus C_3 **Gambar 1.6.6.6** Graf C_3 tidak memenuhi kriteria pelabelan harmonis ganjil

Perhatikan pelabelan pada graf C_3 seperti pada Gambar 1.6.6.5, maka pelabelan tersebut merupakan suatu pelabelan titik yang injektif dengan range $\{0,1,2\}$. Pelabelan titik tersebut menginduksi pelabelan sisi seperti pada Gambar 1.6.6.6. Berdasarkan Gambar 1.6.6.6, diperoleh bahwa pelabelan sisi tersebut bukan fungsi bijektif dengan range $\{1,2,3\}$ karena 2 bukan anggota dari $\{1,3,5\}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa pelabelan titik pada C_3 bukan pelabelan harmonis ganjil.

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

Dalam bab ini akan dibahas mengenai metodologi penelitian yang mencakup mengenai metode penelitian, serta prosedur dari penelitian yang dilakukan.

2.1 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang bersifat teoritis. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur (studi kepustakaan). Metode studi literatur dilakukan dengan mengumpulkan, membaca, dan menganalisis berbagai sumber pustaka seperti buku teks, jurnal ilmiah, skripsi, dan artikel yang relevan dengan teori graf, khususnya yang berkaitan dengan pelabelan graf dan pelabelan harmonis ganjil. Selanjutnya dilakukan analisis teoretis untuk mendefinisikan graf ubur-ubur, mengkonstruksi fungsi, serta membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan pelabelan graf tersebut.

2.2 Langkah-langkah Penelitian

Untuk mencapai tujuan penelitian, yaitu mengkonstruksi dan membuktikan pelabelan harmonis ganjil pada graf ubur-ubur J_n , Tahapan penelitian tersebut dapat dilihat pada skema berikut:

- a) Melakukan studi literatur secara mendalam terhadap referensi-referensi yang relevan dengan pelabelan harmonis ganjil graf ubur-ubur. Langkah ini bertujuan untuk membangun dan memperkuat landasan teoretis yang menjadi dasar bagi penelitian.
- b) Mendefinisikan graf ubur-ubur dengan Menetapkan notasi himpunan titik $V(J_n)$ dan himpunan sisi $E(J_n)$ dengan batasan $n \geq 3$ dan menentukan kardinalitas titik p dan sisi q .
- c) Mencoba Beberapa Kasus.
- d) Mengonstruksi fungsi f pada graf ubur-ubur.
- e) Menentukan fungsi f^* pada graf ubur-ubur.
- f) Membuktikan fungsi f injektif dan fungsi f^* bijektif.
- g) Kesimpulan

Langkah-langkah pada penelitian dapat digambarkan dalam diagram penelitian berikut ini :

