

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Transformasi Fourier adalah alat penting yang dapat digunakan untuk mengonversi sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi. Setelah diolah di domain frekuensi, sinyal dapat dengan mudah dikembalikan ke domain waktu semula. Seiring berjalannya waktu, Transformasi Fourier telah mengalami kemajuan pesat dan diterapkan luas dalam berbagai bidang, termasuk elektronika, fisika materi padat, mekanika struktural, gelombang mekanik, dan mekanika kuantum (Nur A. T. A., 2022). Dalam bidang matematika terapan, transformasi Fourier telah berkembang menjadi teknik matematika yang penting, terutama sebagai metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial (Bahri M., 2022).

Ketaksamaan Pitt pertama kali diperkenalkan oleh Hermann Pitt, seorang matematikawan Inggris yang terkenal karena kontribusinya dalam analisis Fourier dan teori bilangan. Pitt bekerja pada pertengahan abad ke-20 dan dikenal atas hasil-hasilnya yang mendalam dalam berbagai bidang matematika, terutama terkait dengan ketaksamaan dan transformasi Fourier. Ketaksamaan yang ia temukan terus menjadi topik penelitian aktif hingga saat ini, dengan banyak generalisasi dan aplikasi yang dikembangkan oleh para peneliti modern (Li S. et al., 2023).

Transformasi Fourier fraksional merupakan generalisasi dari transformasi Fourier biasa. Namun, dalam banyak aplikasi, transformasi Fourier konvensional mungkin tidak cukup fleksibel untuk menangani variasi sinyal yang lebih kompleks (Guanlei Xu. et al., 2009). Untuk mengatasi hal ini, beberapa penelitian salah satunya generalisasi dari transformasi Fourier telah dikembangkan, termasuk Transformasi Fourier Fraksional (FrFT) dan Transformasi Fourier Fraksional Offset (OFrFT) (et al., 2016).



enelitian (Goel, N.) yang memperkenalkan pengembangan n dalam teori transformasi Fourier fraksional dengan ahkan parameter offset, yang membuka peluang baru dalam

pemrosesan sinyal. Teorema konvolusi dan korelasi yang diperkenalkan untuk OFrFT memberikan alat yang lebih kuat dan fleksibel untuk analisis sinyal yang kompleks dan berbagai aplikasinya.

Lebih lanjut, penelitian ini bertujuan menggabungkan konsep dari OFrFT dengan teknik windowing. Dengan memasukkan window, memungkinkan analisis sinyal yang lebih lokal dan terfokus dalam domain waktu-frekuensi serta menentukan ketaksamaan Pitt pada transformasi Fourier fraksional offset window sebagai perluasan dari ketaksamaan Pitt pada domain transformasi Fourier, ini dapat memberikan keuntungan tambahan tentang sinyal dalam konteks window yang ditetapkan dan sangat berguna dalam situasi di mana sinyal memiliki komponen lokal yang penting atau ketika sinyal berubah seiring waktu.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah yaitu sebagai berikut.

1. Bagaimana relasi antara transformasi Fourier dengan transformasi Fourier fraksional offset window?
2. Bagaimana menentukan beberapa sifat pada transformasi Fourier fraksional offset window?
3. Bagaimana menentukan ketaksamaan Pitt pada transformasi Fourier fraksional offset window?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Menentukan relasi antara transformasi Fourier dengan transformasi Fourier fraksional offset window.
2. Menentukan sifat-sifat pada transformasi Fourier fraksional offset window.



3. Menentukan ketaksamaan Pitt pada transformasi Fourier fraksional offset window.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian pada tugas akhir ini yaitu diharapkan dapat memberikan pengetahuan baru sekaligus literatur tambahan bagi penulis dan pembaca dalam kajian transformasi Fourier, khususnya pada ketaksamaan Pitt pada transformasi Fourier fraksional offset window.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini dibatasi pada ruang $L^1(\mathbb{R})$ dan $L^2(\mathbb{R})$. Adapun ketaksamaan yang akan dikaji adalah ketaksamaan Pitt pada transformasi Fourier fraksional offset window.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan beberapa definisi, teorema, dan istilah yang digunakan sebagai teori pendukung dalam penyelesaian tugas akhir ini. Sebelum membahas tentang prinsip ketidakpastian logaritma pada transformasi Fourier fraksional offset, terlebih dahulu dibahas tentang ruang lebesgue, transformasi Fourier dan sifat-sifatnya, dan transformasi Fourier fraksional offset.

2.1 Ruang Lebesgue

Pada subbab ini, didefinisikan ruang $L^p(\mathbb{R})$ dan $L^p(\mathbb{R}^2)$ dengan $1 \leq p \leq 2$.

2.1.1 Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ dapat didefinisikan sebagai suatu ruang dari fungsi terukur dengan pangkat p dari nilai mutlaknya dapat diintegrasikan.

Definisi 2.1.1 (Ruang $L^p(\mathbb{R})$). Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi terukur bernilai real. Koleksi dari fungsi-fungsi terukur yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^p d\tau < \infty \right\}; \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.1)$$

(Peetre J., 1969)

Adapun norma dari f dalam $L^p(\mathbb{R})$ didefinisikan dengan

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.2)$$

Contoh 1. Diberikan fungsi f seperti di bawah ini,



$$f(\tau) = \begin{cases} \tau^3, & -2 \leq \tau \leq 2 \\ 0, & \tau \text{ selanjutnya} \end{cases}. \quad (2.3)$$

Solusi 1. Berdasarkan definisi ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan $p=1$ pada persamaan (2.1) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)| d\tau &= \int_{\mathbb{R}} |\tau^3| d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{-2} 0 d\tau + \int_{-2}^2 |\tau^3| d\tau + \int_2^{\infty} 0 d\tau \\
 &= \int_{-2}^2 |\tau^3| d\tau \\
 &= \int_{-2}^0 (-\tau^3) d\tau + \int_0^2 \tau^3 d\tau \\
 &= -\frac{1}{4} \tau^4 \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{4} \tau^4 \Big|_0^2 \\
 &= -\frac{1}{4} (0 - 16) + \frac{1}{4} (16 - 0) \\
 &= \frac{16}{4} + \frac{16}{4} \\
 &= 8.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2. Diberikan fungsi f seperti di bawah

$$f(\tau) = \begin{cases} 2e^{-k\tau}, & 0 \leq \tau < \infty \\ 0, & \tau \text{ selainnya} \end{cases}. \tag{2.5}$$

dimana $k > 0$ adalah konstanta.

Solusi 2. Berdasarkan definisi ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan $p=2$ pada persamaan (2.1) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau &= \int_{\mathbb{R}} |2e^{-k\tau}|^2 d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 0 d\tau + \int_0^{\infty} |2e^{-k\tau}|^2 d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} 4e^{-2k\tau} d\tau \\
 &= 4 \int_0^{\infty} e^{-2k\tau} d\tau \\
 &= 4 \left[-\frac{1}{2k} e^{-2k\tau} \Big|_0^{\infty} \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 4 \left[-\frac{1}{2k}(0-1) \right] \\
&= 4 \left(0 + \frac{1}{2k} \right) \\
&= \frac{2}{k}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Jadi, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

2.2 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah integral linier yang mengubah suatu fungsi atau sinyal dalam domain waktu menjadi domain frekuensi. Transformasi ini memiliki berbagai aplikasi luas, termasuk dalam analisis sinyal, kompresi data, pengolahan citra, teori gelombang, dan berbagai bidang ilmu terapan lainnya.

Definisi 2.2.1 (Transformasi Fourier). *Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$ dan didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{2.7}$$

Dalam hal ini, $i^2 = -1$ merupakan satuan imajiner dan faktor perkalian dari fungsi eksponensial $e^{-i\omega\tau}$ disebut kernel dari transformasi Fourier. Karena

$$e^{i\omega\tau} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau, \tag{2.8}$$

maka persamaan (2.7) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Selanjutnya diberikan contoh transformasi Fourier yaitu sebagai berikut

Contoh 3. *Diketahui fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ sebagai berikut.*



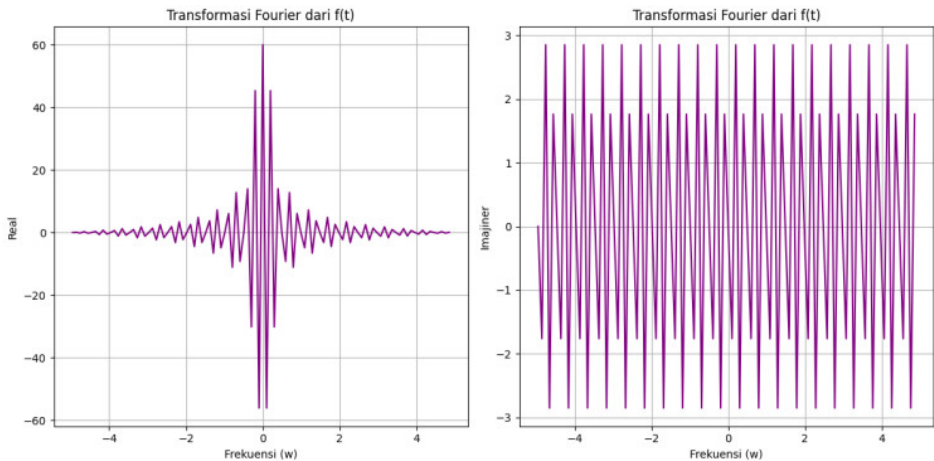
$$f(t) = \begin{cases} 3, & -1 \leq \tau \leq 1 \\ 0, & \tau \text{ selainya} \end{cases} \tag{2.10}$$

ari transformasi Fourier dari fungsi f diatas.

Solusi 3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \\
&= \int_{-\infty}^{-1} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_{-1}^1 f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_1^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= 0 + \int_{-1}^1 3e^{-i\omega\tau} d\tau + 0 \\
&= 3 \int_{-1}^1 e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= -\frac{3}{i\omega} e^{-i\omega\tau} \Big|_{-1}^1 \\
&= -\frac{3}{i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) \\
&= \frac{6}{\omega} \sin \omega.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{6}{\omega} \sin \omega$.



Gambar 2.1. Contoh grafik hasil transformasi Fourier.

Definisi 2.2.2 (Invers Transformasi Fourier). Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\mathcal{F}\{f\}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$f(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{2.12}$$



2.3 Sifat-sifat Transformasi Fourier

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat transformasi Fourier diantaranya sebagai berikut (Rusdin et al., 2013).

Teorema 2.3.1 (Sifat penjumlahan). *Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$, maka berlaku*

$$\mathcal{F}\{f + g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \quad (2.13)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.7), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f + g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} [f(\tau) + g(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f + g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega)$. □

Teorema 2.3.2 (Sifat linear). *Jika $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ dan α, β merupakan dua konstanta kompleks. maka,*

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega), \quad (2.15)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.7), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(\tau) + \beta g(\tau)) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_{\mathbb{R}} \beta g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \beta \int_{\mathbb{R}} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega). \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega). \quad \square$$

2.3.3 (Sifat translasi). *Misalkan $f(\tau)$ adalah fungsi yang digeser*



oleh $t_0 \in \mathbb{R}$ yaitu $f_0(\tau) = f(\tau - \tau_0)$, maka

$$\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = e^{-i\omega\tau_0} \mathcal{F}\{f\}(\omega). \quad (2.16)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.7), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau - \tau_0) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Misalkan $u = \tau - \tau_0$, $\tau = u + \tau_0$, $d\tau = du$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega(u+\tau_0)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega u} e^{-i\omega\tau_0} du \\ &= e^{-i\omega\tau_0} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega u} du \\ &= e^{-i\omega\tau_0} \mathcal{F}\{f\}(\omega). \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f_0\}(\omega) = e^{-i\omega\tau_0} \mathcal{F}\{f\}(\omega)$. □

Teorema 2.3.4 (Sifat modulasi). Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $(\mathbb{M}_{\omega_0})(\tau) = e^{i\omega_0\tau} f(\tau)$, maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \quad (2.17)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.7), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{M}_{\omega_0}f) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0\tau} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

$$\mathbb{M}_{\omega_0}f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \quad \square$$



Teorema 2.3.5 (Sifat konjugasi). Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$, maka

$$\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\omega)}. \quad (2.18)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier pada persamaan (2.7), diperoleh

$$\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\tau)} e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Dengan perubahan variabel $\tau = -u$, integral tersebut menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\bar{f}\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-u)} e^{-i\omega(-u)} (-du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-u)} e^{i\omega u} du. \end{aligned}$$

Transformasi Fourier dari f pada $-\omega$ adalah

$$\mathcal{F}\{f\}(-\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Dengan mengambil konjugat kompleks dari hasil ini, diperoleh

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\omega)} &= \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\tau) e^{i\omega\tau}} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\tau)} e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\bar{f}\}(\omega) = \overline{\mathcal{F}\{f\}(-\omega)}$. □

2.4 Transformasi Fourier Fraksional

Transformasi Fourier fraksional adalah sebuah generalisasi dari transformasi Fourier biasa dengan orde θ . Jika $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka transformasi Fourier fraksional menjadi transformasi Fourier biasa. Ini menunjukkan transformasi Fourier biasa adalah kasus khusus dari transformasi fraksional. Beberapa sifat dan aplikasi dari transformasi Fourier perluas ke transformasi Fourier fraksional.



Definisi 2.4.1 (Transformasi Fourier Fraksional). *Transformasi Fourier fraksional dengan sudut parameter θ dari fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, dinotasikan $\mathcal{F}_\theta\{f\}(\omega)$, didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}_\theta\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) K_\theta(\omega, \tau) d\tau, \quad (2.19)$$

dengan $K_\theta(\omega, \tau)$ disebut sebagai fungsi kernel dari transformasi Fourier fraksional, ditulis

$$K_\theta(\omega, \tau) = \begin{cases} A_\theta e^{i(\tau^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - i\tau\omega \csc \theta}, & \theta \neq n\pi \\ \delta(\tau - \omega), & \theta = 2n\pi \\ \delta(\tau + \omega), & \theta = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2.20)$$

dan

$$A_\theta = \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}}, \quad \overline{A_\theta} = \sqrt{\frac{1 + i \cot \theta}{2\pi}}. \quad (2.21)$$

Definisi 2.4.2 (Invers Transformasi Fourier Fraksional). *Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $\mathcal{F}_\theta\{f\} \in L^1(\mathbb{R})$. Invers dari transformasi Fourier fraksional dari fungsi f didefinisikan oleh*

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \mathcal{F}_\theta^{-1}[\mathcal{F}_\theta\{f\}](\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\theta\{f\}(\omega) \overline{A_\theta} e^{-i(\tau^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + i\tau\omega \csc \theta} d\omega. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.5 Sifat-sifat Transformasi Fourier Fraksional

Pada bagian ini akan dibahas sifat-sifat transformasi Fourier fraksional diantaranya sebagai berikut:

Teorema 2.5.1 (Translasi). *Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan translasi $\tau_k f(x) = f(x - k)$, maka sifat translasi dari transformasi Fourier fraksional adalah*

$$\mathcal{F}^\theta\{\tau_k f\}(\omega) = e^{\frac{i}{4}(k^2 \sin 2\theta - 4\omega k \sin \theta)} \mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega - k \cos \theta). \quad (2.23)$$



a 2.5.2 (Modulasi). *Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0} f(x) =$*

$e^{i\omega_0 x} f(x)$, maka sifat modulasi dari transformasi Fourier fraksional adalah :

$$\mathcal{F}^\theta \{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = e^{\frac{i}{4}(4\omega\omega_0 \cos \theta - \omega_0^2 \sin 2\theta)} \mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega - \omega_0 \sin \theta). \quad (2.24)$$

Teorema 2.5.3 (Skala). Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} - 0$ dan misal $f_\alpha(x) = f(ax)$, maka sifat skala dari transformasi Fourier fraksional adalah

$$\mathcal{F}^\theta \{f_\alpha\}(\omega) = \frac{C^\theta}{|\alpha| C^{\theta_0}} e^{\frac{i\alpha^2 \omega^2}{2} \cot \theta \left(1 - \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta_0}\right)} \mathcal{F}^{\theta_0} \{f\} \left(\frac{\alpha \sec \theta}{\sec \theta_0} \omega \right), \quad (2.25)$$

dengan

$$\theta_0 = \cot^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\alpha^2} \right),$$

(Pratami I. A., 2023).

Lemma 1 (FRFT Parseval). Untuk semua $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ diperoleh relasi:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \mathcal{F}_\theta \{f\}, \mathcal{F}_\theta \{g\} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad (2.26)$$

dan

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\mathcal{F}_\theta \{f\}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad (2.27)$$

(Bahri M. & Karim S. A. A., 2023).

2.6 Transformasi Fourier Fraksional Offset

Definisi 2.6.1. Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\mathcal{F}_\theta \{f\} \in L^1(\mathbb{R})$. Transformasi Fourier fraksional offset (TFFrO) dari fungsi f didefinisikan

$$\mathcal{F}_\theta^{(\beta, m, n)} \{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) K_{(\beta, m, n)}(\tau, \omega) d\tau, \quad (2.28)$$

dimana fungsi Kernel $K_{(\beta, m, n)}(\tau, \omega)$ adalah

$$K_{(\beta, m, n)}(\tau, \omega) = A_\theta e^{\frac{i}{2} m^2 \cot \beta} e^{\frac{i}{2} \left((\omega^2 + \tau^2) \cot \beta + 2\tau(m - \omega) \csc \beta + 2\omega(n - m \cot \beta) \right)}. \quad (2.29)$$

2.6.2. Untuk setiap $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\mathcal{F}_\theta^{(\beta, m, n)} \{f\} \in L^1(\mathbb{R})$, invers dari nasi Fourier fraksional offset diberikan



$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\mathbb{O}}^{(\beta, m, n)}\{f\}(\omega) \overline{K_{(\beta, m, n)}(\tau, \omega)} d\omega. \quad (2.30)$$

Teorema 2.6.1 (Parseval TFFrO). *untuk semua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, diperoleh relasi :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau = \langle \mathcal{F}_{\mathbb{O}}^{(\beta, m, n)}\{f\}, \mathcal{F}_{\mathbb{O}}^{(\beta, m, n)}\{g\} \rangle. \quad (2.31)$$

2.7 Ketaksamaan Pitt Pada Transformasi Fourier

Ruang Schwartz adalah ruang fungsi dari semua fungsi yang turunannya menurun dengan cepat. dalam hal ini, ruang Schwartz merupakan ruang untuk fungsi-fungsi f dengan f kontinu dan setiap turunan $F^{(q)}$ (q adalah orde turunan) untuk setiap $q \in \mathbb{N}$ ada dan berkelanjutan. ruang ini mempunyai sifat penting bahwa transformasi Fourier merupakan automorfisme pada ruang ini. suatu fungsi dalam ruang Schwartz terkadang disebut fungsi Schwartz. Salah satu contoh ruang Schwartz adalah fungsi Gaussian $f(x) = e^{-x^2}$. Berikut ini ketaksamaan pitt pada transformasi Fourier,

Teorema 2.7.1. *Untuk setiap $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dan $0 \leq k < n$, berlaku*

$$\int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-k} |\mathcal{F}\{f\}(\omega)|^2 d\omega \leq c_k \int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|^2 dx, \quad (2.32)$$

dimana

$$c_k = \pi^k \left[\frac{\Gamma(\frac{n-k}{4})}{\Gamma(\frac{n+k}{4})} \right]^2, \quad (2.33)$$

dengan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ adalah ruang Schwartz pada $\mathbb{R}$ (Beckner W., 2023).

Ketaksamaan pitt ini akan digeneralisasi ke transformasi Fourier fraksional offset window.



Teorema Fubini-Tonelli

Teorema 2.8.1. *Misalkan (E, ε, μ) dan $(F, \mathcal{F}, \nu)$ adalah ruang terukur ε dan f adalah sebuah fungsi terukur $\varepsilon \times \mathcal{F}$ yang dapat*

diintegrasikan terhadap $(\mu \times \nu)$, maka fungsi-fungsi

$$\begin{cases} \int_F f(x, y) \nu(dy), & \text{jika } \int_F |f(x, y)| \nu(dy) < \infty, \\ 0, & \text{jika } \int_F |f(x, y)| \nu(dy) = \infty, \end{cases} \quad (2.34)$$

dan

$$\begin{cases} \int_E f(x, y) \mu(dy), & \text{jika } \int_E |f(x, y)| \mu(dy) < \infty, \\ 0, & \text{jika } \int_E |f(x, y)| \mu(dy) = \infty. \end{cases} \quad (2.35)$$

Persamaan (2.34) dan (2.35) adalah fungsi terukur dan dapat diintegrasikan. Berlaku,

$$\begin{aligned} \int_{E \times F} f(x, y) (\mu \times \nu)(dxdy) &= \int_E \left(\int_F f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \int_F \left(\int_E f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy) \end{aligned} \quad (2.36)$$

(Billingsley P., 1995).

