

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Coronavirus Disease 2019 (Covid-19) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2). SARS-CoV-2 merupakan coronavirus jenis baru yang belum pernah diidentifikasi sebelumnya pada manusia. Ada setidaknya dua jenis coronavirus yang diketahui menyebabkan penyakit yang dapat menimbulkan gejala berat seperti *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS) dan *Severe Acute Respiratory Syndrome* (SARS). Tanda dan gejala umum infeksi Covid-19 antara lain gejala gangguan pernapasan akut seperti demam, batuk dan sesak napas. Masa inkubasi rata-rata 5-6 hari dengan masa inkubasi terpanjang 14 hari. Pada kasus Covid-19 yang berat dapat menyebabkan pneumonia, sindrom pernapasan akut, gagal ginjal, dan bahkan kematian. Pada tanggal 31 Desember 2019, WHO China Country Office melaporkan kasus pneumonia yang tidak diketahui etiologinya di Kota Wuhan, Provinsi Hubei, Cina. Pada tanggal 7 Januari 2020, China mengidentifikasi kasus tersebut sebagai jenis baru coronavirus. Pada tanggal 30 Januari 2020 WHO menetapkan kejadian tersebut sebagai Kedaruratan Kesehatan Masyarakat yang Meresahkan Dunia (KKMMD)/ *Public Health Emergency of International Concern* (PHEIC) dan pada tanggal 11 Maret 2020, WHO sudah menetapkan Covid-19 sebagai pandemi. WHO menetapkan Covid-19 sebagai pandemi global dan menjadi perhatian secara internasional. Sejak kemunculannya sampai tanggal 2 Februari 2022, jumlah kasus terkonfirmasi secara global adalah 382.270.389 dan jumlah kematian akibat Covid-19 adalah 5.706.647. Lalu 5.706.647 orang meninggal dunia dan 303.143.780 lainnya sembuh dari virus corona.

Penelitian terkait pemodelan matematika Covid-19 mulai banyak dikembangkan sejak pandemi terjadi pada awal tahun 2020. Pemodelan matematika merupakan salah satu usaha yang mengilustrasikan dengan sederhana fenomena-fenomena yang terjadi pada kehidupan nyata kedalam suatu bentuk matematika. Pemodelan matematika mempunyai peranan penting dalam menganalisis suatu fenomena endemik pada bidang kesehatan, yaitu untuk mengetahui tingkat penyebaran virus pada penyakit menular (Muntoyimah, *et al.*, 2018). Model dasar epidemi penyakit SIR (*susceptible, infectious, removed*) yang dikenalkan oleh Kermack & McKendrick diaplikasikan kedalam Covid-19 diantaranya oleh Fosu *et al.*, Imran *et al.*, Ivanova & Dospatliev, Liao *et al.*, dan Mitra. Selanjutnya pemodelan matematika epidemi penyakit dengan menambahkan penggunaan karantina sebelumnya telah dilakukan



D-19 (Manaqib dkk, 2021). Sehingga pemodelan matematika dengan menambahkan kompartemen individu vaksinasi, karantina dan diaplikasikan kedalam Covid-19.

Penelitian mengenai pemodelan matematika Covid-19, seperti dilakukan oleh Abdullah, dkk (2020) tentang model matematika dengan membagi 4 kompartemen, yaitu kompartemen *Susceptible* (S),

Resistive (R), *Infected* (I) dan *Quarantine* (Q). Kompartemen resistensi dan karantina ini merupakan kompartemen yang menambah dinamika transmisi penyakit virus corona (COVID-19). Adapun penelitian yang dilakukan oleh Alvioni Bani (2020) membahas mengenai model matematika SCPUR (*Susceptible* (S), *Carrier* (C), *Reported Symptomatic* (P), *Unreported Symptomatic* (U), *Recovery* (R)) pada penyebaran COVID-19 dengan menggunakan data penderita COVID-19 di Kota Makassar dengan membagi kompartemen populasi menjadi 5 kompartemen. Kompartemen individu yang rentan terhadap penyakit, individu terinfeksi tanpa gejala, individu terinfeksi dengan gejala dan melaporkannya, individu terinfeksi dengan gejala namun tidak melaporkannya, serta individu yang sembuh dari penyakit serta penambahan proporsi imunitas tubuh terhadap pertambahan individu terinfeksi, pemberlakuan PSBB, dan karantina sebagai proses penyembuhan. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Ghostine R., dkk (2021) mengembangkan model SEIR dengan menambah kompartemen vaksinasi untuk mensimulasikan penyebaran penyakit coronavirus (COVID-19) di Arab Saudi, model ini mencakup 7 kompartemen yaitu *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infectious* (I), *Quarantined* (Q), *Recovered* (R), *Death* (D), dan *Vaccinated* (V). Penelitian ini menerapkan sistem asimilasi data harian pada data *real* dari Arab Saudi untuk meramalkan efektifitas vaksinasi pada penyebaran COVID-19.

Pada penelitian yang akan dilakukan berkaitan dengan pemodelan penyebaran virus COVID-19. Pada penelitian ini juga dilakukan modifikasi model matematika dengan menggunakan kompartemen-kompartemen yaitu individu rentan (*S*), individu yang bergejala atau ekspos (*E*), individu yang terinfeksi (*I*), individu yang dikarantina (*Q*), individu yang tervaksinasi (*V*). Selanjutnya ditambahkan asumsi bahwa setiap individu yang telah melalui proses karantina dapat kembali *resistive* atau rentan terhadap virus COVID-19. Oleh karena itu, penelitian tesis ini diberi judul:

“Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi dan Karantina”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, rumusan masalah diberikan sebagai berikut:

1. Bagaimana membangun model matematika dari penyebaran virus COVID-19 yang melibatkan kompartemen *S, E, I, Q, V*?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilan dari model yang dibangun?
3. Bagaimana simulasi numerik model matematika yang dibangun?



Daftar Penelitian

Penelitian tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana membangun model matematika dari penyebaran virus COVID-19 yang melibatkan kompartemen *S, E, I, Q, V*.

2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilan dari model

3. Untuk simulasi numerik model matematika yang dibangun.
Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat terkait pemahaman tentang pemodelan matematika yang dibangun dalam menentukan pendekatan atau cara menangani penyebaran COVID-19 dengan vaksinasi dan karantina.
1. Hasil dari penelitian ini dapat menjadi landasan dalam pengembangan model penyebaran COVID-19 serta dapat menjadi acuan untuk penelitian lebih lanjut. Selain itu juga menjadi sebuah nilai tambah khasanah pengetahuan ilmiah dalam bidang kesehatan di Indonesia.
2. Hasil dari penelitian diharapkan dapat membuat kebijakan untuk membantu pemangku kepentingan terkait dalam menangani penyebaran COVID-19.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini memerlukan asumsi-asumsi agar tidak menimbulkan penafsiran yang lebih luas, adapun batasan masalah pada penelitian adalah sebagai berikut:

1. Semua parameter modelnya adalah konstan.
2. Besar populasi dalam model matematika yang dibangun tidak konstan.

1.5 Teori

1.5.1 Covid-19 dan Variannya

Coronavirus adalah virus RNA dengan ukuran partikel 120-160 nm. Virus ini utamanya menginfeksi hewan, termasuk di antaranya adalah kelelawar dan unta. Sebelum terjadinya wabah COVID-19, ada 6 jenis coronavirus yang dapat menginfeksi manusia, yaitu alphacoronavirus 229E, alphacoronavirus NL63, betacoronavirus OC43, betacoronavirus HKU1, Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus (SARS-CoV), dan Middle East Respiratory Syndrome Coronavirus (MERS-CoV). Coronavirus yang menjadi etiologi COVID-19 termasuk dalam genus betacoronavirus (Riedel et al., 2019).

Berikut merupakan gejala utama dari infeksi COVID-19 diantaranya (Di Gennaro, F, dkk, 2020) yaitu demam ($> 38^{\circ} \text{C}$), batuk (*cough*), sesak napas (*dyspnea*), sakit kepala (*headache*), sakit tenggorokan (*sore throat*), hidung meler (*rhinorrhea*), gastrointestinal seperti diare dan gejala saluran pernafasan lainnya. Gejala tersebut biasanya ringan dan mulai secara bertahap dan juga akan berbeda di beberapa orang. Hal ini dipengaruhi oleh berbagai faktor, seperti daya tahan tubuh, umur pasien, perokok atau tidak, apakah ada penyakit pemberat atau tidak, jenis kelamin dan faktor imunitas. Beberapa orang terinfeksi tetapi tidak menunjukkan gejala apapun dan merasa tidak enak badan. Kebanyakan orang (sekitar 80%) pulih dari penyakit COVID-19 tanpa perlu perawatan khusus (Marzuki,



us Kementerian Kesehatan, pada Mei 2021 terdapat tiga varian a, Beta, dan Delta. Ditambah kehadiran varian baru Omicronnesia pada Desember lalu, total ada empat varian yang telah

Tabel 1. Varian Covid-19 (corona.jakarta.go.id, 2022).

	Awal terdeteksi	Masuk ke Indonesia	Gejala yang ditimbulkan	Tingkat Penularan
Alpha (B.1.1.7)	Inggris, September 2020	Mei 2021 di Sumatera	Demam, batuk, sesak napas, pusing, mual, nyeri otot	43-90% dari varian sebelumnya
Beta (B.1.351)	Afrika Selatan, Mei 2020	Mei 2021 di Bali	Demam, sakit kepala, sesak tenggorokan, indra penciuman hilang	Belum diketahui secara pasti
Delta (B.1.617.2)	India, Oktober 2020	Mei 2021, di Kudus dan Jakarta	Demam, sakit kepala, hilang selera makan, flu parah	30-100% dari varian sebelumnya
Omicron (B.1.1.529)	Beberapa negara, November 2021	Desember 2021 di Jakarta	Gejala sangat ringan, tidak sesak napas	500% dari varian delta

Perbedaan keempat varian tersebut dapat terlihat dari tempat terdeteksinya, gejalanya, dan tingkat penularannya. Keempat varian ini masuk ke Indonesia pada 2021 di beberapa wilayah. Sedangkan gejalanya hampir sama, yaitu batuk, demam, sakit kepala, sakit tenggorokan, nyeri otot, dan anosmia (penciuman hilang). Namun, dari keempat varian tersebut, yang berisiko terberat adalah Delta dan yang bergejala ringan Omicron. Dari sisi tingkat penularannya, Omicron tergolong varian yang paling cepat, sekitar 500% dibanding Delta. Sedangkan varian Beta belum diketahui secara pasti tingkat penularannya (sumber: corona.jakarta.go.id, 10 April 2022).

Adapun versi terbaru sejak kemunculannya hingga tahun 2025 ini yakni sebagai berikut:

Tabel 2. Varian Covid-19 terbaru

Varian	Pertama terdeteksi	Masuk ke Indonesia	Gejala Khas	Gejala Umum	Tingkat Penularan (R_0)	Referensi
	20)	Jan 2021	Nyeri kepala, kehilangan penciuman lebih cepat	Demam, batuk kering, kelelahan	4–5	WHO, Kemenkes, (Prevention, 2024)

Varian	Pertama Terdeteksi	Masuk ke Indonesia	Gejala Khas	Gejala Umum	Tingkat Penularan (R_0)	Referensi
Beta (B.1.351)	Afrika Selatan (Mei 2020)	Jan 2021	Nyeri otot, gejala lambat muncul	Demam, batuk, sesak napas	3.5–4.5	WHO, Kemenkes
Gamma (P.1)	Brasil (Nov 2020)	Tidak terdeteksi luas	Gangguan pencernaan, sakit tenggorokan	Batuk, demam, nyeri otot	2.5–3.5	WHO, Nature
Delta (B.1.617.2)	India (Okt 2020)	Mei 2021	Sakit kepala hebat, pilek, sakit tenggorokan	Demam tinggi, batuk, anosmia berkurang	5–8	WHO, BMJ
Omicron (B.1.1.529)	Afrika Selatan & Botswana (Nov 2021)	Des 2021	Sakit tenggorokan, suara serak, pilek	Batuk ringan, kelelahan, hidung tersumbat	9–10	WHO, NEJM
BA.2 (Omicron subvariant)	Global (Awal 2022)	Feb 2022	Lebih ringan, cepat menyebar	gejala yang mirip influenza (flu)	~13	WHO, ECDC
XBB.1.5 ("Kraken")	AS (Okt 2022)	Jan 2023	Lebih mudah menyebar, gejala ringan	Batuk ringan, nyeri tubuh	~14	CDC, WHO
EG.5 ("Eris")	Global (pertama kali dilaporkan Mei 2023)	Juli 2023	Seperti flu biasa, cepat menular	Pilek, kelelahan, demam ringan	~11–13	WHO, GISAID
		23) Des 2023	Tenggorokan sakit, batuk kering	Gejala mirip flu, tidak parah	~15	WHO, CDC
		Maret–April 2024	Gejala seperti ringan	Demam ringan, kelelahan	~17	WHO, CDC

Varian	Pertama Terdeteksi	Masuk ke Indonesia	Gejala Khas	Gejala Umum	Tingkat Penularan (R_0)	Referensi
LB.1 (turunan dari FLiRT)	Deteksi awal 2024	Juni 2024 (potensial)	Belum berbeda signifikan	Gejala mirip flu	~18–20 (estimasi)	WHO, CDC Tracking

1.5.2 Penanganan Pasien dengan Vaksinasi dan Karantina

Menteri Kesehatan (Menkes) Budi Gunadi Sadikin menerbitkan Surat Edaran (SE) Nomor HK.02.01/MENKES/1391/2021 tentang Pencegahan dan Pengendalian Kasus Covid-19. Surat edaran yang ditandatangani Menkes pada 30 Desember 2021 tersebut ditujukan kepada para gubernur dan bupati/walikota serta kepala dinas kesehatan provinsi dan kepala dinas kesehatan kabupaten/kota di seluruh Indonesia. Poin utama dari aturan ini untuk memperkuat koordinasi pusat dan daerah serta fasyankes (fasilitas pelayanan kesehatan) dalam menghadapi ancaman penularan Covid-19. Mengingat dalam beberapa waktu terakhir kasus transmisi lokal terus meningkat kesiapan daerah dalam merespons penyebaran varian jenis ini sangat penting agar tidak menimbulkan klaster baru penularan Covid-19.

Berikut ketentuan pencegahan dan pengendalian Covid-19 yang disampaikan Menkes melalui SE-nya:

- Seluruh kasus *probable* dan konfirmasi baik yang bergejala (*simptomatik*) maupun tidak bergejala (*asimptomatik*) harus dilakukan isolasi di rumah sakit yang menyelenggarakan pelayanan Covid-19.
- Segera dilakukan pelacakan kontak dalam waktu 1 x 24 jam untuk penemuan kontak erat. Setelah ditemukan, setiap kontak erat wajib segera dilakukan karantina selama 10 hari di fasilitas karantina terpusat dan pemeriksaan *entry* dan *exit test* menggunakan pemeriksaan *Nucleic Acid Amplification Test* (NAAT). Jika hasil pemeriksaan NAAT positif maka harus dilanjutkan pemeriksaan SGTF di laboratorium yang mampu pemeriksaan SGTF dan secara paralel spesimen dikirim ke laboratorium *Whole Genome Sequencing* (WGS) terdekat sesuai dengan Keputusan Menkes Nomor HK.01.07/Menkes/4842/2021 tentang Jejaring Laboratorium Surveilans Genomen Virus SARs-CoV-2.
- Kontak erat sebagaimana dimaksud pada poin b adalah orang yang memiliki riwayat kontak dengan kasus *probable* atau kasus terkonfirmasi sebagai berikut:



probable atau konfirmasi varian ini bergejala dihitung sejak 2 gejala timbul sampai 14 hari setelah gejala timbul (atau hingga akan isolasi).

Probable atau konfirmasi varian ini tidak bergejala dihitung sejak 2 hari pengambilan *swab* dengan hasil positif sampai 14 hari setelah timbul gejala atau hingga kasus melakukan isolasi).

Isolasi dan sembuh pada kasus *probable* dan konfirmasi sebagai

berikut:

1. Pada kasus yang tidak bergejala isolasi dilakukan selama sekurang-kurangnya 10 hari sejak pengambilan spesimen diagnosis konfirmasi ditambah hasil pemeriksaan NAAT negatif selama 2 kali berturut-turut dengan selang waktu lebih dari 24 jam.
2. Pada kasus yang bergejala isolasi dilakukan selama 10 hari sejak muncul gejala ditambah dengan sekurang-kurangnya 3 hari bebas gejala demam dan gangguan pernapasan serta hasil pemeriksaan NAAT negatif selama dua kali berturut-turut dengan selang waktu lebih dari 24 jam.
- e. Dinas kesehatan provinsi dan dinas kesehatan kabupaten/kota melakukan pencatatan dan pelaporan serta berkoordinasi dengan Kemenkes dalam upaya pencegahan dan pengendalian kasus. Pencatatan dan pelaporan kasus varian jenis ini dilaksanakan dengan menggunakan aplikasi *Allrecord* TC-19.
- f. Pembiayaan isolasi di rumah sakit yang menyelenggarakan pelayanan Covid-19 dan karantina terpusat dibebankan pada Anggaran Pendapatan dan Belanja Negara (APBN) dan sumber dana lain yang sah sesuai dengan ketentuan peraturan perundang-undangan.

Tabel 3. Kategori dan Durasi Karantina (WHO, 2022)

Kategori	Durasi Karantina	Keterangan
Kontak erat belum divaksin	5 hari	Lakukan tes antigen/PCR pada hari ke-5
Kontak erat sudah vaksin + tanpa gejala	Tidak wajib	Hanya perlu pantau gejala selama 5 hari
Pelaku perjalanan internasional	Sesuai kebijakan negara tujuan/asal	Disesuaikan dengan aturan imigrasi/karantina lokal

Secara umum, upaya pencegahan penyebaran Covid-19 (semua varian), tidak cukup bila hanya dilakukan secara upaya tunggal seperti mendapatkan vaksinasi yang lengkap tanpa menjaga protokol kesehatan, maupun sebaliknya. Adanya proteksi ekstra meliputi kedua upaya tersebut bersamaan merupakan langkah yang harus dilakukan oleh seluruh masyarakat agar mampu melindungi diri dan orang di sekitar dari paparan Covid-19, serta meminimalisir dari hospitalisasi dan kematian akibat Covid-19 (<https://vaksin.kemkes.go.id/>).

Vaksinasi tidak hanya bertujuan untuk memutus rantai penularan penyakit dan menghentikan wabah saja, akan tetapi juga dalam jangka panjang untuk



n memusnahkan penyakit itu sendiri. Indonesia punya sejarah yang panjang dalam usaha penanggulangan penyakit menular dengan vaksinasi. Indonesia juga berkontribusi terhadap penanggulangan penyakit ini melalui pemberian vaksinasi. Contohnya sejak pertama dicanangkan pada tahun 1956, akhirnya penyakit cacar bisa diberantas di dunia pada tahun 1974. Pun demikian dengan polio, sejak diberantas di Indonesia pertama kali pada tahun 1972, Indonesia akhirnya

mencapai bebas polio tahun 2014. Saat ini di dunia, termasuk Indonesia sedang dalam proses menuju eradikasi polio yang ditargetkan pada tahun 2023. Untuk dosis dan cara pemberian vaksin harus sesuai dengan yang direkomendasikan untuk setiap jenis vaksin COVID-19. Gambar1 menjelaskan dosis pemberian untuk setiap jenis platform vaksin COVID-19 (Kemenkes RI, 2021).

Tabel 4. Dosis pemberian vaksin untuk setiap jenis platform (Kemenkes RI, 2020).

Platform	Pengembang Vaksin	Jumlah Dosis	Jadwal Pemberian (Hari ke-)	Cara pemberian
Inactivated virus	<i>Sinovac Research and Development Co.Ltd</i>	2 (0,5 ml per dosis)	0, 14	Intramuscular
Inactivated virus	<i>Sinopharm + Beijing Institute of Biological Products</i>	2 (0,5 ml per dosis)	0,21	Intramuscular
Viral vector (Non-Replicating) Protein subunit	<i>AstraZeneca + University of Oxford</i>	1-2(0,5 ml per dosis)	Bila dua dosis: 0, 28	Intramuscular
	<i>Novavax</i>	2 (0,5 ml per dosis)	0,21	Intramuscular
RNA based vaccine	<i>Moderna+National Institute of Allergy and Infectious Diseases (NIAID)</i>	2 (0,5 ml per dosis)	0, 28	Intramuscular
RNA base vaccine	<i>Pfizer + BioNTech</i>	2 (0,3 ml per dosis)	0, 28	Intramuscular

Individu yang mendapat gejala selanjutnya terbukti positif terinfeksi, akan dikarantina. Pasien dengan infeksi ringan boleh tidak dirawat di rumah sakit, tetapi pasien harus diajarkan langkah pencegahan transmisi virus. Karantina di rumah dapat dikerjakan sampai pasien mendapatkan hasil tes virologi negatif dua kali berturut-turut dengan interval pengambilan sampel minimal 24 jam. Bila tidak memungkinkan, maka pasien dikarantina hingga dua minggu setelah gejala hilang. Sedangkan untuk pasien dengan infeksi berat harus dikarantina di rumah sakit dan diberikan pengobatan oleh pihak rumah sakit (Susilo, 2020).



temen Epidemiologi

galay, 2009) dalam membangun sebuah model diperlukan gar dihasilkan model yang reliabel. Secara umum tahapan-lah sebagai berikut:

h dilakukan untuk memahami masalah yang akan dirumuskan.

2. Membangun asumsi-asumsi. Hal ini diperlukan karena model adalah penyederhanaan realitas yang kompleks. Asumsi disini dibagi dalam dua kategori utama yaitu:
 - a. Klasifikasi variabel. Hal yang mempengaruhi tingkah laku pengamatan pada langkah 1 diidentifikasi sebagai variabel, baik berupa variabel bebas maupun variabel terikat.
 - b. Menentukan interelasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari sebelum membuat hipotesa tentang relasi antar variabel, secara umum dilihat beberapa penyederhanaan tambahan.
3. Membuat konstruksi model dapat dilakukan baik melalui hubungan fungsional dengan cara membuat diagram alur, persamaan-persamaan matematika maupun dengan bantuan *software* ataupun secara analitis.
4. Menganalisis model. Tahap ini dilakukan untuk mencari solusi yang sesuai untuk menjawab pertanyaan yang dibangun pada tahap identifikasi. Di dalam pemodelan, analisis dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan melakukan optimasi dan simulasi. Optimasi dirancang untuk mencari solusi apa yang seharusnya terjadi dan simulasi dirancang untuk mencari solusi apa yang akan terjadi.
5. Interpretasi penting dilakukan untuk mengetahui apakah hasil model tersebut rasional atau tidak.
6. Validasi. Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian dunia nyata, model tersebut harus diuji keabsahannya. Model yang valid tidak hanya mengikuti kaidah-kaidah teoritis yang sah tetapi juga memberikan interpretasi atas hasil yang diperoleh mendekati kesesuaian. Jika sebagian besar standar verifikasi tersebut dapat dilalui, model dapat diimplementasikan, sebaiknya jika tidak, maka konstruksi model harus dirancang ulang.
7. Implementasi. Jika hasil validasi memenuhi syarat dan rasional maka hasilnya dapat diterima, baru kemudian dapat dilakukan implementasi dari model yang diperoleh.

Pemodelan penyakit menular merupakan sebuah alat yang telah digunakan untuk mempelajari mekanisme penyebaran penyakit, untuk memprediksi masa depan wabah dan untuk mengevaluasi strategi untuk mengendalikan epidemi (Daley & Gani, 2005). Penyebaran penyakit menular selalu menjadi perhatian dan ancaman bagi kesehatan masyarakat. Hal ini telah menyebabkan masalah serius bagi kelangsungan hidup manusia dan spesies lain, dan bagi perkembangan ekonomi dan sosial masyarakat manusia. Wabah Antonine, 165-180 SM, adalah pandemi kuno berbentuk cacar atau campak, yang dibawa kembali ke Kekaisaran Romawi

kembali dari kampanye di daerah *Near-East*. Epidemi ran Romawi, merenggut nyawa dua kaisar Romawi dan rangan populasi yang drastis dan kesulitan ekonomi (Zhien &

gah dan mengendalikan penyakit menular secara lebih efektif, ruhnya memahami mekanisme penyebaran dan dinamika an kemudian memberikan prediksi dan panduan yang berguna ang lebih baik dalam penanggulangan penyebaran dapat

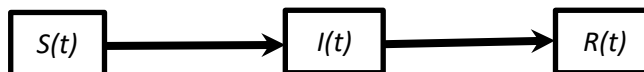


ditetapkan. Penelitian pada penyakit menular pada dasarnya dapat diklasifikasikan sebagai deskriptif, analitik, eksperimental, dan teoritis. Studi dinamika epidemi adalah pendekatan teoretis yang penting untuk menyelidiki dinamika transmisi penyakit menular yaitu dengan merumuskan model matematika untuk menggambarkan mekanisme penularan penyakit dan dinamika agen infeksi.

Model matematika didasarkan pada dinamika populasi, perilaku penularan penyakit, fitur agen infeksi, dan hubungan dengan faktor sosial dan fisiologis lainnya. Melalui analisis kuantitatif dan kualitatif, analisis sensitivitas, dan simulasi numerik, model matematika dapat memberi kita pemahaman yang baik tentang bagaimana penyakit menular menyebar, menemukan prinsip-prinsip umum yang mengatur dinamika transmisi penyakit, dan mengidentifikasi parameter yang lebih penting dan sensitif, untuk membuat prediksi yang andal dan memberikan strategi dan panduan pencegahan dan pengendalian yang bermanfaat (Zhien & Li, 2009).

Dalam model kompartemen yang dipelajari oleh Kermack dan Mckendrick pada tahun 1927, populasi dibagi menjadi tiga kompartemen: kompartemen rentan, diberi label S (*Susceptible*), di mana semua individu rentan jika mereka kontak dengan suatu penyakit; kompartemen yang terinfeksi, berlabel I (*Infectious*), di mana semua individu terinfeksi oleh penyakit dan infeksi; dan kompartemen yang dihapus, berlabel R (*Removed/Recovered*), di mana semua individu dikeluarkan atau pulih dari infeksi. Jumlah individu dalam kompartemen S, I , dan R , pada waktu t , masing-masing dinyatakan sebagai $S(t), I(t)$, dan $R(t)$ (Zhien & Li, 2009). Tiga asumsi berikut kemudian dirumuskan:

1. Penyakit ini menyebar di lingkungan tertutup; yaitu, tidak ada emigrasi atau imigrasi, dan tidak ada kelahiran atau kematian dalam populasi, sehingga total populasi tetap menjadi K konstan untuk semua t , yaitu, $S(t) + I(t) + R(t) = K$.
2. Jumlah kerentanan yang terinfeksi oleh individu yang terinfeksi per unit waktu, pada waktu t , sebanding dengan jumlah total kerentanan dengan koefisien proporsional (koefisien transmisi) β , sehingga jumlah total infeksi baru, pada waktu t , adalah $\beta S(t) I(t)$.
3. Jumlah yang dihapus (pulih) yaitu individu dari kompartemen yang terinfeksi per satuan waktu adalah $\gamma I(t)$ pada waktu t , di mana γ adalah koefisien tingkat pemulihan, dan individu yang dipulihkan memperoleh kekebalan permanen.



Gambar 1. Flowchart Model SIR (Zhien Ma & Jia Li, 2009).



virus seperti influenza, campak, dan cacar air, individu yang mendapatkan kekebalan terhadap virus yang sama. Kemudian akan pada bagian sebelumnya akan berlaku. Namun, untuk seperti ensefalitis dan gonore, individu yang pulih tidak akan dan dapat terinfeksi kembali. Untuk mempelajari dinamika Kermack dan Mckendrick (1932) mengusulkan model SIS yaitu

Suscectible-Infected Susceptible (Zhien & Li, 2009).



Gambar 2. Flowchart Model SIS (Zhien Ma & Jia Li, 2009)

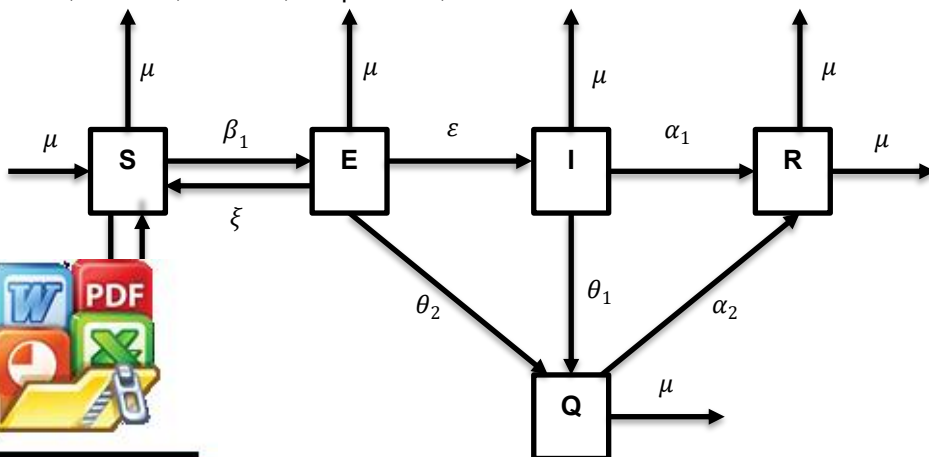
Model selanjutnya, diperkenalkan kompartemen (E) atau *Exposed*, dimana semua individu telah terinfeksi tetapi belum tertular. $E(t)$ menunjukkan jumlah individu dalam kompartemen yang *terexposed* pada waktu t . Sesuai dengan model tanpa periode laten (*exposed*) yaitu SI, SIS, SIR dan $SIRS$, kemudian dapat diperkenalkan model $SEI, SEIS, SEIR$, dan $SEIRS$ dengan periode laten (*exposed*). Sebagai contoh, diagram alir pada Gambar 3 menggambarkan model $SEIR$ (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*) dengan periode laten, di mana ω adalah koefisien laju perkembangan untuk individu dari kompartemen E ke I , sehingga $\frac{1}{\omega}$ adalah periode laten rata-rata



Gambar 3 Flowchart Model SEIR (Zhien Ma & Jia Li, 2009)

1.5.4 Kajian Terhadap Model Penyebaran Covid-19

Penelitian yang dilakukan oleh Ismiatul Khusna (2021) pada penelitian ini dibahas tentang model matematika penyebaran COVID19 dengan karantina. Dalam hal ini, populasi dibagi menjadi 6 kompartemen, yakni kompartemen suspected, exposed, isolated, infected, hospitalized, dan recovered.

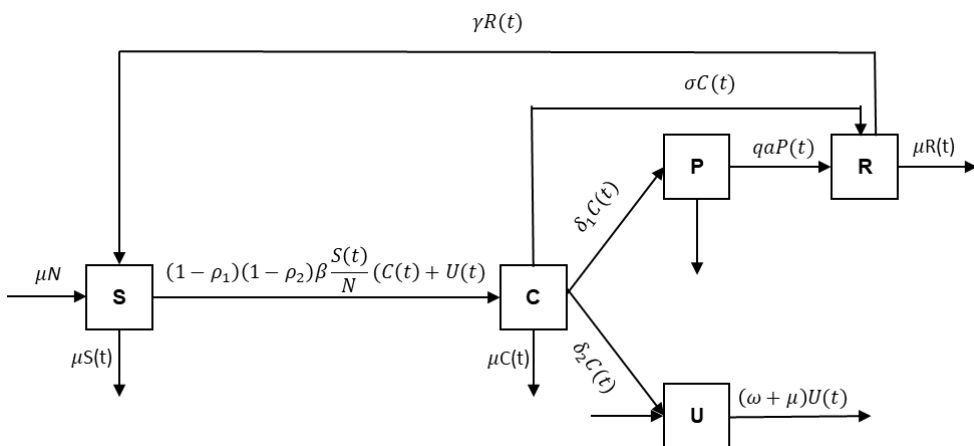


Gambar 4. Diagram Kompartemen (Ismiatul Khususna, 2020).

Pada penelitian tersebut, dibentuk model matematika yang memodifikasi model *SEIR* dengan mempertimbangkan adanya kompartemen individu yang dikarantina (*Q*) dan kompartemen individu yang di *lockdown* (*L*). Selanjutnya, dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dan diselidiki sifat kestabilan dari kedua titik kesetimbangan tersebut. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat-syarat tertentu. Metode matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*) digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar dan kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit. Simulasi numerik digunakan untuk menggambarkan perilaku dari model yang telah diperoleh kemudian berdasarkan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar, diperoleh beberapa parameter yang berpengaruh terhadap penyebaran Covid-19.

Ketiga, penelitian mengenai model matematis Covid-19 oleh Abdullah, dkk (2020) tentang model matematis corona baru dengan membagi 4 kompartemen, yaitu kompartemen *Susceptible* (*S*), *Resistive* (*R*), *Infected* (*I*) dan *Quarantine* (*Q*), dengan memasukkan kompartemen resistensi dan karantina untuk mengetahui dinamika transmisi penyakit virus corona (Covid-19).

Keempat, penelitian yang dilakukan oleh Alvioni Bani (2020) membahas mengenai model matematika *SCPUR* (*Susceptible* (*S*), *Carrier* (*C*), *Reported Symptomatic* (*P*), *Unreported Symptomatic* (*U*), *Recovery* (*R*)) pada penyebaran Covid-19 dengan menggunakan data penderita Covid-19 di Kota Makassar dengan membagi kompartemen populasi menjadi 5 kompartemen.



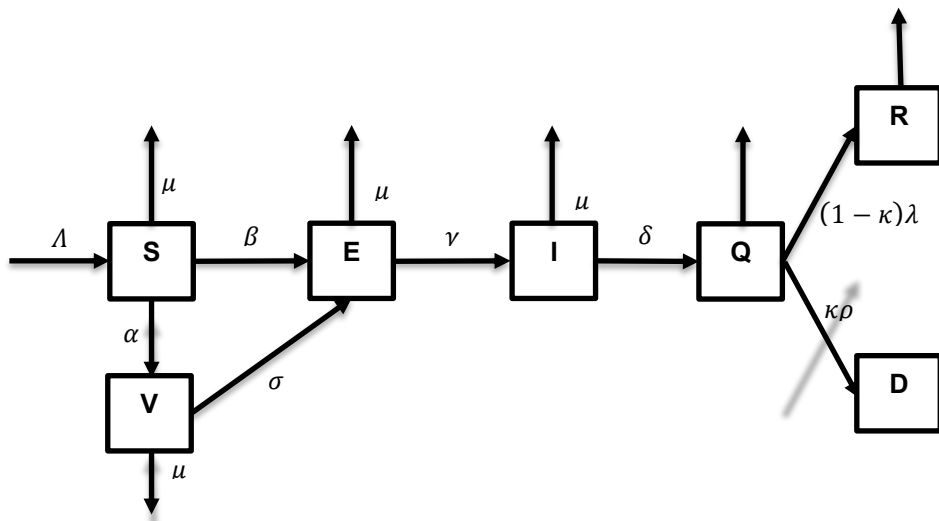
Gambar 5. Diagram Kompartemen Model (Alvioni Bani, 2020).

Kompartemen individu yang rentan terhadap penyakit, individu terinfeksi tanpa gejala, individu terinfeksi dengan gejala dan melaporkannya, individu ala namun tidak melaporkannya, serta individu yang sembuh menambahkan proporsi imunitas tubuh terhadap pertambahan pemberlakuan PSBB, dan karantina sebagai proses



penelitian yang dilakukan oleh Ghostine R., dkk (2021) *SEIR* dengan menambah kompartemen vaksinasi untuk penyebaran penyakit corona (COVID-19) di Arab Saudi. Model ini artemen yaitu *Susceptible* (*S*), *Exposed* (*E*), *Infected* (*I*),

Quarantined (Q), Recovered (R), Death (D), dan Vaccinated (V).



Gambar 6. Diagram Kompartemen Model (Ghostine et al., 2021).

Penelitian tersebut menerapkan sistem asimilasi (dari penggunaan data di tempat lain ke data yang real di Arab Saudi) yang diusulkan pada kumpulan data *real* dari Arab Saudi. Hasil numeriknya menunjukkan hasil prediksi penyebaran Covid-19 hingga skala waktu dua pekan.

1.5.5 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan persamaan diferensial yang saling mempengaruhi satu sama lain. Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

atau

$$\dot{x}(t) = f(x, t),\tag{1.2}$$

dengan $\dot{x}(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$ dan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ merupakan semua fungsi yang turunan parsial pertamanya kontinu di $\mathbb{R}^n$ serta $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ variabel terikat dan t variabel bebas. Jika pada Persamaan (1.2) variabel bebas

eksplisit, maka Persamaan (1.2) disebut sebagai Persamaan *non-autonomous* dan jika variabel bebas t dinyatakan secara implisit, maka Persamaan (1.2) disebut sebagai Persamaan *autonomous* yang berbentuk

$$\dot{x}(t) = f(x).\tag{1.3}$$

Persamaan (1.3) terbagi menjadi sistem *autonomous* linier dan sistem *autonomous* non linier (Boyce, 2004). Sistem (1.2) disebut sebagai sistem



persamaan diferensial linier, jika untuk setiap fungsi f_i , dengan $i = 1, 2, \dots, n$ adalah fungsi linier terhadap $x_1, x_2, \dots, x_n$. Secara umum, sistem dari n persamaan diferensial linier orde satu dapat ditulis dalam bentuk (Ross, 2004)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t).\end{aligned}\quad (1.4)$$

Sistem (1.7) dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.\quad (1.5)$$

Persamaan (1.8) dapat dituliskan menjadi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t).\quad (1.6)$$

Jika fungsi $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$, maka Persamaan (1.9) tersebut dapat dikatakan sistem persamaan diferensial linier homogen yang dapat dituliskan menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t).\quad (1.7)$$

Jika koefisien sistem merupakan konstanta, maka Persamaan (1.7) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\quad (1.8)$$

atau

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

Persamaan (1.2) disebut sebagai sistem persamaan diferensial tak linier terhadap $x_1, x_2, \dots, x_n$, apabila terdapat f_i yang bukan merupakan fungsi linier (Boyce, 2004). Sistem *autonomous* yang memuat persamaan-persamaan diferensial tak linier orde satu dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\quad (1.9)$$

1.5.6 Titik kesetimbangan



ingan adalah kondisi tetap yang tidak mengalami perubahan waktu. Sistem persamaan diferensial orde satu dan $\mathbf{x}(t, x_0)$ saat t dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = x_0$.

$\mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari Persamaan (1.3) jika

7)

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut ini

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad \dot{x} &= -3x, \\ \dot{y} &= 3x - 2y. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Titik kesetimbangan dari sistem Persamaan diferensial linier tersebut adalah $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \text{b.} \quad \dot{x} &= 3y^2 - 6x, \\ \dot{y} &= 8x^3 - 4xy. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Titik kesetimbangan dari sistem Persamaan diferensial linier tersebut adalah $(0,0)$.

1.5.7 Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 1.2

Diberikan matriks J berukuran $n \times n$ dalam $R^{n \times n}$ dan vektor tak nol x didalam R^n . Jika Jx adalah kelipatan skalar dari x , yakni

$$Jx = \lambda x \quad (1.12)$$

untuk suatu skalar λ dalam R maka x dinamakan vektor eigen dan matriks J skala λ dinamakan nilai eigen dan matriks J .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks J maka dituliskan kembali $Jx = \lambda x$ sebagai berikut :

$$Jx = \lambda Ix \quad (1.13)$$

atau secara ekuivalen

$$(J - \lambda I)x = 0. \quad (1.14)$$

Selanjutnya, apabila diandaikan bahwa persamaan karakteristik dari yaitu $\det(J - \lambda I) \neq 0$ maka matriks $(J - \lambda I)$ mempunyai invers, sehingga persamaan (1.12) menjadi

$$\begin{aligned} (J - \lambda I)^{-1}(J - \lambda I)x &= (J - \lambda I)^{-1}0 \\ x &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Hasil tersebut kontradiksi dengan vektor x tak nol, sehingga haruslah $\det(J - \lambda I) = 0$. (Anton H., 1991).

1.5.8 Kestabilan Titik kesetimbangan

Definisi 1.3

Diberikan matriks J berukuran $n \times n$ dalam $R^{n \times n}$ dan vektor tak nol x didalam R^n . Jika Jx adalah kelipatan skalar dari x , yakni

$$Jx = \lambda x \quad (1.16)$$

dalam R maka x dinamakan vektor eigen dan matriks J skala λ dinamakan nilai eigen dan matriks J .

Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks J maka dituliskan kembali $Jx =$

$$Jx = \lambda Ix \quad (1.17)$$



$$(J - \lambda I)x = 0. \quad (1.18)$$

Selanjutnya, apabila diandaikan bahwa persamaan karakteristik dari yaitu $\det(J - \lambda I) \neq 0$ maka matriks $(J - \lambda I)$ mempunyai invers, sehingga persamaan (1.12) menjadi

$$(J - \lambda I)^{-1}(J - \lambda I)x = (J - \lambda I)^{-1}0$$

$$x = 0. \quad (1.19)$$

Hasil tersebut kontradiksi dengan vektor x tak nol, sehingga haruslah $\det(J - \lambda I) = 0$. (Anton H., 1991).

1.5.9 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* digunakan untuk menentukan jenis nilai eigen dari suatu persamaan karakteristik. Analisis dilakukan melalui koefisien-koefisien persamaan karakteristik tersebut (Murray, 2002).

Teorema 1.1. Misalkan diberikan suatu polynomial

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (1.20)$$

dengan $a_i, i = 1, \dots, n$ adalah konstanta real. Persamaan tersebut mempunyai n buah akar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Masing-masing akar dapat bernilai real atau kompleks yang memenuhi $P(\lambda_i) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Misalkan diberikan sistem linear dengan koefisien konstan, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1.21)$$

dengan x adalah vektor yang berukuran $n \times 1$ dan A adalah matriks yang berukuran $n \times n$. Misalkan polinom pada persamaan (2.14) adalah persamaan karakteristik dari sistem persamaan (2.15), maka nilai eigen dari matriks A merupakan akar-akar dari polinomial $P(\lambda)$ tersebut (Murray, 2002).

Uji kestabilan *Hurwitz* digunakan untuk menentukan jenis nilai eigen dari matriks A , yaitu melalui determinan dari matriks H_n yang disebut dengan matriks *Hurwitz* yang dapat dilihat pada persamaan (2.16). Dalam bentuk umum matriks H_n merupakan matriks dengan entri seperti pada persamaan (2.15). Jadi syarat perlu dan cukup agar semua akar (*eigenvalue*) dari polinomial karakteristik $P(\lambda)$ memiliki bagian real negatif (artinya sistem stabil asimtotik) menurut kriteria *Routh-Hurwitz* adalah $a_n > 0$ dan

$$H_1 = a_1 > 0,$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 \end{bmatrix} > 0,$$



$$\begin{bmatrix} a_{n-5} & \dots \\ a_{n-4} & \dots \\ a_{n-3} & \dots \\ a_{n-2} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{k \times k} > 0 \quad (1.22)$$

untuk $k = 1, 2, \dots, n$ (Murray, 2002).

Teorema 1.2. (Uji Kestabilan Hurwitz, Willems, 1970).

Suatu sistem linier kontinu:

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika semua bagian real dari nilai eigen matriks A bernilai negatif. Kriteria ini dapat diuji melalui matriks Hurwitz, yaitu: semua determinan utama dari matriks Hurwitz harus positif.

Jika semua syarat ini terpenuhi, maka titik kesetimbangan $x = 0$ merupakan atraktor, yaitu kondisi stabil asimtotik.

1.5.10 Bilangan Reproduksi Dasar

Menurut Van Den Driessche & Watmough (2002), model epidemi biasanya mempunyai parameter nilai batas atau yang biasa dikenal dengan sebutan bilangan reproduksi dasar (R_0). Angka reproduksi dasar menunjukkan bahwa jumlah rata-rata individu dalam populasi rentan yang terinfeksi sebagai akibat dari satu kasus penularan oleh individu yang terinfeksi. Oleh karena itu, angka reproduksi dasar dapat digunakan untuk menentukan apakah suatu penyakit tersebut menyebar atau tidak dalam suatu populasi. Jika $R_0 < 1$, maka rata-rata jumlah individu baru terinfeksi yang dihasilkan oleh individu terinfeksi dalam satu periode infeksi kurang dari satu, sehingga infeksi tidak akan menyebar dan perlahan akan menghilang. Jika $R_0 > 1$, maka rata-rata jumlah individu terinfeksi baru yang dihasilkan oleh individu terinfeksi dalam satu periode infeksi lebih dari satu, sehingga infeksi akan menyebar.

1.5.11 Matriks Generasi Selanjutnya

Menurut Brauer & Chaves (2012), bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat dicari dengan metode umum yaitu matriks generasi selanjutnya (*the next generation matrix*). Dalam mengkonstruksi matriks generasi selanjutnya melibatkan subpopulasi yang menyebabkan infeksi. Model kompartemen dengan subpopulasi yang terinfeksi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x'_i = F_i - V_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.23)$$

dengan m mewakili jumlah subpopulasi (kompartemen), F_i adalah infeksi baru dari subpopulasi ke- i yang diperoleh dari individu rentan dan bernilai positif, juga merupakan komponen vektor dari F dengan $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T$. $V_i = V_i^- - V_i^+$ dimana V_i^- adalah laju perpindahan individu yang keluar dari subpopulasi ke- i , dan V_i^+ adalah laju perpindahan individu yang masuk kedalam subpopulasi ke- i . Jadi

an dalam bentuk $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)^T$.

bahwa F dan V adalah matriks dengan ukuran $m \times m$ yang erikut:

$$F = \frac{\partial F_i(E^0)}{\partial x_j}, \quad (1.24)$$



$$V = \frac{\partial V_i(E^0)}{\partial x_j},$$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, m$ dan (E^0) adalah titik kesetimbangan bebas infeksi. Matriks generasi selanjutnya dinyatakan sebagai

$$K = FV^{-1}, \quad (1.25)$$

selanjutnya $\mathcal{R}_0$ diperoleh dari perhitungan

$$\mathcal{R}_0 = \rho(K), \quad (1.26)$$

dengan $\rho(K)$ adalah *spectral radius* matriks K .

Contoh:

Diberikan model epidemi *SEIR*, dimana S adalah subpopulasi yang rentan penyakit, E adalah subpopulasi yang terinfeksi tetapi tidak dapat menularkan penyakit, I adalah subpopulasi yang terinfeksi dan R adalah subpopulasi yang sembuh dari penyakit. Model epidemi *SEIR* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta S(I + \varepsilon E) - \mu S, \\ E' &= \beta S(I + \varepsilon E) - \kappa E, \\ I' &= \kappa E - \alpha I, \\ R' &= \alpha I. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Untuk mengetahui angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) pada sistem persamaan (2.13), pertama kali disusun F_i yaitu infeksi baru pada subpopulasi ke- i yang diperoleh dari individu rentan dan V_i yaitu laju perpindahan individu dari subpopulasi ke subpopulasi lainnya. Subpopulasi infeksiusnya adalah E dan I , dengan kata lain $m = 2$, maka didapatkan F dan V adalah sebagai berikut:

$$F = [\beta S(I + \varepsilon E) \ 0], V = [\kappa E \ -\kappa E + \alpha I]. \quad (1.28)$$

Matriks F dan V diperoleh dengan mencari turunan parsial dari entri F_i dan V_i yang diberikan sebagai berikut:

$$F(E^0) = \left[\frac{\beta \varepsilon \Lambda}{\mu} \ \frac{\beta \Lambda}{\mu} \ 0 \ 0 \right], V(E^0) = [\kappa \ 0 \ -\kappa \ \alpha], \quad (1.29)$$



in titik seimbang (titik kesetimbangan) bebas penyakit dan $E^0 = 0$, mencari invers dari matriks V , diperoleh:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Selanjutnya perhitungan matriks generasi selanjutnya dilakukan dan diperoleh:

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta\varepsilon\Lambda}{\mu} & \frac{\beta\Lambda}{\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} & 0 & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta\varepsilon\Lambda}{\kappa\mu} + \frac{\beta\Lambda}{\alpha\mu} & \frac{\beta\Lambda}{\alpha\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

R_0 diperoleh dengan mencari nilai eigen dari matriks K

$$\det (K - \lambda I) = 0,$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{\beta\varepsilon\Lambda}{\kappa\mu} + \frac{\beta\Lambda}{\alpha\mu} - \lambda & \frac{\beta\Lambda}{\alpha} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (1.32)$$

$$\left(\frac{\beta\varepsilon\Lambda}{\kappa\mu} + \frac{\beta\Lambda}{\alpha\mu} - \lambda \right) (-\lambda) = 0,$$

Maka diperoleh nilai eigen yaitu:

$$\lambda_1 = \frac{\beta\varepsilon\Lambda}{\kappa\mu} + \frac{\beta\Lambda}{\alpha\mu}, \lambda_2 = 0. \quad (1.32)$$

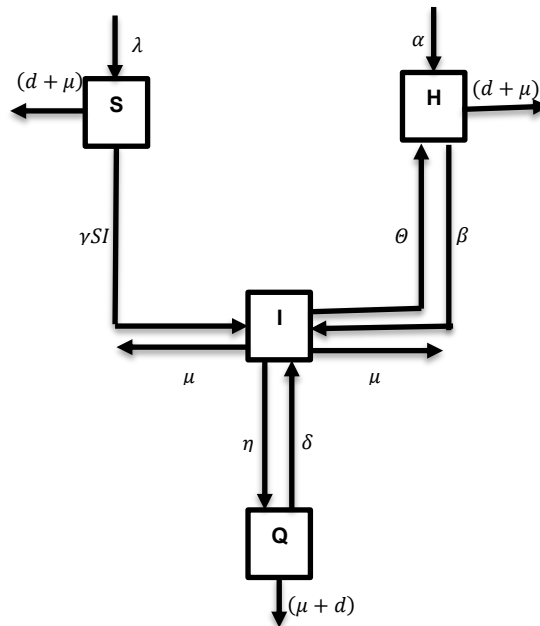
R_0 merupakan *spectral radius* matriks K , sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta\varepsilon\Lambda}{\kappa\mu} + \frac{\beta\Lambda}{\alpha\mu}. \quad (1.33)$$

1.6. Penelitian Terdahulu

Subbab ini menyajikan hasil penelitian terdahulu yang relevan dengan topik penelitian yang akan dilakukan, serta kajian-kajian yang memiliki keterkaitan dengan penelitian ini. Adapun beberapa peneliti yang mengkonstruksi model penyebaran Covid-19 dengan treatment vaksinasi dan karantina atau dirawat di rumah sakit yakni Abdullah et al. (2020) dan Keno & Etana (2022). Model yang dibangun oleh Abdullah et al (2020) adalah model *SHIQ* dengan kompartemen S (*susceptible class*), H (*healthy class*), I (*infected class*) dan Q (*quarantine class*) seperti gambar berikut:

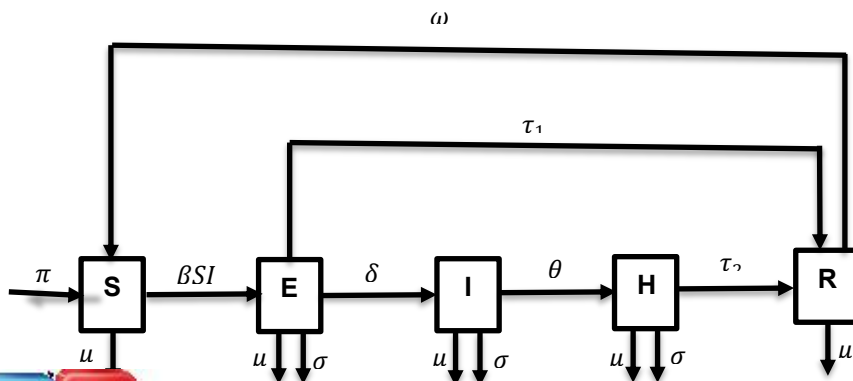




Gambar 7. Diagram Kompartemen (Abdullah et al., 2020)

Pada penelitian tersebut terdapat kompartemen karantina sebagai treatment penyembuhan dari penyakit Covid-19.

Model yang dibangun oleh Keno & Etana (2022) adalah model *SEIHR* dengan kompartemen *S* (*susceptible*), *E* (*exposed*), *I* (*infected*), *H* (*hospitalized*) dan *R* (*recovered*) seperti gambar berikut:



8. Diagram Kompartemen (Keno & Etana., 2023)

ara penelitian yang dilakukan oleh Abdullah et al. (2020) adalah : kompartemen *hospitalized* yang menunjukkan bahwa setelah untuk melakukan perawatan di rumah sakit untuk proses 19.



BAB II METODE PENELITIAN

Adapun tahapan-tahapan penelitian ini yakni sebagai berikut:

2.1 Identifikasi Masalah

Identifikasi masalah dilakukan untuk menentukan fokus permasalahan penelitian yang berkaitan dengan model matematika tingkat penyebaran Covid-19.

2.2 Studi Literatur

Studi literatur yang digunakan yakni jurnal penelitian yang telah dilakukan dan sumber pendukung lainnya untuk menelaah hal yang berkaitan dengan model matematika penyebaran Covid-19.

2.3 Formulasi Model Matematika

Setelah dilakukan studi literatur, selanjutnya akan dilakukan penyusunan masalah dan mengkonstruksi model matematika penyebaran Covid-19 dengan pemberian vaksinasi, karantina dan isolasi, serta menyusun asumsi-asumsi terhadap model tersebut.

2.4 Analisis Kestabilan

Untuk menganalisis kestabilan dari model yang dibuat, terlebih dahulu ditetapkan titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan endemik (*endemic equilibrium*) serta angka reproduksi dasar (*basic reproduction number*).

2.5 Simulasi Model

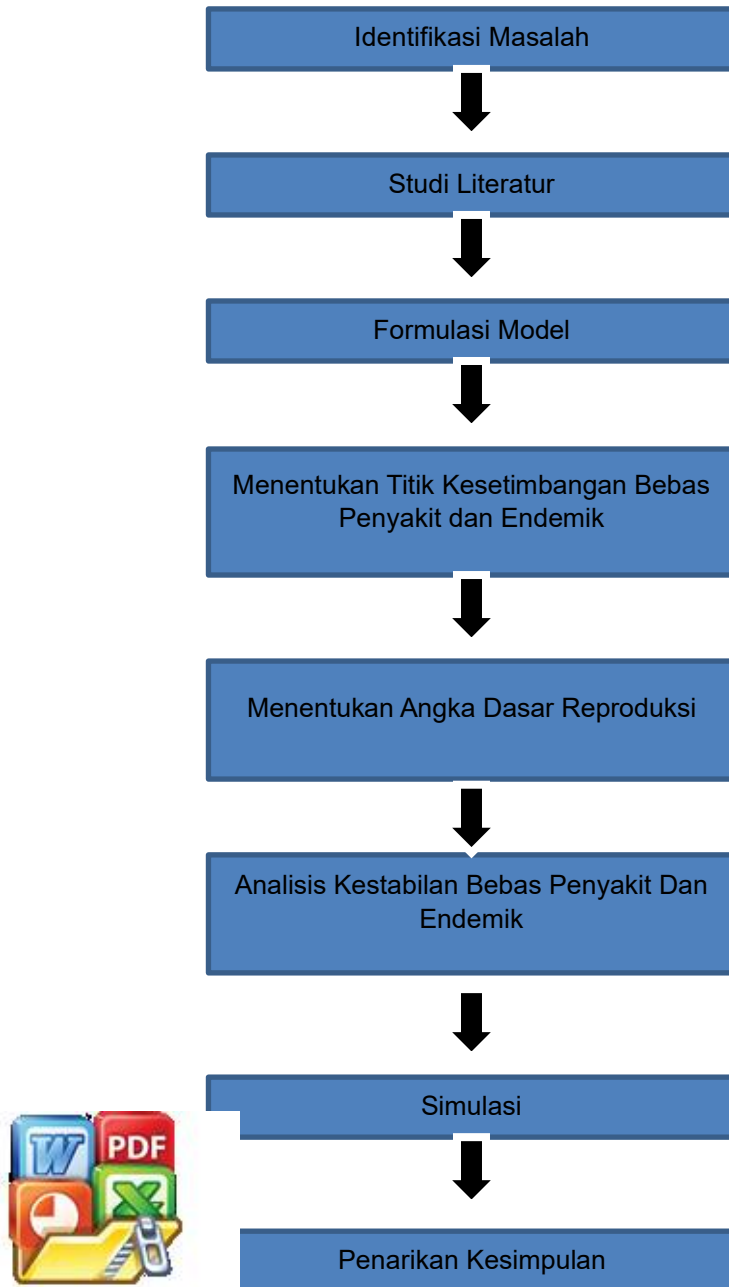
Simulasi numerik dari model dilakukan dengan menggunakan bantuan *software Maple 23, Python online* dan *Matlab 2022a*. Simulasi model dapat dilakukan terhadap penyebaran Covid-19 dengan menggunakan data sekunder yang diperoleh dari beberapa jurnal penelitian.

2.6 Penarikan Kesimpulan

Setelah menganalisa dan melakukan simulasi numerik terhadap model matematika yang dibuat, selanjutnya diambil suatu kesimpulan terhadap hasil yang diperoleh.



Adapun alur penelitian digambarkan dalam diagram alir (*flowchart*) sebagai berikut:



Gambar 9. Diagram Alur Penelitian.

