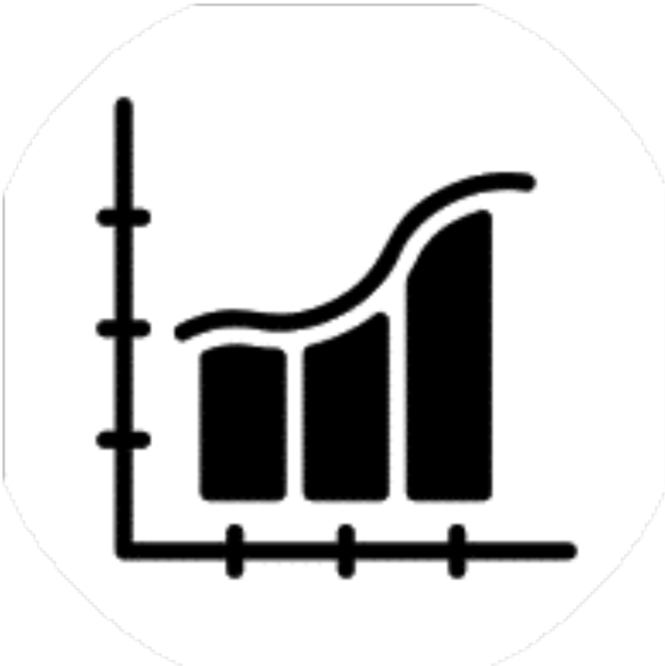
BEBERAPA SIFAT INTEGRAL RIEMANN PADA FUNGSI MONOTON



MUHAMMAD IRFAN HAMKA
H011181504

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR

2024

BEBERAPA SIFAT INTEGRAL RIEMANN PADA FUNGSI MONOTON

MUHAMMAD IRFAN HAMKA
H011181504

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
2024

BEBERAPA SIFAT INTEGRAL RIEMANN
PADA FUNGSI MONOTON

MUHAMMAD IRFAN HAMKA
H011181504

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana
Program Studi Matematika

Pada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2024

SKRIPSI

BEBERAPA SIFAT INTEGRAL RIEMANN
PADA FUNGSI MONOTON

MUHAMMAD IRFAN HAMKA
H011181504

Skripsi,

telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Sarjana Matematika
pada 5 November 2024 dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan

pada

Program Studi Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar

Mengesahkan:	Mengetahui:
Pembimbing Utama,	**Ketua Program Studi,**
Prof. Dr. Budi Nurwahyu, M.S.	**Dr. Firman, S.Si., M.Si.**
NIP. 195808021984031002	**NIP. 196804292002121001**

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI
DAN PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa, skripsi berjudul “Beberapa Sifat Integral Riemann pada Fungsi Monoton” adalah benar karya saya dengan arahan dari pembimbing Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.. Karya ilmiah ini belum diajukan dan tidak sedang diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka skripsi ini. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini adalah karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut berdasarkan aturan yang berlaku.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta (hak ekonomis) dari karya tulis saya berupa skripsi ini kepada Universitas Hasanuddin.

Makassar, Oktober 2024

Muhammad Irfan Hamka
H011181504

UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur saya panjatkan kepada Tuhan yang Maha Esa atas segala nikmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan. Skripsi yang berjudul "Beberapa Sifat Integral Riemann pada Fungsi Monoton" disusun sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Skripsi ini tidak akan dapat disusun dan terampungkan sebagaimana mestinya tanpa bantuan dan dukungan oleh berbagai pihak dari masa perkuliahan hingga penghujung masa studi, sehingga dengan segala kerendahan hati saya merasa perlu menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. **Prof. Dr. Budi Nurwahyu, MS.** selaku pembimbing Utama yang senantiasa meluangkan waktu untuk diskusi, memberikan arahan, motivasi, dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini
2. **Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.** dan **Dr. Muhammad Zakir, M.Si.** selaku anggota Tim Penguji yang telah memberikan saran dan kritik yang membangun terhadap perbaikan dan penyempurnaan penyusunan skripsi ini
3. Ibu **Syahriani Syahrir** yang telah memberikan banyak dukungan kepada saya ketika masih menjadi mahasiswa baru, dan Pak **Nirwan** atas bantuannya dalam pengurusan penyesuaian golongan UKT sehingga dapat melanjutkan pendidikan dengan lebih lancar.
4. **Darmiani, Nurul Ilma Islamiyah, Wardah Hidayah H., Nurjannah Maulinda,** dan **Andi Yurike Tendri P.** yang selalu mengingatkan dan memberi semangat untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi ini yang sering kali tertunda karena aktivitas lainnya.
5. Kawan-kawan **Mtk 2 (Emi** dan **Saidil)**, **Petir Geng (Afni, Aqiela, Ayu, Gresye, Hijrah,** dan **Nisa)** dan **Matematika 2018** yang telah membersamai selama aktivitas akademik saya sebagai mahasiswa.
6. Kawan-kawan **KKN Unhas Gelombang 108 PS Bulukumba**, terkhusus kepada **Keluarga Posko 5 (Pak Thamrin Sekeluarga, Suci, Yusnita, Rahmatul, Eka, Mairah,** dan **Rendi)** yang mengajarkan bagaimana mengaplikasikan ilmu selama perkuliahan di masyarakat.
7. Keluarga **Himatika FMIPA Unhas** dan **Integral 2018**, terkhusus kepada **Dandi**, **Ardi, Jalil, Ail, Fadhil, Iis, Kido, Ica, Fathur, Nando, Ilham, Juni, Lutfi, Rizky, Nasmah, Naura, Ninis, Arhan,** dan **Syamsul** yang membuat masa selama menjadi mahasiswa terasa dinamis dan menyenangkan.
8. Kawan-kawan **U.S.S.R, Batas Wajar,** dan Teman Seperjuangan **Sekolah Mimpi** atas motivasi semangat untuk bergerak bersama. Percayalah matematika itu cantik jika tidak dilihat dengan mata.
9. Kedua Orang Tua saya (**Hamka Mus** dan **Atih**) yang telah berkorban sehingga saya bisa tumbuh dan berproses sebagai manusia, serta kedua saudara saya (**Irda Handayani** dan **Irna Sri Wahyuni**) yang selalu memberikan doa dan dukungan moral yang tak ternilai.
10. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah memberikan dukungan morel dan materiel, baik secara langsung maupun tidak langsung.

Akhir kata, semoga segala kebaikan yang telah diberikan bernilai ibadah dan semoga skripsi ini dapat memberi manfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Makassar, November 2024

Muhammad Irfan Hamka

ABSTRAK

MUHAMMAD IRFAN HAMKA. **Beberapa Sifat Integral Riemann pada Fungsi Monoton** (dibimbing oleh Budi Nurwahyu).

Penelitian ini membahas teorema nilai rata-rata kedua untuk integral pada produk fungsi f yang monoton dan g yang terintegral Riemann. Pengembangan ini didasarkan pada penelitian Wituła et al. (2012) yang mensyaratkan f sebagai fungsi monoton non-negatif. Dalam penelitian ini, dilakukan generalisasi dengan memperlemah syarat fungsi f, dengan fungsi f tidak perlu bernilai non-negatif maupun kontinu di interval $[a, b]$, melainkan cukup monoton dan bernilai real. Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan studi pustaka, mengumpulkan berbagai referensi ilmiah untuk menyusun dan membuktikan variasi teorema yang lebih umum. Penelitian ini berhasil menunjukkan bahwa teorema nilai rata-rata kedua tetap berlaku pada produk fg, serta menunjukkan sifat-sifat terkait interaksi antara fungsi monoton dan fungsi yang terintegral Riemann. Generalisasi ini menjadikan teorema lebih fleksibel dan aplikatif di berbagai bidang matematika modern, dengan potensi pengembangan penelitian yang lebih lanjut.

Kata Kunci: Teorema Nilai Rata-rata Kedua; Fungsi Monoton; Integral Riemann; Produk Fungsi

ABSTRACT

MUHAMMAD IRFAN HAMKA. **Some Properties of the Riemann Integral on Monotonic Functions** (supervised by Budi Nurwahyu).

This research discusses the second mean value theorem for integrals on the product of a monotonic function f and a Riemann-integrable function g. It builds upon the work of Wituła et al. (2012), who required f to be a non-negative monotonic function. In this study, the conditions on f are weakened, allowing f to be real-valued and not necessarily continuous on the interval $[a, b]$, as long as it remains monotonic. This research was conducted using a literature review approach, gathering various scientific references to formulate and prove a more general version of the theorem. This research demonstrates that the second mean value theorem still applies to the product fg, and reveals new properties regarding the interaction between monotonic functions and Riemann-integrable functions. This generalization makes the theorem more flexible and applicable in various areas of modern mathematics, with potential for further research development.

Keywords: Second Mean Value Theorem; Monotonic Functions; Riemann Integral; Product Functions

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Para matematikawan klasik telah melakukan studi tentang luas daerah pada bidang dan menghubungkannya dengan luas persegi panjang. Mereka menemukan bahwa suatu persegi panjang bisa memiliki luas yang sama dengan daerah pada bidang yang sedang dikaji. Hasil yang diperoleh tersebut mengarah pada teorema nilai rata-rata integral (Boyer, 1949).

Selama tahun 1630-an, Fermat dan Descartes membuat kemajuan yang penting dalam geometri analitik dan konsep turunan. Namun, kalkulus seperti yang dikenal sekarang baru mulai terbentuk pada akhir tahun 1660-an ketika Isaac Newton mengembangkan teorinya tentang "fluks" dan menciptakan metode "tangen invers" untuk menghitung luas di bawah kurva. Di sisi lain, pada tahun 1680-an, Gottfried Leibniz juga menemukan metode serupa secara independen melalui pendekatan yang berbeda dan memperkenalkan istilah "*calculus differentialis*" dan "*calculus integralis*," yang menghubungkan proses mencari garis singgung dengan perbedaan dan mencari luas dengan penjumlahan. Dengan demikian, mereka menyadari bahwa integrasi adalah kebalikan dari diferensiasi. Pada tahun 1850-an, Bernhard Riemann mengusulkan pandangan baru dengan memisahkan integrasi dari diferensiasi dan fokus pada proses penjumlahan dan limit untuk menemukan luas secara tersendiri. Ia memperluas cakupan integrasi dengan mempertimbangkan semua fungsi dalam interval tertentu yang dapat diintegrasikan (Bartle, 1992).

Fungsi monoton merupakan fungsi yang dapat diintegrasikan pada intervalnya (Bartle, 1992). Fungsi monoton memiliki sifat perubahan yang teratur di seluruh interval tertutup. Secara khusus, fungsi monoton dapat berupa monoton *non-decreasing* (tidak turun) dan monoton *non-increasing* (tidak naik), artinya nilai fungsi meningkat atau menurun seiring pergerakan dari satu titik ke titik lain di dalam interval tersebut. Karena fungsi monoton dapat terintegralkan, maka teorema nilai rata-rata pada integral juga berlaku pada fungsi ini.

Teorema nilai rata-rata untuk integral merupakan salah satu instrumen analisis matematika yang sangat berguna. Teorema ini menyatakan bahwa terdapat c dalam (a, b) sedemikian sehingga luas persegi panjang dengan tinggi $f(c)$ dan lebar $b - a$ sama dengan luas $f(x) \geq 0$ pada selang $[a, b]$ dan dibatasi oleh sumbu x (Tong, 2002).

Selain teorema nilai rata-rata untuk yang telah dibahas, ada juga teorema nilai rata-rata kedua yang memiliki peran penting dalam analisis matematika, khususnya dalam konteks integral.

Teorema nilai rata-rata kedua untuk integral ada dalam dua bentuk, yang pertama berasal dari Bonnet dan yang lainnya dari Du Bois-Reymond dan Weierstrass merupakan alat yang sangat berguna dalam analisis karena mampu memperkirakan nilai integral tentu. Teorema ini berkaitan dengan perkalian dua fungsi $f(x), g(x)$ yang terdefinisi untuk interval (a, b). Fungsi pertama dari fungsi-fungsi tersebut terbatas dan monoton dalam interval tersebut (Hobson, 1908). Umumnya teorema nilai rata-rata kedua untuk integral berbunyi sebagai berikut (Ghorpade dan Limaye, 2005):

Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi monoton dan $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi non-negatif yang terintegralkan Riemann atau kontinu. Maka terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx.$$

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Wituła et al. (2012), mereka menunjukkan versi yang lebih kuat dari teorema nilai rata-rata kedua untuk integral dari f fungsi monoton non-negatif dan g fungsi terintegralkan, dengan perluasan cakupan dan persyaratan fungsi yang terlibat. Temuan ini mendorong penulis untuk melakukan penelitian lebih lanjut guna mengeksplorasi dan memperdalam pemahaman terkait teorema nilai rata-rata kedua untuk integral.

Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan bukti teorema nilai rata-rata kedua untuk integral yang berlaku pada produk fg, dengan f adalah fungsi monoton dan g adalah fungsi terintegral Riemann. Dengan memperlemah kondisi fungsi f yang tidak perlu kontinu di $[a, b]$, dan f bernilai real (tidak harus non-negatif) maka implikasi dari teorema ini menjadi lebih umum sehingga lebih aplikatif. Penelitian ini juga akan berfokus pada fungsi bernilai real satu variabel dengan pendekatan integral Riemann lipat satu. Diharapkan hasil dari penelitian ini mampu memberikan pemahaman mendalam tentang teorema nilai rata-rata kedua untuk integral, pengaplikasikan di berbagai bidang ilmu yang memerlukan pemahaman tentang integral, dan membuka jalan untuk penelitian lebih lanjut.

Berdasarkan uraian di atas, penulis melakukan penelitian yang lebih mendalam terkait teorema nilai rata-rata kedua untuk integral yang melibatkan fungsi monoton dan fungsi terintegralkan Riemann. Hasil kajian dari penelitian tersebut termuat dalam skripsi yang berjudul “**Beberapa Sifat Integral Riemann pada Fungsi Monoton”**.

1.2. Kajian Pustaka

1.2.1 Monoton dan Kontinuitas Fungsi

Definisi 1.1 **(Fungsi Monoton)** (Bartle, 1992). Misal $I \subseteq \mathbb{R}$ dan misal $f: I \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan tidak turun pada I apabila untuk setiap $a, b \in I$ dan $a \leq b$ maka $f(a) \leq f(b)$. Sedangkan fungsi f dikatakan tidak naik pada I apabila untuk setiap $a, b \in I$ dan $a \leq b$ maka $f(a) \geq f(b)$.

Jika suatu fungsi tidak naik atau tidak turun pada I maka fungsi tersebut disebut fungsi monoton pada I.

Contoh 1.1. Diberikan suatu fungsi $f(x) = x$ dan $g(x) = -x$ masing-masing terdefinisi di interval $[0,1]$.

Akan diambil beberapa titik $x_1, x_2 \in [0,1]$ untuk menguji kemonotonan $f(x)$ dan $g(x)$.

Karena $x_1 \leq x_2$ dan $f(x_1) \leq f(x_2)$, maka $f(x) = x$ monoton tidak turun di interval $[0,1]$.

Karena $x_1 \leq x_2$ dan $g(x_1) \geq g(x_2)$, maka $g(x) = -x$ monoton tidak naik di interval $[0,1]$.

Definisi 1.2 **(Limit Fungsi)** (Leithold, 1972**).** Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang terdefinisi di sebarang bilangan pada beberapa interval buka (a, b). Limit dari fungsi f untuk x mendekati a dari kanan adalah L_a, dituliskan

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_a,$$

jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L_a| < \epsilon$ Ketika $0 < x - a < \delta$. Sedangkan limit dari fungsi f untuk x mendekati b dari kiri adalah L_b, dituliskan

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L_b,$$

jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L_b| < \epsilon$ Ketika $-\delta < x - b < 0$.

Contoh 1.2. Diberikan suatu fungsi $f(x) = \sqrt{x}$. Akan dievaluasi limit kanan dan limit kiri dari f di titik $x = 2$.

Limit Kanan fungsi $f(x)$ di $x = 2$ adalah

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x} = 2,$$

karena untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $0 < x - 4 < \delta$ maka $\left|\sqrt{x} - 2\right| < \epsilon$. Dan limit kiri fungsi $f(x)$ di $x = 2$ adalah

$$\lim_{x \to 4^-} \sqrt{x} = 2.$$

Karena untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $-\delta < x - 4 < 0$ maka $\left|\sqrt{x} - 2\right| < \epsilon$.

Definisi 1.3 **(Fungsi Kontinu)** (Stewart, 2008). Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f terdefinisi di titik a dan $\lim_{x \to a} f(x)$ ada. Fungsi f dikatakan kontinu di titik a jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Jika f tidak kontinu di titik a, maka f dikatakan diskontinu di titik a.

Contoh 1.3. Diberikan suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan $f(x) = x$. Fungsi f kontinu di titik $x = 0$ karena $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

1.2.2 Teorema Nilai Antara

Teorema 1.1 (Jarnik, 1981). Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi kontinu. Jika $f(a)f(b) < 0$ maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$.

Contoh 1.4. Diberikan suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 4$ pada interval $[0,3]$. Akan dihitung $f(0)$ dan $f(3)$ sehingga diperoleh

$$f(0) = 0^2 - 4 = 0 - 4 = -4,$$

$$f(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5.$$

Karena $f(0)f(3) = -4.5 = -20 < 0$ maka terdapat $c \in (0,3)$ sedemikian sehingga

$$f(c) = c^2 - 4 = 0.$$

Dalam kasus ini, nilai c yang memenuhi adalah $c = 2$.

Teorema 1.2 (Bartle, 1992). Misal I adalah suatu interval dan misal $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu di I. Jika $a, b \in I$ dan $k \in \mathbb{R}$ memenuhi $f(a) < k < f(b)$ maka terdapat suatu titik $c \in I$ antara a dan b sedemikian sehingga $f(c) = k$.

Contoh 1.5. Diberikan suatu fungsi $f(x) = x$ terdefinisi di $[0,1]$. Akan ditunjukkan terdapat suatu $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f(c) = \frac{1}{2}$. Nilai c yang memenuhi adalah $c = \frac{1}{2}$.

1.2.3 Batas Atas dan Batas Bawah

Definisi 1.4 **(Batas Atas dan Batas Bawah)** (Bartle, 1992). Diberikan S adalah subset dari $\mathbb{R}$.

(i) Suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ dikatakan batas atas dari S jika $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$.

(ii) Suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ dikatakan batas bawah dari S jika $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$.

Contoh 1.6. Diberikan suatu himpunan $S = \{1,2,3\}$. Setiap bilangan $u \geq 3$ merupakan batas atas dari S, sedangkan $w \leq 1$ merupakan batas bawah dari S.

1.2.4 Supremum dan Infimum

Definisi 1.5 **(Supremun dan Infimum)** (Bartle, 1992). Diberikan S adalah subset dari $\mathbb{R}$.

(i) Jika S terbatas di atas, maka batas atas u dikatakan Supremum (atau batas atas terkecil) dari S jika tidak ada bilangan lebih kecil dari u adalah batas atas dari S, dinotasikan $\sup S = u$.

(ii) Jika S terbatas di bawah, maka batas bawah w dikatakan Infimum (atau batas bawah terkecil) dari S jika tidak ada bilangan lebih kecil dari w adalah batas atas dari S, dinotasikan $\inf S = w$.

Contoh 1.7. Diberikan himpunan $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Bilangan 1 merupakan batas atas terkecil dari S, atau $\sup S = 1$. Bilangan 0 merupakan batas atas terkecil dari S, atau $\inf S = 0$.

1.2.5 Integral Riemann

Definisi 1.6 **(Fungsi Langkah)** (Lesnussa et al., 2012). Suatu fungsi $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ disebut Fungsi Langkah jika terdapat selang-selang $I_1, I_2, \dots, I_n$ yang saling asing $I_i \cap I_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan terdapat bilangan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sehingga:

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \ ada, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} c_k, & x \in I_k \\ 0, & x \notin I_k \end{cases}.$$

Contoh 1.8. Suatu fungsi $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ didefinisikan

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha, & a \le x < c \\ \beta, & c \le x \le b' \end{cases}$$

dengan α dan β adalah konstan, adalah suatu Fungsi Langkah.

Definisi 1.7 **(Integral Elementer)** (Jain et al., 1986) Diberikan suatu fungsi langkah ψ terdefinisi pada selang tutup $[a,b]$. Maka

$$\psi(x) = c_i, \qquad x_{k-1} < x < x_k, \qquad k = (1,2,3,\dots,n),$$

dengan $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ adalah partisi dari $[a,b]$. Didefinsikan integral elementer dari ψ di $[a,b]$ sebagai:

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_i(x_k - x_{k-1}).$$

Contoh 1.9. Misal ψ suatu fungsi langkah terdefinisi pada $[0,3]$, didefinisikan:

$$\psi(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

dan pertimbangkan partisi $P = \{0,1,2,3\}$. Integral elementer fungsi ψ di $[0,3]$ adalah

$$\int_0^3 \psi(x)\, dx = 3(1-0) + 2(2-1) + 1(3-2) = 6.$$

Definisi 1.8 **(Terintegral Riemann)** (Jain et al., 1986). Diberikan f fungsi bernilai real dan terbatas di $[a,b]$, dan diberikan φ dan ψ masing-masing adalah fungsi langkah yang terdefinisi pada selang tutup $[a,b]$. Integral Riemann atas f di $[a,b]$ didefinisikan sebagai:

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf_{\varphi(x)\geq f(x)} \left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx\right\},$$

dan integral Riemann bawah didefinisikan sebagai:

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx} = \sup_{\psi(x)\leq f(x)} \left\{\int_a^b \psi(x)\,dx\right\}.$$

Jika $\overline{\int_a^b f(x)dx} = \underline{\int_a^b f(x)\,dx}$, integral Riemann dari f di $[a,b]$ ada dan dinotasikan dengan $\int_a^b f(x)\,dx$.

Contoh 1.10. Didefinisikan suatu fungsi $f(x) = x$ pada interval $[0,1]$. Diberikan $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right\}$ adalah partisi selang $[0,1]$ dan diberikan fungsi langkah

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n}, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ \frac{3}{n}, & \frac{2}{n} \leq x < \frac{3}{n} \\ & \vdots \\ 1, & \frac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dan

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ \frac{2}{n}, & \frac{2}{n} \leq x < \frac{3}{n} \\ & \vdots \\ \frac{n-1}{n}, & \frac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dengan n adalah jumlah subinterval di $[0,1]$. Akan dihitung integral Riemann atas dan integral Riemann bawah dari fungsi f di $[0,1]$. Integral Riemann atas dari fungsi f di $[0,1]$ adalah

$$\overline{\int_0^1 x\,dx} = \inf_{\varphi(x)\geq f(x)} \left\{\int_0^1 \varphi(x)\,dx\right\} = \inf_{\frac{i}{n}\geq x} \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.\frac{1}{n}\right\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{n+1}{2n}\right\} = \frac{1}{2},$$

sedangkan integral Riemann bawah dari fungsi f di $[0,1]$ adalah

$$\underline{\int_0^1} x\,dx = \sup_{\psi(x)\leq f(x)} \left\{\int_0^1 \psi(x)\,dx\right\} = \sup_{\frac{i-1}{n}\leq x} \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}.\frac{1}{n}\right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{n-1}{2n}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Karena integral Riemann atas dan integral Riemann bawah fungsi $f(x) = x$ di $[0,1]$ bernilai sama, maka f terintegralkan Riemann di $[0,1]$ dengan nilai $\frac{1}{2}$.

1.2.6 Teorema Keintegralan Fungsi

Teorema 1.3 (Bartle, 1992). Jika $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi monoton di $[a,b]$, maka fungsi f terintegral Riemann di $[a,b]$.

Contoh 1.11. Diberikan suatu fungsi monoton $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x$ pada interval $[0,1]$. Karena fungsi f monoton di $[0,1]$, maka fungsi f terintegralkan di $[0,1]$ dan $\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$.

Teorema 1.4 (Bartle, 1992). Jika $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu di $[a,b]$, maka fungsi f terintegralkan di $[a,b]$.

Contoh 1.12. Diberikan suatu fungsi kontinu $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x$ pada interval $[0,1]$. Karena f kontinu di $[0,1]$, maka fungsi f terintegralkan di $[0,1]$ dan $\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$.

Teorema 1.5 (Bartle, 1992). Misal $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral pada $[a,b]$. Jika $k \in \mathbb{R}$, maka fungsi kf dan $f + g$ terintegralkan pada $[a,b]$ dan

(i) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Contoh 1.13. Misal $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x$ masing-masing terdefinisi pada $[0,1]$, serta $k \in \mathbb{R}$.

(i) $\int_0^1 kx^2\,dx = k\int_0^1 x^2\,dx = \frac{k}{3}$

(ii) $\int_0^1 x^2 + x\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Teorema 1.6 (Bartle, 1992). Jika $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral pada $[a,b]$, dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Contoh 1.14. Misal Misal $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x$ masing-masing terdefinisi pada $[0,1]$. Karena $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [0,1]$ maka

$$\int_0^1 x^2\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$$

atau

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$$

sehingga ketaksamaan berlaku.

Teorema 1.7 (Stewart, 2008). Misal fungsi f terintegralkan pada $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Contoh 1.15. Misal $f(x) = x^2$ terdefinisi di $[1,2]$.

Integral dari fungsi f di $[1,2]$ adalah

$$\int_1^2 x^2\, dx = \frac{7}{3},$$

sedangkan

$$-\int_2^1 x^2\, dx = \frac{7}{3}$$

Sehingga $\int_1^2 f(x)\, dx = -\int_2^1 f(x)\, dx$.

Teorema 1.8 (Bartle, 1992). Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas dan diberikan c yang memenuhi $a < c < b$. Fungsi f terintegralkan pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f terintegralkan pada $[a, c]$ dan f terintegralkan pada $[c, b]$. Pada kasus ini,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Contoh 1.16. Diberikan suatu fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x$ pada interval $[0,1]$. Akan dipilih suatu $c \in [0,1]$. Pilih $c = \frac{1}{2}$ sedemikian sehingga

$$\int_0^1 x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\, dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Teorema 1.9 (Bartle, 1992). Misal $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$. Jika fungsi f dan g terintegralkan di $[a, b]$ maka fg terintegralkan di $[a, b]$.

Contoh 1.17. Misalkan $f(x) = \frac{x}{2}$ dan $g(x) = 2$ pada interval $[0,1]$.

Hasil kali fungsi fg:

$$f(x)g(x) = \frac{x}{2}.2 = x.$$

Akan dihitung integral fg pada $[0,1]$. Integralnya dihitung sebagai berikut:

$$\int_0^1 f(x)g(x)\, dx = \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}.$$

1.2.7 Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Teorema 1.10 (Bartle, 1992). Misal $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan pada $[a,b]$ dan $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ memenuhi kondisi:

(a) F kontinu di $[a,b]$

(b) F' ada dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a,b)$,

maka

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Contoh 1.18. Misalkan $f(x) = 2x$ pada interval $[0,1]$. F adalah antiturunan dari f:

$$F(x) = x^2 + c.$$

Akan dihitung integral fungsi f di $[0,1]$. Integral fungsi f di $[0,1]$ adalah

$$\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = ((1)^2 + c) - ((0)^2 + c) = 1.$$

1.2.8 Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Teorema 1.11 (Bartle, 1992). Misal $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan pada $[a,b]$ dan misal $F(x) = \int_a^x f$ dengan $x \in [a,b]$ maka F kontinu pada $[a,b]$.

Contoh 1.19. Misalkan $f(x) = 2x$ pada interval $[0,1]$, dan didefinisikan $F(x) = \int_0^x 2t\ dt$. Dengan menghitung nilai $F(x)$, diperoleh:

$$F(x) = \int_0^x 2t\ dt = x^2.$$

Karena fungsi F merupakan fungsi polinomial, maka fungsi F kontinu di setiap titik pada interval $[0,1]$.

1.2.9 Teorema Nilai Rata-Rata untuk Integral

Teorema 1.12 (Huang, 2018). Jika fungsi f terintegralkan di interval $[a,b]$ dan fungsi g terintegralkan dan non-negatif di $[a,b]$ maka terdapat $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c)\int_a^b g(x)\, dx.$$

Contoh 1.20. Akan dievaluasi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx$.

Dengan memisalkan $f(x) = x$ dan $g(x) = \cos x$ di interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dapat dihitung

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\ dx \\ &= f(c)\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, dx\end{aligned}$$

$$= f(c)[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0]$$
$$= f(c)$$

dengan $c = \frac{\pi}{2} - 1$.

Teorema 1.13 (Dixon, 1909). Jika fungsi f adalah fungsi monoton di $a \leq x \leq b$ dan fungsi ϕ terintegralkan di selang yang sama, maka

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\, dx = f(a)\int_a^c \phi(x)\, dx + f(b)\int_c^b \phi(x)\, dx,$$

dengan $a \leq c \leq b$, dan tetap berlaku untuk $a < c < b$ kecuali f konstan di $a < c < b$.

Contoh 1.21. Diberikan $f(x) = x$ dan $g(x) = e^x$ masing-masing terdefinisi di $[0,2]$. Akan dihitung $\int_0^2 xe^x\, dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^x\, dx &= f(0)\int_0^c e^x\, dx + f(2)\int_c^2 e^x\, dx \\ &= 0(e^c - e^0) + 2(e^2 - e^c) \\ &= 2(e^2 - e^c).\end{aligned}$$

Pilih $c = \ln\frac{(e^2-1)}{2}$ sedemikian sehingga diperoleh $\int_0^2 xe^x\, dx = e^2 + 1$.

1.2.10 Integral Tak Wajar

Teorema 1.14 (Keyton, 2014). Misal f terdefinisi di $(a, b]$ dan terintegralkan $[c, b]$ untuk setiap $c \in (a, b]$. Integral tak wajar dari f di $(a, b]$ adalah

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Contoh 1.22. Misal suatu fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ terdefinisi di $(0,1]$. Integral dari $f(x)$ di $(0,1]$ adalah

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\, dx &= \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x}\, dx \\ &= \lim_{c\to 0^+}[\ln 1 - \ln c] \\ &= \lim_{c\to 0^+}[-\ln c] \\ &= \infty.\end{aligned}$$