

BAB 1

Pendahuluan Umum

1.1 Latar Belakang

Proses stokastik adalah salah satu konsep penting dalam bidang matematika dan statistika yang digunakan untuk menggambarkan sistem atau fenomena yang berkembang seiring waktu dengan cara acak bukan deterministik. Berbeda dengan proses deterministik yang hasilnya bisa diprediksi secara pasti jika kondisi awalnya diketahui, proses stokastik melibatkan variabel acak yang berubah seiring waktu, sehingga hasil akhirnya tidak dapat diprediksi dengan tepat. Proses stokastik dapat dikategorikan berdasarkan sifat prosesnya, antara lain proses Poisson, proses Markov, proses renewal, proses Lévy, proses Gaussian, random walk, dan proses percabangan. Penalaran tentang proses stokastik menggunakan teknik matematika dari probabilitas, kalkulus, aljabar linier, teori himpunan, dan topologi, serta cabang khusus analisis matematika seperti analisis real, teori ukuran, analisis Fourier, dan analisis fungsional. Teori proses stokastik dianggap sebagai kontribusi penting bagi matematika dan terus menjadi bidang penelitian yang aktif, baik secara teoritis maupun untuk aplikasi praktis. Realisasi keadaan dan modelnya dapat dinyatakan sebagai *Point process*.

Point process pada dasarnya adalah model matematika untuk sebaran titik waktu atau lokasi terjadinya kejadian. Banyak fenomena nyata yang dapat dinyatakan sebagai pola titik. Kedatangan nasabah di sebuah bank, peristiwa kelahiran bayi di sebuah rumah sakit, peristiwa gempa, tumbuhnya tanaman liar di sebuah taman, dan lain-lain. Peristiwa atau kejadian-kejadian ini bisa saja terjadi secara acak dan tidak diketahui berapa banyak peristiwa yang akan terjadi, atau pada peristiwa apa hal itu akan terjadi. Biasanya ada kompleksitas sejarah yang berada di balik waktu yang



misalnya gempa susulan dari gempa yang terjadi sebelumnya, kunjungan dalam sebuah taman wisata dan sebagainya.

adalah sebaran titik kejadian yang acak dalam selang waktu tertentu. Untuk menyatakan sebaran titik tersebut dapat fungsi intensitas yang bergantung pada waktu dan ruang yang dinyatakan dengan conditional intensity atau intensitas bersyarat $\lambda(t|\mathcal{H}_t)$. Fungsi ini menyatakan laju kemunculan kejadian yang dapat bergantung

terhadap waktu dan ruang.

Untuk data yang diperoleh dari fenomena alam dan memenuhi asumsi *point process*, penentuan prosesnya dapat menggunakan pendekatan aplikasi yang berbeda. Hal yang pertama dilakukan adalah menentukan distribusi jangka waktu antara peristiwa yang satu dengan peristiwa lainnya, kemudian memformulasikan kembali distribusi tersebut dalam bentuk fungsi intensitas bersyarat. Fungsi intensitas bersyarat ini adalah fungsi terhadap selang waktu antar kejadian yang memengaruhi fungsi kepadatan peluang sebuah *point process*.

Pembahasan mengenai *point process* sudah dilakukan sejak awal abad 20, beberapa peneliti awal terkait *point process* adalah Andrey Kolmogorov, Norbert Wiener, dan David Cox. David Cox melalui [8] di tahun 1953 dan [9] di tahun 1955 mempopulerkan proses Cox sebagai perluasan dari proses Poisson. Pada tahun 1972, David Cox dan P. Lewis memperluas konsep *point process* univariat ke bentuk *point process* multivariat di [12]. Pada tahun 1977 David Cox bersama dengan Valerie Isham mengkaji tentang *Bivariate point process* yang diperoleh dari tiga *point process* univariat yang saling bebas [10]. Cox dan Isham mempublikasikan seluruh konsep *point process* dalam [11] pada tahun 1980. Sejak saat itu, model *point process* kemudian berkembang dan telah banyak digunakan dalam penelitian di bidang epidemiologi, yang dapat ditemukan diberbagai paper, misalnya di [18], [30], dan [39]. Penelitian *point process* juga dapat ditemukan dalam bidang biologi, seperti dapat dilihat di [44], [29], [27], dan [45]. Penelitian model *point process* juga sangat banyak pada bidang geosains dan menjadi topik tersendiri, khususnya pada data gempa bumi di berbagai negara atau kawasan, sebagaimana dapat ditemukan pada [47], [35]. Untuk data gempa bumi di Jepang dari tahun 1926 sampai 1995 oleh [37] dan data gempa bumi di Jepang dari tahun 1926 hingga 2009 oleh [50]. Data gempa bumi di Indonesia yang dikaitkan dengan model *point process* dapat ditemukan di [46] untuk kawasan Nusa Tenggara dan [48] yang membahas data gempa bumi di Sulawesi. Perkembangan bahasannya tidak hanya sebagai sebaran titik waktu (temporal) [9], tapi juga ruang (spasial), [2] dan gabungan waktu dengan ruang atau lebih dikenal dengan spasial-temporal, [37].

Point process menurut banyaknya variabel acak untuk titik peristiwanya dibedakan menjadi dua yaitu *point process* univariat dan multivariat. Perluasan model *point process* untuk dua komponen kejadian atau peristiwa disebut dengan *point process* bivariat. Jika peristiwa yang diharapkan terjadi dapat dibedakan menjadi dua, maka kejadian A dan kejadian B merupakan dua *point process* univariat yang mungkin saling bebas atau tidak saling bebas. Keterbatasan *point process*



si tersebut adalah kejadian A dan kejadian B diasumsikan sebagai fungsi intensitas bersyarat untuk kejadian A dan B diasumsikan dapat menjadi pertimbangan adalah kejadian A dan kejadian B bebas sehingga ada dua *point process* dengan fungsi intensitas fenomena alam terkait dengan kejadian-kejadian yang mungkin terfungsi intensitas bersyarat masing-masing yang mungkin saja

saling berpengaruh.

Fungsi intensitas bersyarat untuk peristiwa tertentu pada umumnya tidak diketahui. Untuk hal tersebut diperlukan suatu inferensi untuk menduga fungsi intensitas bersyaratnya. Ketika model *point process* diterapkan pada kumpulan data yang mencakup area luas atau jangka waktu lama, parameter model dapat berubah secara sistematis karena variasi lingkungan. Batas temporal, spasial, atau spasial-temporal dari perubahan tersebut juga sulit ditentukan. Fungsi intensitas bersyarat inilah yang memberi karakter pada berbagai jenis *point process* univariat ataupun multivariat. Metode inferensi yang mampu menangani variasi model seperti itu menjadi sangat penting.

Penelitian-penelitian terkait dengan fungsi intensitas bersyarat untuk *point process* kemudian berkembang untuk menaksir parameter-parameter yang muncul dari bentuk fungsi intensitas yang diberikan. Misalnya Hawkes pada tahun 1971 mengemukakan bentuk fungsi intensitas bersyarat dari *point process* menggunakan metode maksimum likelihood [23]. *Point process* yang dikemukakan oleh Hawkes kemudian dikenal sebagai proses Hawkes. Ogata di tahun 1978 yang menaksir bentuk fungsi intensitas bersyarat untuk *point process* stasioner dengan pendekatan perilaku asimptotik metode maksimum likelihood, [34] dan pada tahun 1988, [35] membahas fungsi intensitas proses Poisson stasioner pada data gempa bumi. Pendugaan fungsi intensitasnya juga menggunakan metode likelihood dengan analisis residu. Goulard melakukan penaksiran dengan metode maksimum pseudo-likelihood untuk marked Gibbs *point process* [20] tahun 1996. Ogata pada tahun 2006 mengkaji kembali data gempa bumi dengan model *Epidemic Type Afterschock-Sequences* (ETAS) dalam [37] kemudian menyimpulkan model *point process* spasial-temporal yang sesuai dengan data kegempaan di berbagai wilayah di sekitar Jepang dengan metode penaksiran menggunakan metode maksimum likelihood untuk menaksir parameternya. [22] pada tahun 2010, menganalisis penggunaan pembobot pada metode maksimum likelihood untuk *point process* spasial. Pembahasan *point process* spasial menggunakan pembobot pada metode maksimum likelihood untuk penaksiran fungsi intensitas bersyaratnya. Pada tahun 2013, Penelitian Jalilian, et al di [27] untuk model proses Cox terhadap dekomposisi varians untuk data pola titik lokasi pohon hutan hujan tropis. Penaksiran parameter model yang digunakan oleh Jalilian, et al adalah metode maksimum likelihood dengan fungsi likelihoodnya adalah fungsi likelihood komposit. Tahun 2015, Zhuang menerapkan metode maksimum likelihood terboboti melalui teknik analisis residu pada model ETAS untuk karakteristik kegempaan yang bervariasi secara spasial di wilayah Jepang, [50]. Kemudian Bonnet et al, [5] di tahun 2021 menggunakan metode maksimum likelihood untuk menaksir parameter proses Hawkes dan mengim-

k kernel eksponensial.

fungsi intensitas bersyarat untuk *point process* bivariat juga telah [10]. Jika Cox dan Lewis pada tahun 1972 menyinggung tentang syarat *point process* bivariat yang saling bergantung dan mene-
sus *point process* bivariat saling bebas, sedangkan di Cox dan [977] membahas bentuk *point process* bivariat yang tidak saling



bebas tetapi berasal dari tiga *point process* univariat yang saling bebas dengan fungsi intensitas bersyarat yang konstan. David Cox dan Valerie Isham di [10] mempertimbangkan model *point process* bivariat yang terbentuk dari tiga proses Poisson. Kasus yang dikerjakan adalah perekaman kejadian dari tiga proses Poisson di dua penghitung elektronik. Pencatat pertama mendata kejadian dari proses Poisson pertama dan ketiga, sedangkan pencatat kedua akan merekam kejadian proses Poisson kedua dan ketiga. Pada tahun 1978, Griffiths dan Milne juga membahas tentang *point process* bivariat yang diberikan oleh Cox dan Isham yang bentuk fungsi intensitasnya berbeda. [21] mengembangkan sebuah karakteristik untuk proses Poisson bivariat dan memberikan beberapa kasus proses Poisson bivariat dengan fungsi intensitas bersyarat berupa laju yang konstan. Pada tahun 1999, [33] mengembangkan prosedur inferensi yang robust untuk model regresi dari *point process* bivariat. Kemudian pada tahun 2004, Chandrasekar dan Balakrishnan menetapkan dua sifat untuk proses Poisson bivariat yang merupakan perluasan bivariat dari sifat proses Poisson, [7]. Tahun 2021, Rosa dkk menyajikan bentuk perluasan Proses Poisson termodulasi Markov ke bentuk bivariat untuk model data kegagalan angkutan umum dengan algoritma komputasi Bayesian [49] pada tahun 2021.

1.2 Rumusan Masalah

Jika peristiwa acak yang terjadi dimodelkan sebagai *point process* univariat sementara dalam peristiwa yang diamati sesungguhnya dapat dibedakan secara jelas menjadi peristiwa A dan B maka model *point process* univariat untuk A dan B akan memiliki fungsi intensitas bersyarat masing-masing. Kedua model *point process* tersebut dapat saling bebas atau tidak saling bebas. Hal ini mendasari Cox [10], Griffiths dan Milne, [21], Ng dan Cook, [33], ataupun Yera, dkk [49] mengembangkan ke *point process* bivariat, namun bentuk bentuk fungsi intensitas bersyarat yang dikaji oleh peneliti-peneliti tersebut masih terbatas pada fungsi intensitas bersyarat berupa laju yang konstan. Oleh karena itu pada penelitian ini akan berfokus pada fungsi intensitas bersyarat dan pembentukan fungsi likelihood pada *point process* bivariat yang tidak konstan. Hal-hal yang akan dilakukan adalah:



1. Bagaimana bentuk fungsi intensitas bersyarat *point process* bivariat melalui benang untuk beberapa distribusi khusus?

2. Bagaimana konstruksi persamaan likelihood untuk model *point process*

3. Bagaimana estimasi parameter-parameter fungsi intensitas bersyarat untuk *point process* bivariate?

4. Bagaimana mengaplikasikan metode penaksiran tersebut pada *point process* bivariat yang homogen dan non-homogen untuk jumlah kasus penyakit atau kejadian gempa bumi?

1.3 Batasan Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, penelitian ini dibatasi pada:

1. *Point process* dibatasi pada dua jenis keadaan yang memenuhi proses Poisson bivariat yang saling bebas atau kedua jenis keadaan tersebut saling memengaruhi yang ditunjukkan pada bentuk fungsi intensitas bersyarat yang akan diperoleh.
2. Fungsi intensitas bersyarat untuk dua *point process*nya berada dalam ruang waktu yang sama.
3. Kasus akan disimulasikan pada proses Poisson bivariat yang homogen dan non-homogen.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan masalah yang dipaparkan pada Subbab 1.2, maka penelitian ini akan memberikan bentuk fungsi intensitas bersyarat dan metode penaksiran likelihood untuk *point process* bivariat dan secara terinci untuk

1. Memperoleh fungsi intensitas bersyarat *point process* bivariat melalui bentuk fungsi peluang untuk beberapa distribusi khusus.
2. Memperoleh persamaan likelihood model *point process* bivariat.
3. Memperoleh penaksir parameter fungsi intensitas bersyarat untuk *point process* bivariat.



odel *point process* bivariat yang homogen dan non-homogen.

elitian

kan dapat menjadi pengembangan *point process* untuk kejadian-dipisahkan menjadi dua tipe dan metode penaksiran parameter

untuk fungsi intensitasnya. Sehingga dengan pengembangan kajian *point process* univariat ke bivariat dapat memberikan manfaat bagi kemajuan pengetahuan dan menjadi referensi bagi pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini terdiri atas tiga bagian yaitu sebagai berikut:

1. Bagian awal memuat halaman judul, halaman persetujuan, abstrak dalam bahasa Indonesia dan bahasa Inggris, daftar isi, daftar tabel, daftar gambar, dan daftar lampiran.
2. Bagian utama yang terdiri dari enam bab sebagaimana uraian berikut:
 - (a) **Bab 1** merupakan pendahuluan umum yang memberikan gambaran mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, kegunaan penelitian, batasan penelitian, dan sistematika penulisan. Teori penunjang juga dimasukkan dalam bagian bab ini.
 - (b) **Bab 2** berisi topik penelitian Penaksiran Fungsi Intensitas untuk proses Poisson homogen bivariat. Model *point process*nya adalah dua *point process* homogen yang tidak independen. Kasus yang diteliti untuk model ini adalah data jumlah kasus aktif Covid-19 di Indonesia.
 - (c) **Bab 3** menjelaskan tentang topik penelitian Kerangka Statistik untuk *bivariate point process*: Intensitas Bersyarat dan Teknik Penaksiran Parameternya. Model *bivariate point process* yang dibahas dalam bagian ini adalah dua *point process* homogen yang saling bebas. Teknik penaksirannya dijustifikasi dalam dua bentuk fungsi likelihood untuk dua kasus, yaitu kasus aktif covid-19 di Indonesia dan Kejadian Gempa bumi di pulau Sulawesi.
 - (d) **Bab 4** menganalisis Topik penelitian "Konsep proses *Power law* bivariat: Intensitas bersyarat dan teknik penaksiran parameternya. Model yang dianalisis adalah model *point process* non-homogen bivariat dan menerapkannya pada kasus gempa bumi di pulau Sulawesi.
 - (e) **Bab 5** Menganalisis *Point process* bivariat melalui bentuk fungsi intensitas bersyarat dan konstruksi persamaan likelihood yang digunakan dalam parameter fungsi intensitas berdasarkan sampel yang diperoleh dari pengamatan $[0, T]$.
 Kesimpulan Umum yang berisi pokok penting dari hasil penelitian atau rekomendasi bagi pengembangan penelitian berikutnya.



1.7 Desain konseptual

1.7.1 State of the art

Cox pada tahun 1955 menyoroti kejadian kecelakaan atau kegagalan mesin yang berlangsung secara acak sebagai sebuah proses Poisson. Cox menyoroti pengujian dan pendekatan statistik yang harus dilakukan untuk memastikan kesesuaian data dengan model distribusi Poisson. Jumlah kejadiannya dalam waktu t tertentu berdistribusi Poisson dengan laju λt , [8]. Istilah titik-titik kejadian (*points*) dipopulerkan oleh Cox pada tahun 1955 dalam [9]. Cox menyatakan bahwa serangkaian kejadian acak itu dapat dipandang sebagai titik-titik dalam ruang kontinu dan tidak harus berdimensi satu. Serangkaian kejadian tersebut kemudian dianalisa uji keacakannya, komponen variansi dan korelasi antara kejadian-kejadiannya. Bentuk *point process* yang dikemukakan oleh Cox kemudian dikenal sebagai proses Cox atau model proses Poisson stokastik ganda. Pada tahun 1972, Cox dan Lewis memperluas bentuk *point process* ke *Bivariate Point Processes* (BPP) di [12]. [12] mempertimbangkan dua jenis peristiwa atau lebih yang terjadi dalam ruang waktu yang kontinu dan memberikan banyak kasus terkait BPP. Kemudian pada tahun 1977, Cox dan Isham membahas bentuk BPP yang diperoleh dari tiga buah *point process* yang saling bebas di [10]. Kemudian Cox dan Isham merangkum konsep *point process* dalam [11] pada tahun 1980.

Pembahasan model *point process* dapat ditemukan di berbagai bidang. Misalnya [18] yang menggunakan konsep *point process* dalam bidang epidemiologi untuk model *Reed-Frost* di tahun 1973. Pada tahun 1977, [44] memberikan model linier interaksi antara neuron yang diperoleh dari *point process* yang peristiwanya adalah *spike train*, serangkaian lonjakan denyut saraf. [35] pada tahun 1988 menjelaskan model ETAS untuk kejadian gempa sebagai bentuk proses Poisson yang stasioner, data yang digunakan adalah data gempa di Jepang tahun 1885 sampai dengan 1980. [37] membahas pengembangan model ETAS menjadi model *Space-Time* ETAS di tahun 2006. [29] menggunakan model Poisson nonlinier untuk mempelajari kelompok neuron membentuk ansambel fungsional pada tahun 2011. Tahun 2012, [30] mengulas pemodelan spasial epidemiologi sebagai sebuah *Point process*. Tahun 2013, [27] menguantifikasi sebaran pohon di hutan hujan tropis sebagai sebuah proses Cox dan [46] yang mengestimasi Hazard rate untuk data gempa bumi dalam model *point process* temporal. Tahun 2015, [50] juga mempelajari model *Space-time* ETAS sebagai



point process spasial-temporal. [39] di tahun 2017 mempelajari ke-IIV di kota Alicante, Spanyol dengan model *point process*. Tahun n model regresi pada fungsi intensitas dari model proses Poisson data gempa bumi di Pulau Sulawesi dalam rentang waktu 2018-

Fungsi inilah yang memberi karakter pada *point process* univariat ataupun multivariat. Fungsi intensitas bersyarat merupakan aspek penting dalam pemodelan *point process*. Jika dikaitkan dengan sampel kejadian dari sebuah *point process*, maka metode inferensi untuk parameter dalam fungsi intensitas bersyarat menjadi sangat penting untuk mampu menangani variasi model.

Penelitian-penelitian terkait dengan fungsi intensitas bersyarat untuk *point process* dan penaksirannya, misalnya dapat dilihat pada [34] di tahun 1978 yang menaksir fungsi intensitas bersyarat dengan bentuk umum $\lambda(t)$ dari proses Poisson stationer yang terurut dengan pendekatan perilaku asimptotik metode maksimum likelihood. Pada tahun 2012, [35] mendiskusikan fungsi intensitas bersyarat $\lambda(t) = \mu + \sum_{t_i < t} c(m_i)g(t - t_i)$ untuk model ETAS untuk data gempa bumi di Jepang. Penggunaan metode likelihood yang lain dibahas [20] tahun 1996 dengan metode maksimum pseudo-likelihood untuk fungsi intensitas bersyarat λ dari model *marked Gibbs point process*. [37] mengkaji kembali data gempa bumi yang fungsi intensitas bersyaratnya adalah $\lambda(t) = \mu + \sum e^{\alpha(M_j - M_c)} \nu(t - t_j)$ untuk model spasial-temporal ETAS dan menaksir parameternya menggunakan metode maksimum likelihood. Pada tahun 2010, [22] menganalisis penggunaan pembobot pada metode maksimum likelihood untuk fungsi intensitas bersyarat $\lambda(t) = \exp(Z(t)\beta)$ dari *point process* spasial dihubungkan dengan model regresi. Pada tahun 2013, Penelitian Jalilian, dkk terhadap dekomposisi varians model proses Cox untuk data pola titik lokasi pohon hutan hujan tropis [27]. Penaksiran parameter dari bentuk regresi yang dihubungkan dengan fungsi intensitas model yang digunakan oleh Jalilian, dkk adalah metode maksimum likelihood dengan fungsi likelihoodnya adalah fungsi likelihood komposit.[50] menerapkan metode maksimum likelihood terboboti melalui teknik analisis residu untuk fungsi intensitas bersyarat $\lambda(t, x, y, m)$ pada model ETAS terhadap variasi spasial karakteristik kegempaan di wilayah Jepang. Kemudian oleh Bonnet dkk tahun 2021 di [5] menggunakan metode maksimum likelihood untuk menaksir parameter fungsi intensitas $\lambda(t)$ pada proses Hawkes dan mengimplementasikan bentuk kernel eksponensial dalam fungsi likelihood untuk model.

Untuk *point process* bivariat, fungsi intensitas bersyarat dan metode penaksirannya juga telah disinggung oleh [12] dan [10]. Jika [12] menyinggung tentang fungsi intensitas bersyaratnya dari 2 *point process* marginal, maka di [10] membahas bentuk *point process* bivariat yang tidak saling bebas tetapi berasal dari tiga *point process* univariat yang saling bebas dengan fungsi intensitas bersyarat yang konstan. Cox dan Valerie di [10] mempertimbangkan model *point process* bivariat yang terbentuk dari



Kasus yang mereka teliti adalah perekaman kejadian dari tiga alat penghitung elektronik. Pencatat pertama mendata kejadian pertama dan ketiga, sedangkan pencatat kedua akan merekam kedua dan ketiga.[21] juga membahas tentang *point process* intensitasnya sebagaimana disinggung di [10]. Di paper tersebut dibahas karakteristik untuk proses Poisson bivariat dan memberikan proses Poisson bivariat dengan fungsi intensitas bersyarat berupa

laju yang konstan. Tahun 1999, [33] mengembangkan prosedur inferensi yang robust untuk model regresi yang dihubungkan dengan fungsi intensitas pada *point process* bivariat. Kemudian pada tahun 2004 [7] menetapkan dua sifat untuk fungsi intensitas proses Poisson bivariat yang merupakan perluasan bivariat dari sifat proses Poisson. Tahun 2021, Rosa, dkk di [49] menyajikan penaksiran parameter untuk bentuk perluasan Proses Poisson termodulasi Markov ke bentuk bivariat untuk model data kegagalan angkutan umum dengan algoritma komputasi Bayesian.

Fungsi intensitas bersyarat-*Conditional Intensity Function* (CIF) dari *point process* bivariat merupakan konsep penting dalam pemodelan dan analisis *point process*. CIF adalah fungsi yang menggambarkan bagaimana peluang suatu titik peristiwa terjadi pada waktu atau lokasi tertentu dan bergantung pada histori proses hingga titik peristiwa tersebut. Penelitian ini akan membentuk CIF dan konstruksi metode penaksirannya untuk *Bivariate Point Process*.

1.7.2 Point process

Permasalahan mengenai penaksiran fungsi intensitas pada *point process* bivariat menuntut pemahaman yang baik tentang *point process* itu sendiri. Penjelajarannya banyak diperoleh dalam [16] dan [15], dan menjadi sumber rujukan dari penelitian-penelitian mengenai proses ini.

Point proses univariat

Point process dalam satu dimensi adalah model yang berguna untuk waktu kejadian yang berurutan ketika peristiwa-peristiwa tertentu terjadi. [40] menyatakan bahwa waktu mempunyai karakter evolusioner: apa yang terjadi sekarang mungkin bergantung pada apa yang terjadi di masa lalu, namun tidak bergantung pada apa yang akan terjadi di masa depan. Rentetan kejadian dalam waktu yang berlangsung secara acak merupakan langkah awal untuk mendefinisikan *point process* temporal.

Kejadian di masa lalu dalam suatu *point process* ditangkap oleh konsep sejarah proses tersebut. Misalkan pengamatan pada waktu t , maka yang terjadi di masa lalu (sejarah) $\mathcal{H}_{t-}$ adalah pengetahuan tentang waktu semua peristiwa yang sebelumnya, katakanlah $(\dots, t_1, t_2, \dots, t_n)$, tidak termasuk peristiwa waktu t . $\mathcal{H}_t$ juga memuat



ia suatu peristiwa pada waktu t . Perhatikan bahwa secara teori-berlangsung jauh ke belakang dalam waktu t tetapi tidak harus perhatikan juga bahwa *point process*nya sederhana, yaitu suatu ada titik peristiwa yang bersamaan, sehingga titik-titik peristiwa kan secara ketat dalam waktu.

g waktu antar kejadian-kejadian dinyatakan sebagai waktu antar *point process* dapat didefinisikan menurut distribusi waktu an-

tar kejadian. Misalkan $f(t_{n+1}|\mathcal{H}_{t_n})$ adalah fungsi kepadatan peluang bersyarat untuk t_{n+1} waktu hingga kejadian berikutnya diketahui waktu kejadian yang lalu $(\dots, t_{n-1}, t_n)$. Fungsi kepadatan peluang bersama untuk waktu-waktu antar kejadiannya adalah

$$f(\dots, t_1, t_2, \dots) = \prod_n f(t_n | \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \prod_n f(t_n | \mathcal{H}_{t_{n-1}}).$$

Proses Hitung

Jika dilihat dari banyaknya titik kejadian dalam waktu pengamatan tertentu maka banyaknya titik dalam suatu waktu pengamatan dapat disebut sebagai sebuah proses hitung. Sebuah proses acak $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses hitung jika $N(t)$ adalah banyaknya titik kejadian yang terjadi selama waktu t [41]. Beberapa contoh proses hitung adalah:

1. Misalkan $N(t)$ adalah banyaknya penonton yang memasuki stadion sepakbola. Kejadian orang per orang memasuki stadion itu selama waktu t adalah proses hitung.
2. Kejadian bayi lahir, maka $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses hitung jika $N(t)$ adalah jumlah seluruh bayi yang lahir selama waktu t .
3. Jika $N(t)$ adalah banyaknya gol yang tercipta pada pertandingan sepakbola selama waktu t .

Untuk proses seperti itu, biasanya diasumsikan bahwa $N(0) = 0$, sehingga berawal dari saat tersebut dan peristiwa-peristiwa kemudian terjadi, $N(t)$ mengambil nilai bilangan bulat positif.

Definisi 1.7.1. *Proses stokastik $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ dikatakan proses hitung jika $N(t)$ adalah banyaknya kejadian yang terjadi dari waktu 0 sampai dengan waktu t yang memenuhi:*

1. $N(0) = 0$;



$\dots\}$, untuk semua $t \in [0, \infty)$;

2. $N(t) - N(s)$ menunjukkan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval $(s, t]$.

3. $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses hitung dan untuk $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ terjadinya kejadian sehingga $N(t_i) - N(t_{i-1})$ adalah banyaknya

peristiwa dalam selang $(t_{i-1}, t_i]$ sebagai peubah acak yang saling bebas. Banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu yang terpisah adalah saling bebas. Misalnya Peluang untuk 2 peristiwa dalam selang $(1, 2]$ dan 4 peristiwa dalam selang $(4, 8]$ saling lepas, sehingga

$$P(N(2) - N(1) = 2, N(8) - N(4) = 4) = P(N(2) - N(1) = 2)P(N(8) - N(4) = 4).$$

Definisi 1.7.2. $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses hitung dengan independent increments, kenaikan yang saling bebas jika $N(t_i) - N(t_{i-1})$ dalam selang $(t_{i-1}, t_i]$ adalah peubah acak saling bebas.

Bentuk lain untuk proses hitung adalah distribusi peluang untuk jumlah peristiwa dalam sembarang selang waktu hanya bergantung pada panjang selang waktunya. Distribusi selisih jumlah kejadian hanya bergantung pada panjang interval $(t_{n-1}, t_n]$.

Definisi 1.7.3. Misalkan $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses hitung dengan stationary increments, kenaikan yang stasioner, jika untuk semua $t_n > t_{n-1} \geq 0$ dan untuk setiap $r > 0$, maka distribusi peubah acak $N(t_n) - N(t_{n-1})$ dengan $N(t_n + r) - N(t_{n-1} + r)$ identik.

Asumsi kenaikan saling bebas ataupun kenaikan stasioner cukup beralasan untuk beberapa kasus, namun di kasus-kasus yang lain menjadi tidak relevan. Sebuah fenomena yang dapat dipandang sebagai proses hitung berarti fenomena tersebut akan dicatat dan dihitung jumlah kejadiannya dalam interval waktu tertentu atau dalam interval yang lebih umum, seperti ruang sampel atau domain lainnya. Asumsi kenaikan yang stasioner untuk fenomena tertentu bermakna bahwa perubahan dalam proses itu pada interval waktu yang berbeda-beda memiliki sifat yang seragam secara statistik. Asumsi independent increment sangat penting dalam analisis matematis proses stokastik karena memungkinkan kita untuk menggunakan alat matematis seperti probabilitas dan statistik dengan cara yang lebih sederhana dan konsisten. Penting untuk mempertimbangkan validitas asumsi *independent increment* tergantung pada fenomena yang sedang dipelajari. Beberapa proses stokastik mungkin tidak memenuhi asumsi ini karena adanya korelasi atau dependensi antara perubahan dalam interval waktu tertentu. Oleh karena itu, pemodelan yang akurat memerlukan pemahaman mendalam tentang sifat dasar dari proses stokastik yang sedang diteliti.



mogen

eroleh dari fenomena alam dan memenuhi asumsi *point process*nya dapat menggunakan pendekatan aplikasi yang berproses hitung yang terpenting dan akan banyak digunakan dalam hasan selanjutnya.

Definisi 1.7.4. Sebuah proses hitung $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson dengan laju λ , untuk λ yang positif, jika

1. $N(0) = 0$;
2. prosesnya memiliki kenaikan saling bebas;
3. banyaknya peristiwa dalam selang waktu dengan panjang t adalah berdistribusi Poisson dengan mean λt , untuk semua $s, t \geq 0$ berlaku

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Misalkan $N(t)$ adalah proses Poisson dengan laju λ . Pertimbangkan sebuah selang waktu Δ yang sangat pendek, $\Delta \rightarrow 0$. Maka banyaknya kedatangan pada selang waktu tersebut berdistribusi Poisson dengan mean $\lambda\Delta$. Peluang $N(\Delta) = 0$ secara khusus dapat dinyatakan dalam deret Taylor:

$$P(N(\Delta) = 0) = e^{-\lambda\Delta} = 1 - \lambda\Delta + \frac{\lambda^2}{2}\Delta^2 - \dots \quad (1.2)$$

Selang waktu yang pendek, $\Delta \rightarrow 0$ akan memberikan informasi bahwa suku-suku yang berpangkat 2 atau lebih tinggi dapat diabaikan seluruhnya, dan dinyatakan sebagai fungsi nol, $o(\Delta)$, lihat [41] dan dapat diabaikan.

$$P(N(\Delta) = 0) = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta) \quad (1.3)$$

Peluang munculnya satu peristiwa dalam selang waktu Δ adalah

$$P(N(\Delta) = 1) = \lambda\Delta + o(\Delta) \quad (1.4)$$

Demikian pula, untuk munculnya lebih dari satu peristiwa

$$P(N(\Delta) \geq 2) = o(\Delta). \quad (1.5)$$

Persamaan 1.3, 1.4, dan 1.5 memberikan bentuk definisi lain untuk proses Poisson.

Definisi 1.7.5. Jika Proses hitung $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson dengan laju λ , jika



memiliki kenaikan saling bebas dan stasioner;

$$P(N(\Delta) = 1) = \lambda\Delta + o(\Delta);$$

$$P(N(\Delta) \geq 2) = o(\Delta).$$

Proses Poisson pada Definisi 1.7.4 dan Definisi 1.7.5 adalah ekuivalen. Sebagai proses hitung dengan kenaikan yang stasioner maka proses Poisson yang didefinisikan pada Definisi 1.7.4 disebut juga proses Poisson homogen dan merupakan sebuah *point process* dengan fungsi intensitas bersyarat berupa *rate* atau laju λ yang konstan. Misalkan $N(a_i, b_i]$ menyatakan banyaknya kejadian dalam selang $(a_i, b_i]$, dengan $a_i < b_i \leq a_{i+1}$, maka

$$P(N(a_i, b_i] = n_i, i = 1, 2, 3, \dots, k) = \prod_{i=1}^k \frac{[\lambda(b_i - a_i)]^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(b_i - a_i)}. \quad (1.6)$$

Syarat yang harus dipenuhi oleh model peluang pada Persamaan 1.6 adalah:

1. Banyaknya titik dalam selang waktu $(a_i, b_i]$ adalah peubah acak terdistribusi Poisson.
2. Banyaknya titik dalam selang yang saling lepas adalah saling bebas.
3. Distribusinya stasioner dan hanya bergantung pada panjang setiap selang.

Proses Poisson adalah salah satu *point process* yang paling banyak digunakan dan dibahas. Biasanya digunakan dalam konteks menghitung kemunculan peristiwa tertentu secara acak tapi terjadi pada laju tertentu. Misalkan data historis di sebuah provinsi memberikan informasi bahwa gempa bumi terjadi tiga kali dan waktunya acak. Maka dapat ditarik kesimpulan bahwa model gempa bumi ini dapat didekati dengan pendekatan proses Poisson. Faktanya, telah banyak penelitian mengenai gempa bumi ini sebagai sebuah model perluasan proses Poisson seperti dalam [47], [35], [36] dan masih banyak yang lainnya. Bahkan pendekatan proses Poisson pun merambah ke banyak bidang lainnya.

Proses Poisson Non-homogen

Proses Poisson yang tidak homogen ditandai dari kenaikannya yang tidak stasioner. Sifat yang tidak stasioner berarti fungsi intensitas bersyaratnya bukan lagi laju λ yang konstan, tetapi merupakan fungsi terhadap waktu t .



Sebuah proses acak $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson non-homogenitas $\lambda(t), t \geq 0$, jika

mengalami kenaikan yang saling bebas;

$$N(t) = 1) = \lambda(t)\Delta + o(\Delta);$$

$$4. P(N(t + \Delta) - N(t) \geq 2) = o(\Delta).$$

Proses Poisson non-homogen ini bisa saja diperoleh dari pengambilan sampel terhadap waktu dari sebuah model yang telah diketahui sebelumnya adalah proses Poisson homogen. Misalkan $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses Poisson homogen dengan laju λ . Misalkan sebuah peristiwa yang terjadi pada waktu t bebas terhadap kejadian sebelum t dengan peluang $p(t)$. Jika $N_c(t)$ menyatakan jumlah kejadian pada waktu t , maka proses $\{N_c(t), t \geq 0\}$ adalah proses Poisson non-homogen dengan fungsi intensitas $\lambda(t) = \lambda p(t)$.

Fungsi intensitas bersyarat

Hal yang pertama dilakukan adalah menentukan distribusi waktu antara peristiwa yang satu dengan peristiwa lainnya. Kemudian memformulasikan kembali distribusi tersebut dalam bentuk fungsi intensitas bersyarat. Fungsi intensitas bersyarat ini adalah fungsi terhadap selang waktu antar kejadian yang memengaruhi fungsi kepadatan peluang sebuah *point process*. Misalkan $f(t_{n+1}|\mathcal{H}_{t_n})$ adalah fungsi kepadatan bersyarat waktu untuk kejadian berikutnya t_{n+1} diketahui $\mathcal{H}_{t_n}$ adalah histori waktu kejadian-kejadian sebelumnya $(\dots, t_{n-1}, t_n)$, lihat di [16]. Bentuk fungsi kepadatan $f(t_n|\dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ dapat menentukan distribusi semua waktu antar kejadiannya,

$$f(\dots, t_1, t_2, \dots) = \prod_n f(t_n|\dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \prod_n f(t_n|H_{t_{n-1}}). \quad (1.7)$$

Fungsi intensitas bersyarat secara intuisi dapat menentukan bagaimana keadaan sekarang bergantung dengan keadaan waktu lampau untuk sebuah *point process*. Misalkan fungsi peluang bersyarat $f(t|\mathcal{H}_{t_n})$ dan $F(t|\mathcal{H}_{t_n})$ merupakan fungsi peluang kumulatif untuk sembarang $t > t_n$. Maka fungsi intensitas bersyarat menurut [16] didefinisikan oleh:

$$\lambda^*(t) = \frac{f(t|H_{t_n})}{1 - F(t_n|H_{t_n})} \quad (1.8)$$

Hubungan yang menarik antara fungsi intensitas bersyarat ini dengan banyaknya kejadian dalam selang waktu T , $N(T)$ diperoleh melalui perkalian fungsi intensitas dengan interval waktu pengamatan yang sangat kecil $dt \rightarrow 0$ dengan persamaan:

$$\lambda^*(t)dt = E[N(t, t + dt)|H_t-]. \quad (1.9)$$



$x_1, x_2, \dots, x_n$) adalah realisasi dari proses di himpunan bagian $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$. Fungsi peluang gabungan untuk setiap $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ di $\mathcal{X}$. Bentuk perkalian peluang gabungan dapat dipandang sebagai fungsi terhadap parameter dan bukan fungsi terhadap $x_1, x_2, \dots, x_n$.

(WHO, 2020). Target penanggulangan dengue-nya dengan cara menurunkan angka kematian (*Case Fatality Rate* atau CFR) dari 0,80% pada tahun 2020 menjadi 0% untuk tahun 2030 (WHO, 2020). Target tersebut dicapai melalui tiga aksi penting, meliputi mengembangkan vaksin sebagai tindakan pencegahan untuk populasi berisiko, meningkatkan efektivitas strategi pengendalian vektor berbasis bukti ilmiah dan berkolaborasi dengan sektor lingkungan untuk menurunkan habitat nyamuk (WHO, 2020).

Dalam rangka menuju nol kematian akibat dengue di tahun 2030 (zero dengue death 2030), telah ditetapkan target indikator dalam Rencana Strategis (Renstra) Kementerian Kesehatan 2020-2024, yaitu 95% kabupaten/kota dengan incidence rate (IR) DBD $\leq 10/100.000$ penduduk pada tahun 2024. Laporan Kementerian Kesehatan, provinsi dengan jumlah kasus DBD terbanyak adalah Jawa Barat sebesar 32.761 kasus, kemudian menyusul DKI Jakarta, 9.156 kasus dan Jawa Timur dengan 9.150 kasus. Laporan pada 1 Maret 2024, terdapat 124 kematian karena insidensi dengue ini dari 16.000 kasus di seluruh Indonesia. Hal yang dikhawatirkan adalah kondisi ini bisa memburuk seiring dengan datangnya musim penghujan setelah el-nino.

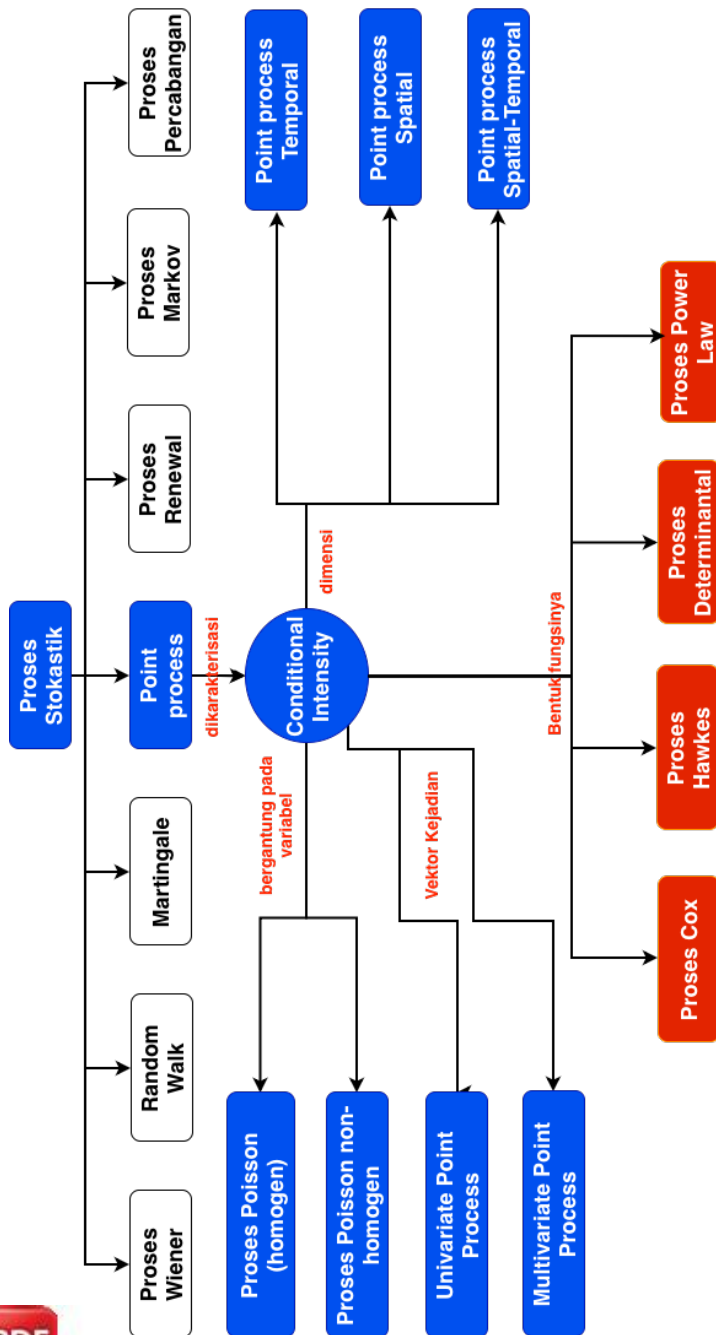
1.7.4 Kerangka Konseptual

Point process merupakan bagian dalam proses stokastik yang berfokus pada pemodelan kejadian acak yang muncul dalam titik kejadian, baik dalam domain waktu, ruang, ataupun kombinasi keduanya. Pada level dasar, klasifikasi dimulai dari proses Poisson baik homogen maupun non-homogen, yang diasumsikan memiliki kejadian yang saling bebas tanpa pengaruh terhadap kejadian berikutnya.

Perkembangan penelitian menunjukkan bahwa model Poisson tidak lagi memadai untuk mendeskripsikan fenomena nyata seperti penyebaran penyakit, kejadian gempa beruntun, interaksi ekologis, maupun peristiwa-peristiwa sosial. Oleh karena itu, konsep modern menempatkan *textit{conditional intensity}* (intensitas bersyarat) $\lambda(t|\mathcal{H}_t)$ sebagai karakterisasi utama model *point process*, yaitu tingkat kecenderungan terjadinya kejadian baru dengan mempertimbangkan sejarah kejadian sebelumnya serta variabel lingkungan yang relevan.



n acak tidak berdiri sendiri, tetapi dapat memengaruhi atau dipengaruhi lainnya. Sehingga konsep intensitas bersyarat univariat berkem-
($\lambda_i(t)$) untuk $i = 1, 2$. Intensitas bersyarat tipe 1 dapat dipengaruhi
tipe 1 (*self exciting*), sejarah kejadian tipe 2 (*cross exciting*) atau



Gambar 1.1. Kerangka konseptual



pendekatan intensitas bersyarat, bermunculan keluarga model proses. Proses Cox menjelaskan intensitas kejadian yang bergantung. Proses Hawkes merepresentasikan mekanisme *self-exciting*.

Proses Determinantal menggambarkan fenomena *self-inhibiting*. Proses Power law menangkap fenomena memori panjang dan pelemahan pengaruh kejadian beransur melambat. Dengan demikian kerangka konsep ini menunjukkan model berbasis intensitas bersyarat yang mampu memahami ketergantungan, pemicu, maupun inhibisi antar kejadian, serta menjadi landasan bagi pengembangan model dengan pendekatan kecerdasan buatan.



BAB 2

TOPIK PENELITIAN I PENAKSIRAN FUNGSI INTENSITAS PROSES POISSON HOMOGEN BIVARIAT

2.1 Abstrak

Distribusi titik-titik acak dalam ruang atau waktu disebut sebagai point proses. Jika titik-titik acak tersebut dibagi menjadi dua kelompok proses, maka masing-masing proses memiliki fungsi intensitasnya masing-masing dan bisa terjadi sebaran antara dua proses itu saling memengaruhi. Dua proses ini disebut point proses bivariat. Karakter dari point proses bivariat ini akan ditentukan oleh tiga bentuk fungsi intensitas bersyarat. Untuk penelitian awal, model point proses yang digunakan adalah proses Poisson homogen bivariat. Ketiga fungsi dari model intensitas tersebut selanjutnya akan diestimasi menggunakan metode penaksir maksimum likelihood dan diterapkan pada data jumlah penambahan pasien sakit, sembuh, dan meninggal akibat Covid-19 pra dan pasca vaksinasi di Indonesia.

Keywords: Point proses, rate, fungsi intensitas bersyarat, distribusi peluang bivariat, proses Poisson homogen.

2.2 Pendahuluan



Optimized using
trial version
www.balesio.com

Dalam berbagai bidang ilmu, pemodelan kejadian yang terjadi secara acak menjadi topik yang penting untuk dikaji. Pemahaman terhadap kapan waktu terjadinya peristiwa dapat memberikan informasi yang sangat penting dalam pengambilan keputusan. Oleh karena itu, diperlukan suatu model yang mampu merepresentasikan kejadian diskrit dalam ruang waktu yang fleksibel. Salah satu pendekatan yang digunakan adalah proses Poisson homogen. Banyak fenomena

nyata yang dapat diekspresikan sebagai pola titik temporal. Kedatangan konsumen di sebuah bank, kelahiran bayi di rumah sakit, kejadian gempa bumi, sebaran penyakit selama masa pandemi, dan lain sebagainya. Setiap peristiwa terjadi secara acak dan tidak diketahui dengan pasti berapa banyak kejadian yang terjadi ataupun waktu-waktu tepat dari terjadinya peristiwa tersebut. Pola titik yang seperti ini kemudian akan dimodelkan menggunakan suatu pendekatan yang mampu menangani mekanisme kompleks tersebut. Model untuk memprediksi pola titik acak ini selanjutnya dikenal sebagai model *point process*.

Model *point process* dalam tiga dekade terakhir telah banyak digunakan dalam penelitian di bidang epidemiologi, [18], biologi, [29], ilmu lingkungan, [14], [39], dan geosains, [47], [35] dan dikembangkan tidak hanya sebagai distribusi titik dalam waktu tetapi juga sebagai distribusi titik dalam ruang (spasial), [36], [37],[43], [32], [13], dan [19]. Untuk mengekspresikan penyebaran titik seperti yang dirangkum oleh Daley dan Jones pada tahun 2003 dalam bukunya [16] dan [15], model *point process* ditentukan oleh fungsi intensitas yang tergantung pada ruang dan waktu. Dalam proses titik, fungsi intensitas menyatakan laju terjadinya peristiwa yang dapat bergantung pada ruang dan waktu. Bentuk fungsi intensitas inilah yang dimodelkan dan parameternya diestimasi, seperti yang dilakukan oleh Hawkes di [23], [24], atau Ogata di [34], Puri dan Tuan di [38], Goulard et al di [20], Ng Edwards dan Cook di [33], Guan dan Shen di [22] tahun 2010, Sunusi et al di [46], dan Zhuang [50].

Perluasan model *point process* untuk dua peristiwa atau peristiwa disebut *point process* bivariat. Jika peristiwa yang diharapkan terjadi dapat dibagi menjadi dua, peristiwa A dan Peristiwa B, maka peristiwa A dan B merupakan dua *point process* dengan fungsi intensitasnya masing-masing. Jika kedua peristiwa tersebut saling independen, maka dapat dipelajari sebagai 2 titik proses yang terpisah.

Hal yang menarik akan muncul ketika peristiwa tipe A memengaruhi peristiwa tipe B atau sebaliknya. Studi awal tentang *point process* bivariat dapat dilihat dalam sebuah artikel [10] yang mempertimbangkan model *point process* bivariat yang terbentuk dari tiga proses Poisson yang saling bebas. Cox dan Isham menganalisis rekaman peristiwa dari tiga proses Poisson dalam dua penghitung elektronik. Penghitung pertama akan merekam peristiwa dari proses Poisson pertama dan ketiga, sedangkan penghitung kedua akan mencatat peristiwa dari proses Poisson kedua dan ketiga. Artikel [21] membahas tentang bentuk karakterisasi kelas distribusi bivariat untuk proses Poisson bivariat dan beberapa contoh proses Poisson bivariat.

Lakshmi dan Rao dalam [26] menganalisis bentuk peluang bersama dari bentuk Poisson bivariat sebagai proses Poisson namun hanya berupa distribusi Poisson. Pada tahun 2021, Biduanga et al di [4] mengemukakan bentuk distribusi Poisson bivariat yang dalam kondisi tertentu akan konvergen dalam distribusi ke bentuk estimasi parameter bentuk Poisson bivariat dapat ditemukan. Artikel ini membahas tentang bentuk perluasan Proses Poisson termodulasi untuk model data kegagalan transportasi umum dengan aljabar Bayes. Kemudian pada tahun 2022, Indranil di [25] membahas



tentang distribusi Poisson bivariat yang bentuk peluang bersyaratnya adalah distribusi Poisson, tetapi marjinalnya bukan distribusi Poisson. Untuk alasan ini, peneliti tertarik untuk melihat bentuk estimasi parameter Poisson dari proses Poisson bivariat jika parameter proses dinyatakan sebagai fungsi intensitas dari waktu.

2.3 Material dan Metode Penelitian

Proses Poisson Homogen bivariat

[16] menyimpulkan bahwa sebuah *point proses* bivariat (BPP) dapat direpresentasikan sebagai sebuah proses dalam ruang hasil kali luar $T \times \{1, 2\}$, di mana T menyatakan ruang waktu dan himpunan $\{1, 2\}$ adalah himpunan indeks 1 dan 2 yang mengindikasikan ada dua komponen kejadian dalam proses. Bentuk yang paling sederhana untuk BPP adalah dua peristiwa yang merupakan kejadian proses Poisson yang saling bebas. Misalkan $N_1(a_i, b_i]$ dan $N_2(a_i, b_i]$ adalah banyaknya kejadian dari proses dalam selang $(a_i, b_i]$ dengan $a_i < b_i \leq a_{i+1}$ sehingga $P(N_1(a_i, b_i] = n_{1i}, N_2(a_i, b_i] = n_{2i}, i = 1, 2, \dots, k)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\prod_{i=1}^k \frac{[\lambda_1(a_i, b_i)]^{n_{1i}} [\lambda_2(a_i, b_i)]^{n_{2i}}}{n_{1i}! n_{2i}!} e^{-(\lambda_1(a_i, b_i) + \lambda_2(a_i, b_i))}. \quad (2.1)$$

Bentuk peluang di Persamaan 2.1 memiliki 3 sifat:

1. Banyaknya titik pada setiap selang hingga, $(a_i, b_i]$ adalah peubah acak yang berdistribusi Poisson.
2. Banyaknya titik dalam sebuah selang dengan selang yang lain merupakan peubah acak yang saling bebas.
3. Distribusi peluangnya stasioner dalam artian hanya bergantung pada panjang selangnya $b_i - a_i$.

Misalkan ditinjau dalam selang yang panjang selangnya adalah $\tau = \min \{\tau_1, \tau_2\}$, maka dari persamaan 1 diperoleh

$$P(N_1(0, \tau] = 0, N_2(0, \tau]) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau}. \quad (2.2)$$



naan 2.2 menyatakan nilai kemungkinan bahwa selang waktu dahingga peristiwa pertama terjadi akan memiliki waktu yang lebih in kata lain, peluang tersebut hanya merupakan nilai dari fungsi (*al function*) selama selang dengan panjang τ . Oleh karena itu, unjukkan bahwa interval waktu yang dipertimbangkan tersebut

memiliki distribusi eksponensial. Karena sifat stasionernya, hasil yang sama berlaku untuk selang mulai dari titik waktu kejadian pertama hingga waktu sebelum kejadian titik kedua, yang mungkin saja panjang selangnya berbeda.

Misalkan ada N observasi dalam waktu pengamatan $(0, T]$ dengan titik-titik waktu dari peristiwa yang terjadi adalah $t_1, t_2, \dots, t_N$, dan misalkan untuk N observasi terdapat N_1 observasi untuk kejadian A dan N_2 observasi untuk kejadian B sehingga $N = N_1 + N_2$. Peluang terdapat satu kejadian dalam $(t_i, t_i + \Delta]$ dan tak ada kejadian pada sisa waktu yang lain dalam waktu pengamatan $(0, T]$,

$$e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T} \lambda_1^{N_1} \lambda_2^{N_2} \Delta^N. \quad (2.3)$$

Misalkan $\Delta \rightarrow 0$ dan Persamaan 2.3 dikali dengan $1/\Delta^N$ maka bentuk fungsi likelihood yang diperlukan untuk waktu pengamatan $(0, T]$ adalah

$$L(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2, \dots, t_N) = \lambda_1^{N_1} \lambda_2^{N_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T}. \quad (2.4)$$

Proses Poisson homogen bivariat tidak saling bebas

Bentuk proses Poisson bivariat yang tidak saling bebas awalnya terbentuk dari tiga proses Poisson homogen. Misalkan $\{X_i(t); t > 0, i = 1, 2, 3\}$ adalah proses Poisson dengan parameter laju adalah $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ dan saling bebas. Maka bentuk $N_1 = X_1(t) + X_3(t)$ dan $N_2(t) = X_2(t) + X_3(t)$ merupakan proses Poisson homogen dengan laju masing-masing adalah $\lambda_1 + \lambda_3$ dan $\lambda_2 + \lambda_3$. Transformasi linier berikut digunakan untuk mendapatkan fungsi peluang bersama dari N_1 dan N_2 sebagai bentuk fungsi peluang marginal yang diperoleh dari fungsi peluang bersama dari X_1, X_2 , dan X_3 .

$$\begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix}.$$

Maka transformasi balikkannya adalah

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}.$$



nya fungsi peluang bersama $X_1(t), X_2(t)$, dan $X_3(t)$ yang saling

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{(\lambda_1 t)^{x_1} (\lambda_2 t)^{x_2} (\lambda_3 t)^{x_3}}{x_1! x_2! x_3!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}. \quad (2.5)$$

dan $X_1(t) = N_1(t) - N_3(t)$, $X_2(t) = N_2(t) - N_3(t)$, dan $X_3(t) = N_3(t)$, maka fungsi peluang bersama dari $N_1(t), N_2(t)$, dan $N_3(t)$ diperoleh dari Persama-

an 2.5 dikali dengan determinan jacobian dari matriks transformasi balikan, $\det(J) = 1$ dan diperoleh

$$g(n_1, n_2, n_3) = f(x_1, x_2, x_3)|J| = \frac{(\lambda_1 t)^{n_1-n_3} (\lambda_2 t)^{n_2-n_3} (\lambda_3 t)^{n_3}}{(n_1 - n_3)! (n_2 - n_3)! n_3!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}. \quad (2.6)$$

Fungsi peluang bersama $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ diperoleh sebagai bentuk marginal dari Persamaan 2.6 terhadap $N_3(t)$, yaitu

$$\begin{aligned} g(n_1, n_2) &= \sum_{k=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{(\lambda_1 t)^{n_1-k} (\lambda_2 t)^{n_2-k} (\lambda_3 t)^k}{(n_1 - k)! (n_2 - k)! k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \\ &= (\lambda_1 t)^{n_1} (\lambda_2 t)^{n_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \sum_{k=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{(\lambda_1 t)^{-k} (\lambda_2 t)^{-k} (\lambda_3 t)^k}{(n_1 - k)! (n_2 - k)! k!} \\ &= \frac{(\lambda_1 t)^{n_1}}{n_1!} \frac{(\lambda_2 t)^{n_2}}{n_2!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \sum_{k=0}^{\min\{n_1, n_2\}} n_3! \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{k} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 t} \right)^k. \end{aligned}$$

Parameter λ_1 dan λ_2 mengatur intensitas proses pada masing-masing peubah acak $N_1(t)$ dan $N_2(t)$. Sedangkan parameter λ_3 menunjukkan intensitas bersama untuk $N_1(t)$ dan $N_2(t)$. Misalkan

$$\sum_{k=0}^{\min\{n_1, n_2\}} k! \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{k} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 t} \right)^k = h(n_1, n_2, \lambda_3),$$

maka bentuk fungsi peluang dari proses Poisson bivariat untuk $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ adalah

$$g(n_1, n_2) = h(n_1, n_2, \lambda_3) \frac{(\lambda_1 t)^{n_1}}{n_1!} \frac{(\lambda_2 t)^{n_2}}{n_2!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}. \quad (2.7)$$

Misalkan dalam selang pengamatan $(0, T]$ dibagi menjadi subselang pengamatan, $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{n-1}, t_n]$ dengan masing-masing subselang hanya 1 kejadian yang teramati, dan selang $(t_n, T]$ tak ada kejadian baik dari proses 1 atau 2. Maka menurut Persamaan 2.7, peluang ada satu kejadian hanya dari proses Poisson pertama dalam selang $(t_{i-1}, t_i]$ adalah

$$g(1, 0) = \lambda_1 \Delta e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\Delta}.$$

Peluang satu kejadian hanya proses Poisson kedua dalam selang $(t_{i-1}, t_i]$ adalah

$$g(0, 1) = \lambda_2 \Delta e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\Delta}.$$



Sedangkan untuk kemungkinan satu kejadian itu adalah proses Poisson 1 atau proses Poisson kedua, maka peluangnya adalah

$$\begin{aligned} g(1, 1) &= \lambda_1 \lambda_2 \Delta^2 \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \Delta} \right) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \Delta} \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 \Delta^2 + \lambda_3 \Delta) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \Delta}. \end{aligned}$$

Peluang tak ada kejadian lain di sisa subselang $(t_{i-1}, t_i - \Delta]$ adalah

$$g(0, 0) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(t_i - \Delta - t_{i-1})}.$$

Peluang kejadian berasal dari proses Poisson pertama dalam selang $(t_{i-1}, t_i]$ adalah

$$P_{(t_{i-1}, t_i]}(1, 0) = \lambda_1 \Delta e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(t_i - t_{i-1})}.$$

Peluang kejadian berasal dari proses Poisson pertama dalam selang $(t_{i-1}, t_i]$ adalah

$$P_{(t_{i-1}, t_i]}(0, 1) = \lambda_2 \Delta e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(t_i - t_{i-1})}.$$

Peluang kejadian berasal dari kedua proses dalam selang $(t_{i-1}, t_i]$ adalah

$$P_{(t_{i-1}, t_i]}(1, 1) = (\lambda_1 \lambda_2 \Delta^2 + \lambda_3 \Delta) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(t_i - t_{i-1})}.$$

Jika terdapat m kejadian untuk proses pertama saja, dan k kejadian untuk proses kedua saja dan $l = n - m - k$ untuk kedua proses. Maka peluangnya adalah:

$$\begin{aligned} P_{(0, T]}(m + l, k + l) &= (P_{(t_{i-1}, t_i]}(1, 0))^m (P_{(t_{i-1}, t_i]}(0, 1))^k (P_{(t_{i-1}, t_i]}(1, 1))^l \\ &= (\lambda_1)^m (\lambda_2)^k (\lambda_1 \lambda_2 \Delta + \lambda_3)^l \Delta^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)T}. \end{aligned}$$

Bentuk fungsi likelihood untuk proses Poisson Bivariat ini dapat diperoleh dari bentuk peluang di atas dibagi dengan Δ^n . Kemudian dengan mempertimbangkan bahwa $\Delta \rightarrow 0$ maka diperoleh

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1)^m (\lambda_2)^k (\lambda_3)^l e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)T}. \quad (2.8)$$

Estimasi parameter untuk proses Poisson bivariat



Metode di Persamaan 2.8 untuk proses Poisson bivariat kemudian untuk mengestimasi parameter dengan menggunakan metode maksimum likelihood dari Persamaan 2.8 adalah:

$$\begin{aligned} \ln l &= \ln \left((\lambda_1)^m (\lambda_2)^k (\lambda_3)^l e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)T} \right) \\ &= \ln (\lambda_1)^m + \ln (\lambda_2)^k + \ln (\lambda_3)^l + \ln \left(e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)T} \right). \end{aligned}$$

Maka untuk waktu pengamatan $(0, T]$, persamaan loglikelihood dari proses Poisson bivariat

$$\ln L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; m, n, l) = m \ln \lambda_1 + k \ln \lambda_2 + l \ln \lambda_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)T. \quad (2.9)$$

Turunan fungsi pada Persamaan 2.9 terhadap parameter λ_1 , λ_2 dan λ_3 yang sama dengan nol berturut-turut adalah

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; m, n, l)}{\partial \lambda_1} = \frac{m}{\lambda_1} - T \\ 0 &= \frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; m, n, l)}{\partial \lambda_2} = \frac{k}{\lambda_2} - T \\ 0 &= \frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; m, n, l)}{\partial \lambda_3} = \frac{l}{\lambda_3} - T. \end{aligned}$$

Penaksir parameter untuk λ_1 , λ_2 , dan λ_3 untuk Persamaan 2.6 berdasarkan bentuk logaritma likelihood pada Persamaan 2.8 adalah

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{m}{T} \quad (2.10)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{k}{T} \quad (2.11)$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{l}{T}. \quad (2.12)$$

2.4 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, model proses Poisson bivariat yang telah dijelaskan akan diterapkan pada dua bagian. Bagian pertama adalah simulasi dengan membangkitkan data sintetis untuk menggambarkan dinamika jumlah peristiwa 1 dan jumlah peristiwa 2 dari model proses Poisson bivariat. Bagian kedua adalah menerapkan model melalui data kasus penyebaran penyakit yang diasumsikan memenuhi model proses Poisson bivariat. Pendekatan ini dapat menunjukkan keakuratan model dalam konteks aplikasi di dunia nyata.

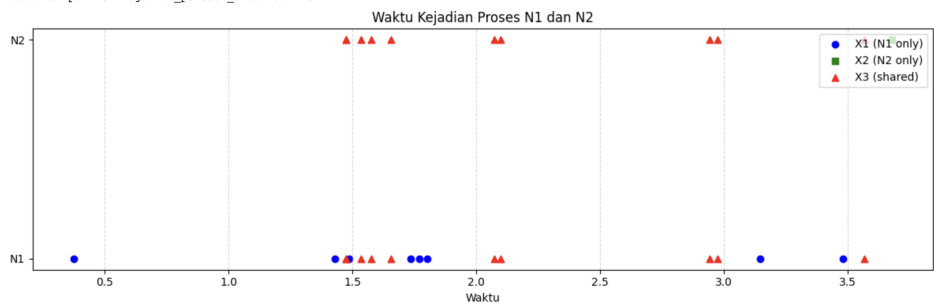
Simulasi proses Poisson bivariat



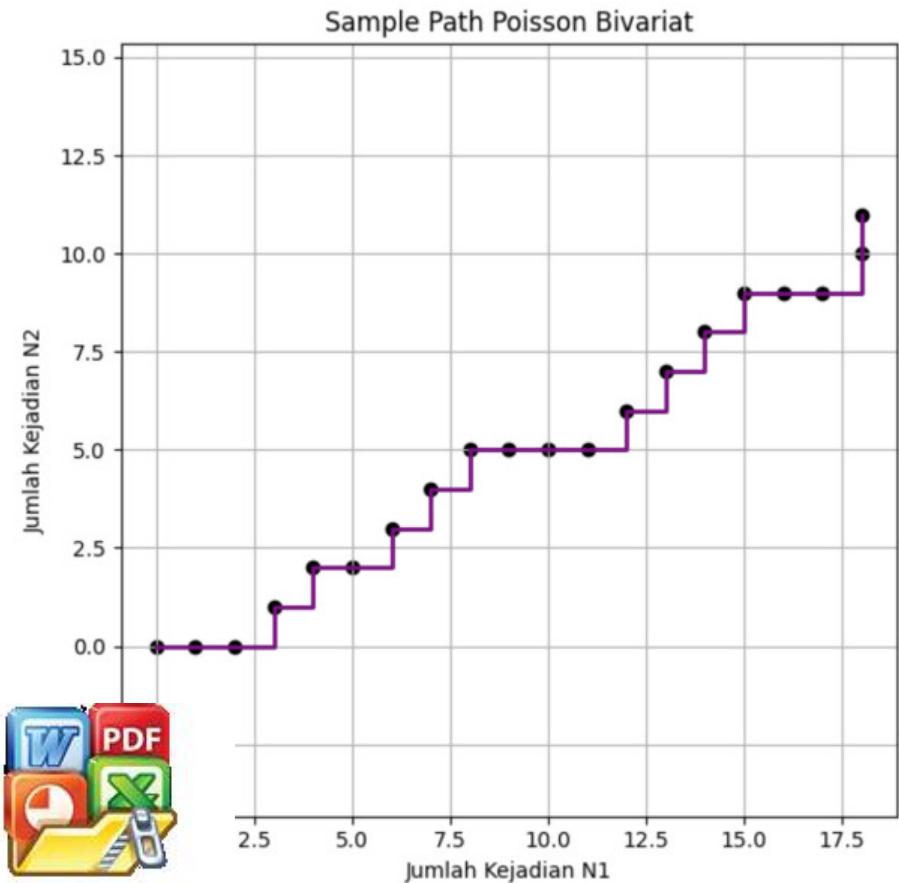
Optimized using
trial version
www.balesio.com

ukkan bahwa metode ini dapat dijalankan dengan baik, maka da-
proses Poisson bivariat dengan parameter $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dan
i pengamatan dilakukan untuk selang waktu pengamatan yang
panjang untuk menunjukkan kekonsistenan hasil penaksiran pa-
an metode maksimum likelihood. Gambar 2.1 menunjukan dua
adian proses Poisson $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ yang diperoleh dari simu-

lasi proses Poisson bivariat pada Lampiran A.



Gambar 2.1. Hasil simulasi untuk 2 jenis Proses Poisson dengan tiga parameter laju, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, untuk waktu pengamatan $(0, 4]$.



2.2. Jalur sampel untuk simulasi proses Poisson bivariat

Gambar 2.1 menunjukkan waktu setiap kejadian dari dua proses Poisson $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ selama selang waktu $(0, 4]$. Garis horizontal mewakili waktu. Setiap titik menandakan waktu terjadinya suatu kejadian pada proses. Titik biru hanya pada garis waktu untuk proses $\{N_1(t), t \geq 0\}$. Kejadian titik hijau hanya pada garis waktu proses $\{N_2(t), t \geq 0\}$. Sedangkan titik merah menandakan kejadian bersama yang meningkatkan jumlah kejadian pada kedua proses secara bersamaan. Untuk melihat lintasan sampel dari proses Poisson bivariat, maka data waktu-waktu terjadinya pada Gambar 2.1 direalisasikan dalam jalur sampelnya pada Gambar 2.2. Jalur sampel pada Gambar 2.2 menunjukkan trayektori kumulatif dari jumlah kejadian $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ selama waktu simulasi $(0, 4]$. Sumbu X mewakili jumlah kejadian kumulatif $N_1(t)$ sampai waktu t dan Sumbu Y menyatakan jumlah kejadian kumulatif $N_2(t)$ sampai waktu t .

Setiap titik pada Gambar 2.2 menunjukkan keadaan jumlah kejadian setelah satu peristiwa terjadi. Jalur bertingkat-tingkat seperti tangga karena setiap kejadian meningkatkan nilai N_1 , N_2 , atau keduanya secara diskrit. Langkah mendatar menunjukkan kejadian yang hanya menambah jumlah di proses N_1 . Langkah tegak menunjukkan kejadian yang hanya menambah jumlah proses N_2 . Langkah diagonal (menanjak ke atas) menunjukkan kejadian bersama yang menambah jumlah kejadian pada kedua proses secara bersamaan.

Jika selang pengamatan makin diperpanjang, misalkan dalam penelitian ini dilakukan untuk $T = 4, 10, 20, 50, 100$ dan 1000 , diperoleh penaksiran parameternya di Tabel 2.1. Perpanjangan selang waktu pengamatan diharapkan dapat memberikan informasi yang lebih kompak mengenai karakteristik proses yang diamati.

Realisasi yang diperoleh dari simulasi adalah realisasi yang acak. Satu data realisasi waktu-waktu kejadian yang diperoleh selanjutnya akan digunakan untuk menaksir nilai parameter model proses Poisson bivariat menggunakan metode maksimum likelihood yang menghasilkan persamaan 2.10, 2.11 dan 2.12 diperoleh

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= \frac{m}{T} = \frac{8}{4} = 2 \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{k}{T} = \frac{1}{4} = 0,25 \\ \hat{\lambda}_3 &= \frac{l}{T} = \frac{10}{4} = 2,5\end{aligned}$$

Tabel 2.1. Hasil simulasi penaksiran parameter Proses Poisson Bivariat Homogen untuk $T = 4, 10, 20, 50, 100$ dan 1000



	m	k	l	λ_1	λ_2	λ_3
	9	5	19	2,25	1,25	4,75
	16	11	32	1,6	1,1	3,2
	28	26	48	1,4	1,3	2,4
	114	47	139	2,28	0,94	2,78
	171	92	302	1,71	0,92	3,02
0	2073	961	3017	2,073	0,961	3,017
narnya				2	1	3

Tabel 2.1 menunjukkan nilai penaksiran parameternya makin mendekati nilai parameter sebenarnya jika waktu pengamatan makin panjang. Semakin panjang waktu pengamatan maka semakin banyak pula data pengamatan. Penaksir parameter akan konsisten mendekati nilai sebenarnya. Nilai rata-rata kuadrat galat dari masing-masing parameter dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2. Nilai rata-rata kuadrat galat untuk masing-masing penaksir untuk $T = 4, 10, 20, 50, 100$ dan 1000

T	MSE_{λ_1}	MSE_{λ_2}	MSE_{λ_3}
4	0	0,5625	0,25
10	0,64	0,01	0
20	0,04	0,09	0,09
50	0,2304	0,01	0,0016
100	0,0361	0,0009	0,0289
1000	0,000016	0,000121	0,0064

Tabel 2.2 menunjukkan bahwa untuk waktu pengamatan yang kecil, variabilitas sangat tinggi, apalagi dengan nilai parameter yang kecil. Ketika T sedikit diperpanjang, maka akurasi penaksiran parameter makin meningkat, walaupun nilai penaksiran parameter masih terlihat ada yang belum tepat ke nilai parameter sesungguhnya, ini ditunjukkan pada saat $T=20$ atau bahkan $T=50$. Namun ketika $T=100$ atau bahkan $T=1000$, konsistensi penaksir makin terlihat, semua penaksir parameter makin mendekati nilai sebenarnya dengan eror makin kecil.

Studi kasus pada Data covid-19 di Indonesia

Untuk penggunaan model proses Poisson bivariat ini pada data kasus aktif covid-19. Jumlah pasien sembuh, sakit, atau meninggal dalam masa pandemi. yang menjadi sembuh atau meninggal, akan dibandingkan laju parameter sembuh, laju parameter sakit dan laju parameter meninggal untuk kasus aktif yang tercatat menjadi dua periode. Periode pertama adalah sejak ditemukannya 2 penderita covid-19 di Indonesia pada tanggal 2 Maret 2020 hingga tuntasnya pemberian vaksin tahap 4



2. Periode kedua sejak tanggal 1 April 2022 hingga diumumkan berakhir tanggal 26 Juni 2023.

kasus aktif baru, sembuh, atau meninggal dilakukan setiap hari.

pertama diberikan nilai $T_1 = 760$ hari, sedangkan periode kedua

i. Data jumlah kasus baru harian selama periode-periode terse-

a tabel 2.3.

Tabel 2.3. Data jumlah kasus baru, meninggal dan sembuh selama masa pandemi covid-19 di Indonesia dalam dua periode, periode sebelum vaksin dan periode setelah vaksin

T	Σ kasus baru	Σ pasien meninggal	Σ pasien sembuh
760	6.012.818	155.089	5.750.802
451	799.000	6.778	890.217
1211	6.811.818	161.867	6.641.019

Misalkan proses pencatatan kasus aktif covid-19 di Indonesia memenuhi proses Poisson bivariat homogen untuk Jumlah pasien covid-19 yang meninggal, N_1 , dan jumlah pasien covid-19 yang dapat sembuh, N_2 , maka bentuk distribusi Poisson bivariatnya dalam waktu pengamatan $(0, 1]$ hari adalah

$$g(n_1, n_2) = \frac{(\lambda_1)^{n_1} (\lambda_2)^{n_2}}{n_1! n_2!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \sum_{k=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{n_1! n_2!}{k! (n_1 - k)! (n_2 - k)!} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2} \right)^k. \quad (2.13)$$

Penaksiran parameter laju penambahan pasien yang meninggal λ_1 , laju pasien yang sembuh λ_2 , ataupun laju penambahan pasien aktif λ_3 diperoleh menggunakan hasil metode maksimum likelihood pada persamaan 2.10 sampai 2.12, yaitu

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \frac{m}{T} \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{k}{T} \\ \hat{\lambda}_3 &= \frac{l}{T}. \end{aligned}$$

Untuk periode pertama, diperoleh laju penambahan pasien covid-19 yang meninggal dalam sehari mencapai 204 jiwa ($\lambda_1 = 204, 06$), laju penambahan pasien yang mampu sembuh sekitar 7.567 jiwa ($\lambda_2 = 7.566, 84$). Laju penambahan pasien perhari



($\lambda_3 = 7.911, 60$). Untuk periode kedua, setelah pemberian vaksin, laju penambahan yang meninggal dapat diturunkan hanya 15,03 perhari. Meskipun laju pasien sakitnya sebesar 1.772 jiwa perhari, namun laju penambahan pasien sembuh jauh lebih besar = 1.973,87). Hal ini menunjukkan efektivitas pemberian vaksin, yakni laju kesembuhan melebihi laju pasien sakit. Bahkan laju penambahan hanya sebesar 15 orang perhari.

2.5 Kesimpulan

Misalkan $\{(N_1(t), N_2(t)); t \geq 0\}$ adalah proses Poisson bivariat homogen maka bentuk peluang bersama $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ adalah

$$f(n_1, n_2) = \frac{(\lambda_1 t)^{n_1}}{n_1!} \frac{(\lambda_2 t)^{n_2}}{n_2!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \sum_{n_3=0}^{\min\{n_1, n_2\}} n_3! \binom{n_1}{n_3} \binom{n_2}{n_3} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 t} \right)^{n_3},$$

dengan laju λ_3 adalah kovariat antara dua proses Poisson homogen. Fungsi likelihood untuk proses Poisson bivariat yang ditinjau sebagai model *point process* memiliki bentuk yang sama dengan fungsi likelihood untuk tiga proses Poisson yang saling bebas, yaitu

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1)^m (\lambda_2)^k (\lambda_3)^l e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)T}.$$

Penaksir parameter untuk λ_1 , λ_2 , dan λ_3 dari model proses Poisson homogen bivariat diperoleh dengan metode MLE terhadap turunan fungsi likelihood adalah

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= \frac{m}{T}, \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{k}{T} \\ \hat{\lambda}_3 &= \frac{l}{T},\end{aligned}$$

dengan m kejadian untuk proses pertama saja, k kejadian untuk proses kedua saja dan $l = n - m - k$ untuk kejadian yang memenuhi dua proses. Hasil yang diperoleh untuk data kasus aktif covid-19 di Indonesia yang memenuhi proses Poisson bivariat yang homogen, menunjukkan bahwa intensitas bersyarat kejadian sembuh dan meninggal pasien Covid-19 berbanding terbalik dengan waktu pengamatan T .

2.6 Daftar Pustaka

- 4 Bidounga, R., Nganga, P. C. B., Niéré, L., and Mizère, D. (2021). A note on the (weighted) bivariate Poisson distribution. *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 14(1), 192–203.



- d Isham, V. (1977). A bivariate point process connected with others. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1–160.

- d Wikle, C. K. (2011). *Statistics for Spatio-Temporal Data*. John

- 14 Cruz-Juárez, J. A., Reyes-Cervantes, H., and Rodrigues, E. R. (2016). Analysis of ozone behaviour in the city of Puebla, Mexico using non-homogeneous Poisson models with multiple change-points. *Journal of Environmental Protection*, 7(12), 1886–1903.
- 15 Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2008). *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume II: General Theory and Structure*. Springer.
- 16 Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume I: Elementary Theory and Methods*. Springer.
- 18 Gani, J. and Lewis, P. A. W. (1973). Point processes in epidemiology. Stanford University, Department of Statistics.
- 19 González, J. A., Rodríguez-Cortés, F. J., Cronie, O., and Mateu, J. (2016). Spatio-temporal point process statistics: a review. *Spatial Statistics*, 18, 505–544.
- 20 Goulard, M., Särkkä, A., and Grabarnik, P. (1996). Parameter estimation for marked Gibbs point processes through the maximum pseudo-likelihood method. *Scandinavian Journal of Statistics*, 365–379.
- 21 Griffiths, R. C. and Milne, R. K. (1978). A class of bivariate Poisson processes. *Journal of Multivariate Analysis*, 8(3), 380–395. DOI: 10.1016/0047-259X(78)90061-1.
- 22 Guan, Y. and Shen, Y. (2010). A weighted estimating equation approach for inhomogeneous spatial point processes. *Biometrika*, 97(4), 867–880.
- 23 Hawkes, A. G. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1), 83–90.
- 24 Hawkes, A. G. (2018). Hawkes processes and their applications to finance: a review. *Quantitative Finance*, 18(2), 193–198.
- 25 Ghosh, I., Marques, F., and Chakraborty, S. (2021). A new bivariate Poisson distribution via conditional specification: properties and applications. *Journal of Applied Statistics*, 48(16), 3025–3047. DOI: 10.1080/02664763.2020.1793307.



ina, J., Pandit, S. N. N., and Srinivasa Rao, K. (1999). On a bivariate distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 28(1), 1–10.

o, D., Ghosh, S., and Brown, E. N. (2011). A Granger causality point process models of ensemble neural spiking activity. *PLoS Biology*, 7(3), e1001110.

- 32 Møller, J. and Waagepetersen, R. P. (2003). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. CRC Press, Boca Raton.
- 33 Ng, E. T. M. and Cook, R. J. (1999). Robust inference for bivariate point processes. *Canadian Journal of Statistics*, 27(3), 509–524.
- 34 Ogata, Y. (1978). Estimators for stationary point processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 30(A), 243–261.
- 35 Ogata, Y. (1988). Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *Journal of the American Statistical Association*, 83(401), 9–27.
- 36 Ogata, Y. (1998). Space–time point-process models for earthquake occurrences. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 50, 379–402.
- 37 Ogata, Y. and Zhuang, J. (2006). Space–time ETAS models and an improved extension. *Tectonophysics*, 413(1-2), 13–23.
- 38 Puri, M. L. and Tuan, P. D. (1986). Maximum likelihood estimation for stationary point processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 83(3), 541–545.
- 39 Quesada, J. A., Melchor, I., and Nolasco, A. (2017). Point process methods in epidemiology: application to the analysis of HIV/AIDS mortality in urban areas. *Geospatial Health*, 12(1).
- 43 Schoenberg, F. P., Brillinger, D. R., and Guttorp, P. (2002). Spatial–temporal point processes. In *Encyclopedia of Environmetrics*, 3, 1573–1577.
- 46 Sunusi, N., Jaya, A. K., and Islamiyati, A. (2013). Hazard rate estimation of temporal point process: Case study of earthquake hazard rate in Nusatenggara region. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 7(6), 1059–1062.
- 47 Vere-Jones, D. (1978). Earthquake prediction: A statistician's view. *Journal of Physics of the Earth*, 26(2), 129–146.



و, R. E., Nielsen, B. F., Ramírez-Cobo, P., and Ruggeri, F. (2021). H-state Markov modulated Poisson process for failure modeling. *Engineering & System Safety*, 208, 107318.

15). Weighted likelihood estimators for point processes. *Spatial* 66–178.