

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Hepatitis secara umum merupakan penyakit peradangan hati yang disebabkan oleh virus. Sampai saat ini terdapat enam jenis hepatitis yang ditemukan sesuai dengan virus yang menyerang antara lain Hepatitis A, Hepatitis B, Hepatitis C, Hepatitis D, Hepatitis E, dan Hepatitis G. Dari enam jenis hepatitis tersebut, hepatitis B merupakan hepatitis yang paling banyak dijumpai di dunia dan paling berbahaya. Hepatitis B menjadi penyakit berbahaya dibandingkan dengan jenis hepatitis lainnya karena bisa membunuh penderitanya secara perlahan. Hal ini terjadi karena virus penyebab penyakit hepatitis B mampu bertahan dan menetap dalam tubuh. Selain itu, hepatitis B dapat berkembang menjadi penyakit sirosis hati atau berakhir menjadi kanker hati. Dari keseluruhan penderita penyakit hepatitis B tersebut, hampir 75% penderita berada di benua Asia termasuk di Indonesia (Cahyono, 2010). Penderita penyakit hepatitis B dengan kasus tertinggi di Indonesia dapat dijumpai di wilayah Papua, NTT dan Jawa Timur.

Hepatitis B ditularkan melalui jarum suntik, tato, tindik maupun cairan tubuh yang terinfeksi seperti air liur maupun darah. Selain itu, infeksi hepatitis B bisa juga terjadi selama prosedur medis, bedah, melalui tato atau penggunaan pisau cukur maupun benda serupa yang terkontaminasi dengan darah yang terinfeksi. Di daerah yang sangat endemis, hepatitis B paling umum menyebar dari ibu ke anak saat lahir (penularan perinatal), atau melalui penularan horizontal (paparan darah yang terinfeksi), terutama dari anak yang terinfeksi ke anak yang tidak terinfeksi selama 5 tahun pertama kehidupan. Perkembangan infeksi kronis sangat umum terjadi pada bayi yang terinfeksi dari ibunya atau sebelum usia 5 tahun. Resiko infeksi kronis terkait dengan usia pada bayi sekitar 90%, sedangkan pada orang dewasa resiko terinfeksi kronis sekitar 2% sampai 6%. Untuk mencegah supaya penyakit hepatitis B tidak menyebar terlalu luas, pemerintah mencanangkan program vaksinasi. Program vaksinasi merupakan salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mencegah penyebaran penyakit hepatitis B (WHO, 2023).

Program vaksinasi hepatitis B direkomendasikan oleh WHO untuk dilaksanakan secara serentak di semua negara sejak tahun 1991. Program ini diutamakan untuk bayi yang baru lahir. Berdasarkan penelitian WHO vaksinasi hepatitis B menawarkan perlindungan 95 – 100% terhadap hepatitis B. Mencegah infeksi penyakit hepatitis B (HBV) sama halnya mencegah perkembangan komplikasi termasuk penyakit kronis dan kanker hati. Jika tidak dilakukan vaksinasi, maka bayi yang tertular penyakit hepatitis B baik dari sang ibu atau dari orang lain beresiko besar tidak akan sembuh. Kemudian dalam jangka 10 – 30 tahun, penyakit hepatitis B yang dialami bayi akan berkembang

atau kanker hati



(Cahyono, 2010). Masalah yang ditimbulkan dari kemunculan hepatitis B sangat beragam, mulai dari masalah kesehatan, epidemiologi dan sebagainya. Hal tersebut mengundang banyak perhatian dari para peneliti dari berbagai bidang untuk memberikan perannya dalam upaya mencari solusi yang tepat untuk menangani dampak tersebut, tak terkecuali oleh penerapan ilmu matematika.

Matematika merupakan salah satu bidang ilmu pengetahuan yang dapat digunakan untuk mengkaji dan meneliti dinamika berbagai permasalahan yang ada. Masalah – masalah tersebut ditransformasikan kedalam suatu pemodelan matematika. Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang menggambarkan perilaku dari permasalahan yang ditinjau dengan berbagai jenis asumsi – asumsi yang diberikan. Salah satu permasalahan yang paling banyak diteliti adalah pemodelan dalam bidang kesehatan khususnya yang terkait dengan penyebaran penyakit.

Sebagaimana dengan pembahasan sebelumnya, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian tentang penyebaran penyakit hepatitis B. Penelitian terkait hepatitis B sebelumnya pernah dilakukan juga oleh Altaf, (2018) yang berjudul “*media coverage campaign in hepatitis B transmission model*”, dimana Altaf, mempertimbangkan peran media massa sebagai alat kunci komunikasi dalam mengkampanyekan vaksinasi untuk pencegahan penyebaran penyakit hepatitis B. Sedangkan pada penelitian lain yang dilakukan oleh Maya Sari (2020) dengan judul “Solusi Numerik Model SIR pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B dengan Metode Perturbasi Homotopi”. Dengan menggunakan model tersebut Maya membahas tentang dinamika penyebaran virus hepatitis B dengan memperhatikan faktor imigrasi dan emigrasi yang terjadi pada populasi dengan menyajikan model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa (SPDB). Suryani, (2021) juga pernah meneliti tentang transisi penyebaran hepatitis B orde fraksional dengan meninjau pemberian obat.

Sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) nonlinear dapat diperumum menjadi sistem persamaan Diferensial Orde Fraksional (SPDF) dengan mengubah orde turunan pada sistem persamaannya dari $\alpha = 1$ menjadi $0 < \alpha \leq 1$. Hal tersebut sebagaimana yang telah dilakukan oleh Das & Gupta (2011) dalam penelitiannya yang berjudul “*A Mathematical model on Fractional Lotka-Volterra Equations*”. Angstman dkk, (2016) menganalisis dan modifikasi model matematika SIR yang berbentuk SPDB non linear kedalam bentuk sistem persamaan diferensial fraksional (SPDF).

Berdasarkan penjelasan diatas, penulis tertarik mengkaji penyebaran kasus Hepatitis B menggunakan model matematika orde fraksional. Penulis akan mengembangkan model yang diformulasikan oleh Maya Sari dari Model SIR menjadi model SVEIR melalui model orde fraksional. Selain dari formulasi tersebut, penulis melihat bagaimana pengaruh pemberian vaksinasi kepada individu yang rentan sebagai usaha untuk mengurangi tingkat penyebaran penyakit hepatitis B. Dengan melihat pertimbangan tersebut, penulis menambahkan kompartemen V (*Vaksinated*) dan x (*exposed*) yang menyatakan bagaimana pengaruh vaksinasi terhadap individu rentan m mengurangi penyebaran hepatitis B. Kemudian penulis akan meninjau pengaruh aksional α terhadap dinamika penyebaran penyakit hepatitis B. Berdasarkan itu maka penulis mengangkat penelitian dengan judul “Model Matematika SVEIR dan Penyebaran Penyakit Hepatitis B.”



1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana pengaruh pemberian vaksinasi terhadap penyebaran penyakit Hepatitis B dengan orde fraksional?.
2. Bagaimana pengaruh variasi orde fraksional alpha terhadap dinamika populasi penyebaran Hepatitis B pada masing – masing kompartemen dalam model matematika SVEIR?.

1.3 Tujuan Penelitian

Secara umum tujuan penelitian ini untuk menganalisis pengaruh vaksinasi pada model matematika orde fraksional pada penyebaran penyakit hepatitis B. secara khusus tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk Mengetahui pengaruh pemberian vaksinasi terhadap penyebaran penyakit Hepatitis B dengan parameter nilai alpha orde fraksional.
2. Mengetahui pengaruh variasi orde fraksional alpha terhadap dinamika populasi penyebaran Hepatitis B pada masing – masing kompartemen dalam model matematika SVEIR.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat membantu dan memberikan sumbangsi terhadap pengembangan pemahaman tentang model penyebaran penyakit hepatitis B dalam strategi penanganan penyebaran virus hepatitis B melalui pemberian vaksinasi menggunakan model matematika orde fraksional.

1.5 Batasan Masalah

Agar tidak menimbulkan penafsiran yang luas, diberikan batasan masalah dimana total populasi dibagi menjadi lima kompartemen yaitu: *Susceptible (S)*, *Vaksinated (V)*, *Exposed (E)*, *Infection (I)*, dan *Recovered (R)*.

1.6 Teori

1.6.1 Tinjauan Umum Kasus Hepatitis B

Hepatitis B adalah infeksi virus yang menyebabkan peradangan pada hati. Cara paling umum orang terinfeksi hepatitis B adalah: hubungan seksual dengan orang yang terinfeksi, penularan dari ibu yang terinfeksi ke bayinya di sekitar waktu kelahiran, dan berbagi jarum suntik dan peralatan narkoba lainnya oleh orang yang menyuntikkan atau menggunakan narkoba. Lebih dari 90% orang dewasa sembuh dari virus hepatitis B dalam waktu enam bulan setelah infeksi. Namun, sebagian besar bayi yang terinfeksi mengalami infeksi kronis (jangka panjang). Hal ini dapat menyebabkan mereka penyakit hati yang serius, seperti sirosis (jaringan parut pada hati) dan kanker hati akan hati biasanya terjadi secara bertahap selama 20-30 tahun pada orang dengan bagian besar kasus hepatitis B yang dilaporkan di Irlandia terjadi pada orang yang dia dari negara-negara dengan prevalensi hepatitis B yang lebih tinggi. Banyak yang atau di masa kanak-kanak dan mengalami infeksi kronis.



Hepatitis B menjadi penyakit yang wajib dilaporkan di Irlandia pada tahun 1981. Hepatitis B dapat dicegah dengan vaksinasi. Vaksin hepatitis B ditambahkan ke jadwal imunisasi utama di Irlandia pada bulan Oktober 2008, untuk anak-anak yang lahir mulai tanggal 1 Juli 2008. Vaksinasi juga dianjurkan untuk orang dewasa yang termasuk dalam kelompok "berisiko".

1.6.2 Model Epidemiologi dan Model Matematika Penyebaran Hepatitis B

Model adalah konsep yang digunakan untuk mempresentasikan sesuatu dan mengubahnya kedalam bentuk yang mudah dipahami (Winarno, 2009). Model matematika merupakan sekumpulan persamaan dan pertidaksamaan matematika yang menginterpretasikan permasalahan dunia nyata dalam bahasa matematika. Pemodelan matematika dapat dipandang sebagai proses membangun suatu model matematika untuk menggambarkan dinamika suatu sistem sehingga dapat diketahui atau diperkirakan sesuatu yang akan terjadi pada sistem tersebut dalam jangka waktu tertentu (Tri, dkk., 2015).

Pemodelan matematika banyak digunakan dalam berbagai disiplin ilmu, salah satunya adalah ilmu kesehatan. Pemodelan matematika dibidang kesehatan dikenal sebagai model epidemiologi (Herri, 2008). Model epidemiologi pada umumnya berfokus pada dinamika dari transisi atau perpindahan karakter antara individu dengan individu, populasi dengan populasi, daerah dengan daerah, bahkan negara dengan negara. Karakter tersebut dapat berbentuk penyakit, karakteristik genetik, dan bentuk lain seperti kultur. Salah satu istilah yang sering didengar dalam model epidemiologi adalah epidemik. Epidemik merupakan sebuah fenomena ketika sebuah penyakit tiba-tiba muncul dalam populasi dan menjangkit secara cepat sebelum penyakit tersebut menghilang dan kemudian muncul kembali dalam interval waktu tertentu. Selain epidemik, juga dikenal istilah lain, yaitu endemik dan pandemik. Endemik merupakan sebuah fenomena dimana suatu penyakit yang muncul akan selalu ada dalam suatu populasi. Sama halnya dengan endemik, pandemik juga merupakan fenomena munculnya suatu penyakit tetapi cakupannya lebih luas yaitu dalam suatu negara (Fred & Carlos, 2000).

Indonesia merupakan negara dengan angka kejadian hepatitis B tertinggi kedua di Asia Tenggara. Berdasarkan Riset Kesehatan Dasar 2007, satu dari sepuluh orang Indonesia terinfeksi hepatitis B. Pada tahun 2013, jumlah orang yang didiagnosis hepatitis B meningkat dua kali lipat dibandingkan tahun 2007. Hal ini dapat menunjukkan adanya peningkatan kewaspadaan dari masyarakat atau malah sebaliknya, peningkatan penyebaran virus hepatitis B. Hepatitis B merupakan penyakit hati yang disebabkan oleh virus hepatitis B. Penularannya bisa melalui darah maupun cairan tubuh. Media penularannya antara lain jarum suntik, persalinan, dan kontak seksual.

Pencegahan penyakit hepatitis B sangat penting, salah satunya dengan vaksin hepatitis B dewasa. Vaksin Hepatitis B untuk orang dewasa diperlukan untuk mencegah terkena hepatitis B,



akan kanak-kanak saja tidak cukup. Sebab, antibodi orang yang terkena hepatitis B bisa dengan pertambahan usia, bahkan dapat mencapai 0 apabila tidak memperoleh dewasa. Jika kadar antibodi tidak cukup, bahkan habis, maka orang tersebut tidakindungan terhadap hepatitis B. Pada orang dewasa yang sehat berusia di bawah 40 memberikan respons antibodi yang menjaga tubuh sebanyak 30-55%.

1.6.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu, persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas. Dalam persamaan diferensial, ada yang disebut dengan orde. Orde ini menyatakan tingkat turunan dari suatu persamaan. Secara umum persamaan diferensial biasa orde n dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f(t, y, Dy, D^2y, \dots, D^ny) = 0,$$

dengan t merupakan variabel bebas, $y(t)$ adalah variabel tak bebas dan D adalah operator turunan $D = \frac{d}{dt}$. Suatu persamaan diferensial biasa yang ber orde n disebut sebagai persamaan diferensial yang linear apabila memenuhi bentuk umum :

$$a_0 D^n y(t) + a_1 D^{n-1} y(t) + \dots + a_n y(t) = g(t), \quad (1.1)$$

dengan $a_0 \neq 0$, t adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas. Pada persamaan (1.1) $a_0, a_1, \dots, a_n$ merupakan koefisien dan $g(t)$ merupakan suatu fungsi dimana jika $g(t) = 0$ maka persamaan (1.1) disebut sebagai persamaan homogen dan jika $g(t) \neq 0$ maka disebut sebagai persamaan non homogen (Boyce & Diprima, 2009).

Persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear apabila variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya. Sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui, dengan $n > 1, n \in \mathbb{N}$. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi n tersebut sebagai berikut :

$$Dy_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n),$$

$$Dy_2 = f_2(t, y_1, \dots, y_n),$$

$$\vdots$$

$$Dy_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n),$$

dengan f_i adalah fungsi dari n variabel, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $n \geq 1$ (Boyce & Diprima, 2009).



raksional

sional merupakan sebuah cabang matematika yang membahas teori serta aplikasi dengan memperluas ordenya ke dalam bilangan fraksional. Sejarah awal kalkulus ketika G.W Leibniz bertanya kepada L'Hospital pada tahun 1665 tentang apa arti

dari turunan “ $\frac{d^n y}{dx^n}$ ” jika $n = \frac{1}{2}$, bagaimanakah jika n adalah fraksional atau pecahan. Berawal dari pertanyaan itu, banyak ahli matematika mulai mengembangkan topik tersebut, seperti L. Euler, P.S Laplace, J.B Fourier, N.H Abel, B. Riemann, A.K Grunwald, A.V.Letnikov. Perkembangan kalkulus fraksional menjadi awal untuk kemudian diaplikasikan dalam persamaan diferensial fraksional yaitu suatu persamaan yang turunannya memuat orde fraksional (Miller & Ros, 1993).

Untuk mempelajari sistem dinamik orde fraksional, maka akan dipelajari terlebih dahulu mengenai konsep-konsep dasar kalkulus fraksional yang akan digunakan, seperti fungsi khusus dalam kalkulus fraksional, turunan dan integral orde fraksional, sistem dinamik orde fraksional dan skema numerik yang akan diaplikasikan pada model yang digunakan.

1.6.5 Fungsi Khusus dalam kalkulus Fraksional

Pada tahun 1819, Lacroix menjadi matematikawan pertama yang mendefinisikan turunan untuk orde sebarang bilangan. Lacroix mengembangkan suatu contoh dengan melakukan generalisasi dari turunan orde bilangan bulat. Dengan memisalkan $y = x^m$, dengan m merupakan bilangan bulat positif. Lacroix kemudian memperluas orde turunannya dengan menyatakan turunan orde ke- n sebagai berikut (Ross, 1977):

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n \quad (1.2)$$

Persamaan (1.2) dapat dinyatakan dalam fungsi khusus yang digunakan dalam kalkulus fraksional sebagai berikut :

Definisi 1.1 (Podlubny, 1999)

Fungsi gamma $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Salah satu aturan dasar yang berlaku pada fungsi gamma diberikan pada Teorema 1.1 dan 1.2 sebagai berikut :

Teorema 1.1 (Diethelm, 2010)

Untuk setiap $n > 0$ berlaku $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Bukti :

Persamaan tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan integral parsial sebagai berikut :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z). \star$$

Teorema 1.2 (Diethelm, 2010)

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$



Teorema 1.2 digunakan induksi matematika sebagai berikut :

1, $\Gamma(1) = 1$ benar ,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^0 dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

- b) Jika benar untuk $n = k$, akan ditunjukkan jika $\Gamma(k) = (k - 1)!$ benar, maka $\Gamma(k + 1) = k!$ benar.

Sesuai Teorema 1.1 di peroleh :

$$\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k) = k(k - 1)!.$$

Oleh karena (a) dan (b) terpenuhi, maka Teorema 1.2 terbukti benar. *

Dengan menggunakan Teorema 1.2, Persamaan (1.2) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih umum kedalam fungsi gamma sebagai berikut :

$$\frac{d^m y}{dx^n} = \frac{d^m y^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m - n)!} t^{m-n} = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)} x^{m-n}, \quad (1.3)$$

dengan m merupakan bilangan bulat positif dan n merupakan bilangan rasional.

Definisi 1.2 : Fungsi Beta (Podlubny, 1999),

Fungsi Beta didefinisikan sebagai :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\beta-1} dt, \quad (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0).$$

Fungsi Beta juga dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi Gamma, yaitu ;

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

1.6.6 Turunan dan Integral Fraksional

Definisi 1.3 Intergral Fraksional Rienmann – Liouville (Podlubny, 1999).

Misalkan $f \in L^1[0, \infty)$. untuk $t > 0$, integral fraksional Rienmann – Liouville dengan orde $\alpha \geq 0$ didefinisikan sebagai berikut :

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

$$J^0 f(t) = f(t)$$

untuk $\alpha \leq t \leq b$, maka bentuk integral tersebut dapat ditulis sebagai

$$J_\alpha^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (t - s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Contoh 1.1 Misalkan $f(t) = t^\beta$, maka integral fraksional Rienmman – Liouville orde α dari $f(t)$ untuk $\alpha > 0$ adalah

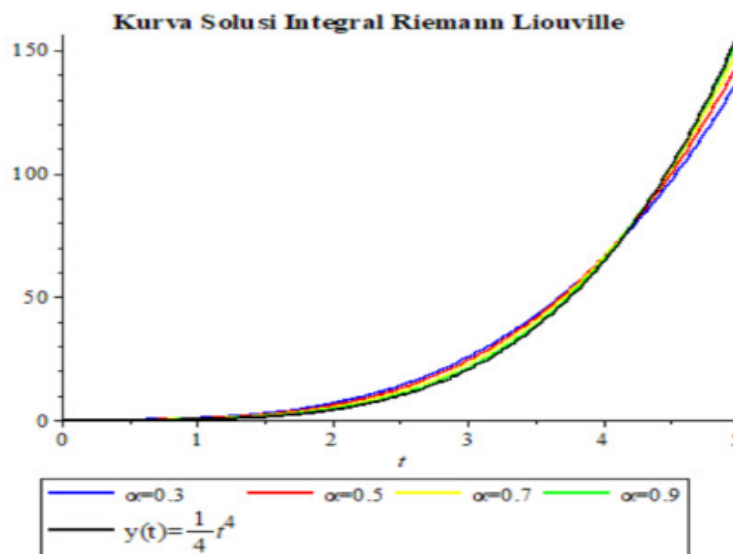


$$\begin{aligned} J^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (t - s)^{\alpha-1} s^\beta ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} s^\beta ds. \end{aligned}$$

Misalkan $\eta = \frac{s}{t}$ maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 J^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^t t^{\alpha-1} (1-\eta)^{\alpha-1} (\eta t)^\beta t d\eta, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^t t^{\alpha+\beta} \eta^\beta (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\
 &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^t \eta^\beta (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\
 &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^{\alpha+\beta}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan nilai $\beta = 3$, kurva solusi dari Contoh 1.1 diilustrasikan dalam Gambar 1.1. Pada saat α mendekati 1 maka kurva solusi integral fraksional Riemann – Liouville $J^\alpha t^\beta$ akan semakin dekat dengan solusi integral Riemann $y(t) = \int_a^b t^3 dt, 0 \leq t \leq 5$.



Gambar 1.1 Plot Integral Fraksional Riemann-Liouville orde $-\alpha$.

Definisi 1.4 Turunan Fraksional Riemann-Liouville (Podlubny, 1999)

Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, operator turunan ${}^{RL}D_t^\alpha$ didefinisikan sebagai

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = D^n J_{\alpha}^{n-\alpha} f(t),$$



$$\frac{1}{(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_{\alpha}^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \quad t > \alpha,$$

langan bulat terkecil yang lebih besar dari $\alpha, n-1 \leq \alpha < n$.

alkan $f(t) = t^\beta$, maka turunan fraksional Riemman – Liouville orde

$< \alpha < 1$ adalah :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}_\alpha D_t^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_\alpha^t (t-s)^{-\alpha} s^\beta ds \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_\alpha^t t^{-\alpha} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} s^\beta ds \right)
\end{aligned}$$

Misalkan $\eta = \frac{s}{t}$, maka diperoleh sistem dinamik orde fraksional

$$\begin{aligned}
{}^{RL}_\alpha D_t^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_\alpha^t t^{-\alpha} (1-\eta)^{-\alpha} (t\eta)^\beta t d\eta \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_\alpha^t t^{\beta-\alpha+1} (1-\eta)^{-\alpha} \eta^\beta d\eta \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[t^{\beta-\alpha+1} \int_\alpha^t (1-\eta)^{-\alpha} \eta^\beta d\eta \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} [t^{\beta-\alpha+1} B(\beta+1, 1-\alpha)] \\
&= \frac{B(\beta+1, 1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} [t^{\beta-\alpha+1}] \\
&= \frac{B(\beta+1, 1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)+2} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha},
\end{aligned}$$

dengan $B(\beta+1, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+2)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta-\alpha+2)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)+1} t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Karena $\Gamma(\beta-\alpha+2) = \Gamma((\beta-\alpha+1)+1) = (\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)$ sehingga

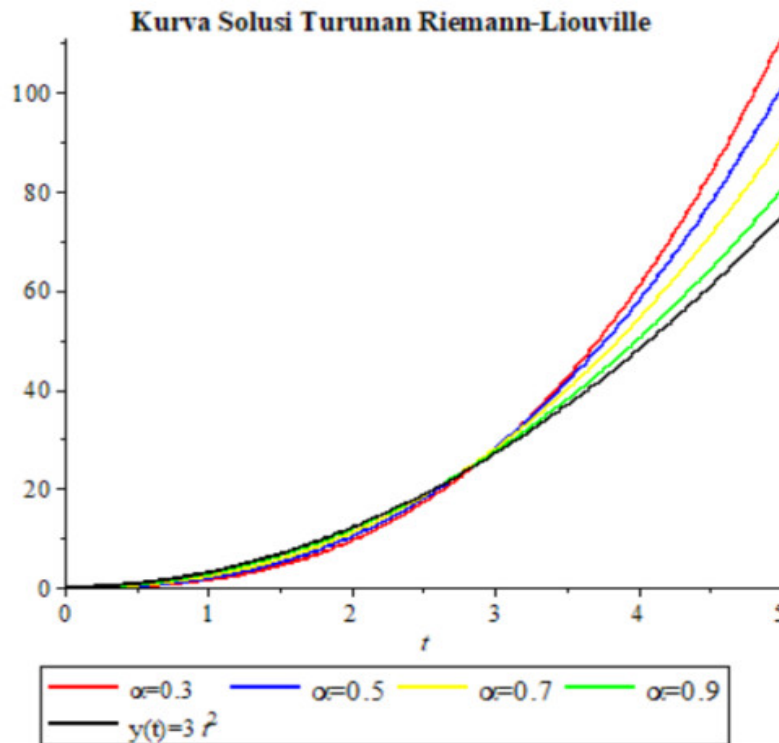
$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan nilai $\beta = 3$, kurva solusi dari Contoh 1.2 diilustrasikan dalam Gambar

1.2. Pada saat α semakin mendekati 1 maka kurva solusi turunan fraksional Riemann – Liouville ${}_\alpha D_t^\alpha$

t dengan solusi turunan orde satu $y(t) = \frac{d}{dt}(t^3)$.





Gambar 1.2 Plot turunan Fraksional Riemann – Liouville dengan orde $-\alpha$.

Definisi 1.5 Turunan Fraksional Caputo (Tavazoei & Haeri, 2007)

Misalkan $\alpha > 0$, $t > 0$ dan $n \in \mathbb{N}$. Turunan fraksional Caputo ${}_0^C D_t^\alpha := \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ dengan orde fraksional α , untuk fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx, & n-1 < \alpha < n, \\ f^{(n)}(t), & \alpha = n, \end{cases}$$

Contoh 1.3 Misalkan $f(t) = t^\beta$, maka turunan fraksional Caputo orde α dari $f(t)$ untuk $0 < \alpha < 1$ adalah:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha} \frac{d}{dx} x^\beta dx, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha} \beta x^{\beta-1} dx, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t t^{-\alpha} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} \beta x^{\beta-1} dx. \end{aligned}$$

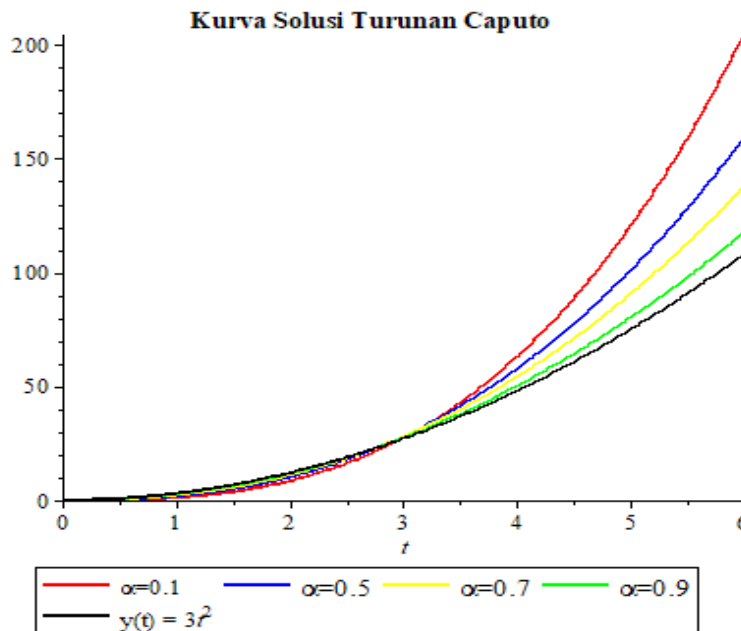
Misalkan $\eta = \frac{x}{t}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t t^{-\alpha} (1-\eta)^{-\alpha} \beta (\eta t)^{\beta-1} t d\eta, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \beta t^{-\alpha+\beta} (1-\eta)^{-\alpha} \eta^{\beta-1} d\eta, \\ &= \frac{\beta t^{-\alpha+\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\eta)^{-\alpha} \eta^{\beta-1} d\eta, \\ &= \frac{\beta t^{-\alpha+\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} B(\beta, 1-\alpha), \\ &= \frac{\beta t^{-\alpha+\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \beta t^{-\alpha+\beta}, \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Kurva solusi dari Contoh 2.3 dengan nilai $\beta = 3$ diilustrasikan dalam Gambar 1.3. Pada saat nilai α semakin dekat dengan satu, maka kurva solusi turunan fraksional Caputo ${}_0^C D_t^\alpha t^\beta$ akan semakin dekat dengan solusi turunan orde satu $y(t) = \frac{d}{dt}(t^3)$.



Gambar 1.3. Plot turunan Fraksional Caputo dengan orde $-\alpha$.

1.6.7 Sistem Dinamik Orde Fraksional

Sistem dinamik orde fraksional merupakan sistem persamaan diferensial yang menggunakan turunan dengan orde fraksional yang didefinisikan sebagai (Ahmed dkk, 2006) :

$${}_a^C D_t^\alpha x(t) = f(x(t), t) \quad (1.4)$$

dengan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $x \in \mathbb{R}^n$. Diasumsikan $0 < \alpha \leq 1$ dengan ${}_a^C D_t^\alpha$ merupakan turunan orde fraksional Caputo yang memenuhi.

$${}_a^C D_t^\alpha x_i f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{dx_i f(s)}{ds} ds, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Sistem (1.4) disebut sebagai sistem *autonomous* jika sistem tersebut tidak bergantung terhadap waktu secara eksplisit. Sebaliknya jika bergantung secara eksplisit terhadap waktu, maka sistem (1.4) disebut sistem *non-autonomous*. Pada penelitian ini, sistem yang akan dikaji merupakan sistem dinamik n orde fraksional yang didefinisikan sebagai:

$${}_a^C D_t^\alpha x(t) = f(x(t), t), x \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$



Titik keseimbangan merupakan suatu titik yang menyatakan keadaan dari suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Titik kesetimbangan untuk sistem orde fraksional memiliki definisi yang sama dengan sistem orde fraksional orde integer. Definisi titik kesetimbangan sistem orde fraksional adalah sebagai berikut :

Definisi 1.6 Titik Kesetimbangan orde fraksional (Keshtkar dkk., 2014).

$\bar{x}$ dikatakan titik kesetimbangan dari sistem (1.6) jika memenuhi : ${}^C D_t^\alpha x(t) = 0$.

Kestabilan lokal titik kesetimbangan $\bar{x}$ dapat diketahui dengan mempelajari perilaku solusi sistem (2.6) disekitar titik kesetimbangan tersebut. Perilaku solusi disekitar titik kesetimbangan dapat dianalisa dengan mengasumsikan

$$x(t) = \bar{x} + y(t), \quad \|y(t)\| \ll 1.$$

Sehingga :

$${}^C D_t^\alpha x(t) = {}^C D_t^\alpha \bar{x} + {}^C D_t^\alpha y(t) = f(x(t)) = f(\bar{x} + y(t)).$$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor disekitar $\bar{x}$ maka diperoleh :

$${}^C D_t^\alpha \bar{x} + {}^C D_t^\alpha y(t) = f(\bar{x} + y(t)) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y(t) + O(\|y(t)\|^2)$$

dengan

$$Df(\bar{x}) = \frac{\partial f(x)}{\partial t},$$

oleh karena ${}^C D_t^\alpha \bar{x} = 0$, maka diperoleh :

$${}^C D_t^\alpha y(t) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y(t) + O(\|y(t)\|^2). \quad (1.7)$$

Karena diasumsikan bahwa $\|y(t)\| \ll 1$, suku $O(\|y(t)\|^2)$ bernilai jauh lebih kecil dari $y(t)$ sehingga suku tersebut dapat diabaikan. Perhatikan bahwa perilaku solusi $y(t)$ disekitar titik asal menunjukkan perilaku solusi $x(t)$ disekitar $\bar{x}$. Oleh karena itu, perilaku solusi di sekitar $\bar{x}$ dapat dipelajari dengan hanya memperhatikan pendekatan linear dari persamaan (1.7), yaitu :

$${}^C D_t^\alpha \bar{y}(t) = Df(\bar{x})y(t) \quad (1.8)$$

Oleh karena $J = Df(\bar{x})$ adalah matriks Jacobi, maka sistem persamaan (1.8) dapat ditulis menjadi :

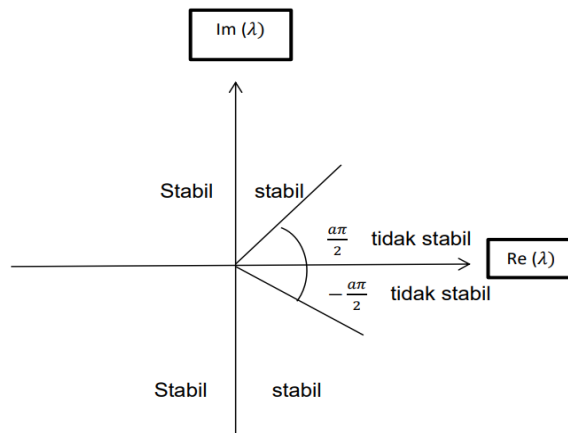
$${}^C D_t^\alpha \bar{y}(t) = Jy(t).$$



Stabilan lokal sistem persamaan diferensial fraksional (Tavazoei & Haeri., 2007)

$= f(x)$, $0 < \alpha \leq 1$, dan $x \in \mathbb{R}^n$, merupakan sistem persamaan diferensial fraksional. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ merupakan solusi dari $f(x) = 0$. Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dikatakan stabil jika untuk semua nilai eigen λ_j dari matriks Jacobian yang dievaluasi di titik kesetimbangan memenuhi kondisi $|\arg(\lambda_j)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Titik kesetimbangan $\bar{x}$ menjadi titik tidak stabil jika tidak memenuhi syarat pada teorema 2.3 atau dengan kata lain terdapat suatu nilai eigen λ_j yang memenuhi kondisi $|\arg(\lambda_j)| > \frac{\alpha\pi}{2}, j = 1, 2, \dots, n$. Gambar 1.4 memperlihatkan daerah kestabilan untuk sistem fraksional.



Gambar 1.4. Daerah kestabilan sistem persamaan diferensial orde fraksional dengan $0 < \alpha \leq 1$.

Dari gambar 1.4 dapat dilihat bahwa pemilihan nilai α pada orde fraksional yang digunakan dapat mempengaruhi daerah kestabilan yang terbentuk pada sistem persamaan diferensial orde fraksional.

1.6.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah suatu ambang batas penularan suatu penyakit yang disebabkan oleh individu terinfeksi dalam suatu populasi yang semuanya rentan untuk terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar biasa disimbolkan dengan R_0 . Fungsi bilangan reproduksi dasar digunakan untuk menentukan apakah disuatu wilayah tertentu terjadi endemik atau tidak.

Suatu kondisi sedemikian sehingga jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit menjadi tidak stabil dan penyakit berpeluang untuk menyebar didalam populasi. Jika nilai $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan penyakit tidak menyerang populasi (Dressche & Watmough, 2002).

Didefinisikan X_s sebagai himpunan semua kondisi bebas penyakit yaitu:

$$X_s = \{x \geq 0 : x_i = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

Misalkan $F_i(x)$ menyatakan laju kemunculan infeksi baru dalam kompartemen i , $V_i^+(x)$ menyatakan laju perpindahan individu kedalam kompartemen i dan $V_i^-(x)$ menyatakan laju perpindahan individu keluar dari kompartemen i . Perhatikan bahwa F_i terdiri dari infeksi baru sedangkan V_i mencakup kumpulan individu terinfeksi yang berpindah dari satu kompartemen yang lain. Diasumsikan bahwa setiap fungsi terturunkan secara kontinu kali dalam setiap variabel. Model penyebaran penyakit dinyatakan dengan sistem



$$\dot{x}_i = f_i(x) = F_i(x) - V_i(x), i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.9)$$

dengan

$$V_i(x) = V_i^-(x) - V_i^+(x).$$

Fungsi $f_i(x)$ memenuhi asumsi – asumsi sebagai berikut :

- Setiap fungsi mewakili perpindahan langsung pada individu, sehingga semua variabel bernilai tidak negatif. Dengan demikian jika $x \geq 0$, maka $F_i, V_i^-, V_i^+ \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.
- Jika kompartemen kosong, maka tidak akan ada penularan individu dari kompartemen pada kematian, infeksi, atau lainnya. Dengan demikian, jika $x_i = 0$ maka $V_i^- = 0$. untuk $i = 1, 2, \dots, m$.
- Kondisi selanjutnya muncul dari fakta bahwa kejadian dari infeksi menjadi tidak infeksi adalah nol, $F_i = 0$ jika $i > m$.
- Diasumsikan daerah bebas penyakit adalah daerah yang *invariant* yaitu daerah tersebut mempunyai populasi yang bebas penyakit maka populasi tersebut akan tetap bebas dari penyakit (tidak ada infeksi yang dihasilkan). Kondisi ini dinyatakan sebagai berikut: jika $\bar{x} \in X_s$ maka $F_i(x) = 0$ dan $V_i^+(x) = 0$ untuk $i = 1, \dots, m$.
- Kondisi tersebut terkait dengan turunan dari sistem f_i di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit. Diasumsikan $\bar{x}$ stabil asimtotik secara lokal, yang berarti bahwa jika populasi berada disekitar $\bar{x}$ maka populasi tersebut akan konvergen ke $\bar{x}$ berdasarkan sistem linear,

$$\dot{x} = Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.10)$$

dengan $Df(\bar{x})$ merupakan matriks Jacobi.

Hal tersebut berarti bahwa jika terjadi penambahan infeksi baru dalam populasi, penambahan tersebut tidak menyebabkan kondisi endemik. Kondisi tersebut dapat ditulis sebagai berikut: jika $F(x) = 0$, maka matriks $Df(\bar{x})$ mempunyai bagian real dari nilai eigen matriks semuanya bernilai negatif. Jadi kondisi tersebut memungkinkan untuk mempartisi matriks $Df(\bar{x})$ yang ditunjukkan dalam Lemma 1.1.

Lemma 1.1 Jika $\bar{x}$ merupakan titik kesetimbangan bebas infeksi dari (2.4) dan $f_i(x)$ memenuhi (a) - (e), maka matriks $Df(\bar{x})$ dan $DV(\bar{x})$ dapat dipartisi menjadi

$$Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DV(\bar{x}) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

dengan F dan V adalah matriks $m \times m$ yang ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right], \quad \text{dan } V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right] \text{ dengan } 1 \leq i, \quad j \leq m.$$

Matriks F adalah matriks tak negatif, V adalah matriks nonsingular, dan semua nilai eigen J_4 merupakan real yang positif.

Matriks FV^{-1} adalah matriks generasi dari model (1.9), maka bilangan reproduksi dasar dapat dinyatakan sebagai:

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

merupakan spektral radius dari matriks (FV^{-1}) (Dressche & Watmough, 2002).



1.6.10 Kriteria Routh-Hurwitz Sistem Persamaan Diferensial Fraksional

Dalam menentukan kestabilan suatu sistem persamaan diferensial, salah satu cara yang dapat digunakan adalah dengan melihat nilai eigennya. Nilai eigen dapat diperoleh dengan melihat akar-akar dari suatu persamaan karakteristik. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menentukan jenis nilai eigen dari persamaan karakteristik adalah dengan kriteria Routh – Hurwitz.

Definisi 1.7 (Ahmed, dkk., 2006).

Diskriminan $D(p)$ dari polynomial $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ didefinisikan oleh $D(p) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(p, p')$ dengan p' adalah turunan dari p dan $R(p, q)$ adalah determinan $(n+1) \otimes (n+1)$, dimana $q(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n$.

Berdasarkan Definisi 1.7 maka diperoleh :

a) Diskriminan untuk persamaan karakteristik dengan polynomial orde 2 ($n = 2$) adalah

$$D(p) = a_1^2 - 4a_2.$$

b) Diskriminan untuk persamaan karakteristik dengan polynomial orde 3 ($n = 3$) adalah

$$D(p) = - \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\ = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3a_2^3 - 27a_3^2.$$

c) Diskriminan untuk persamaan karakteristik dengan polynomial orde 4 ($n = 4$) adalah

$$D(p) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 4 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Teorema 1.4 Kriteria Routh-Hurwitz orde fraksional (Ahmed, dkk, 2006)

Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem dinamik orde fraksional (1.6) untuk $0 \leq \alpha < 1$ dikatakan stabil asimtotik lokal apabila memenuhi syarat berikut :

a) Untuk $n = 1$ maka $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, jika $a_1 > 0$.

b) Untuk $n = 2$ maka $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ $i = 1, 2$, jika memenuhi

i. $D(p) > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$,

ii. $D(p) < 0, a_1 < 0$ dan $\left| \tan^{-1} \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{a_1} \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$.

c) Untuk $n = 3$ maka $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ $i = 1, 2, 3$ jika memenuhi :

$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3$ untuk semua $0 < \alpha \leq 1$,

$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0$, dan $\alpha > \frac{2}{3}$,

$a_1 > 0, a_2 > 0, a_1a_2 = a_3$, untuk semua $0 < \alpha < 1$.

> 3 , jika $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ menyatakan determinan Routh – Hurwitz sebagai berikut :



$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

maka

$$\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n - 2, \\ a_n > 0, \quad \Delta_{n-1} = 0$$

Merupakan syarat cukup sehingga kondisi $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ terpenuhi untuk setiap $0 \leq \alpha < 1$.

Bukti dapat dilihat pada konjektur (Ahmad, dkk. 2006).

1.6.11 Metode Eksplisit Grunwald – Letnikov

Metode Grunwald Letnikov merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde fraksional baik yang berbentuk linear maupun persamaan diferensial yang nonlinear. Setelah sebelumnya disajikan definisi dari turunan Riemann – Liouville (Definisi 1.4) dan turunan Caputo (Definisi 1.5), maka selanjutnya Grunwald – Letnikov pada tahun 1867 membuat suatu definisi dalam suatu bentuk beda hingga yang dapat dinyatakan dalam definisi turunan Riemann – Liouville. Pendekatan solusi ini memberikan suatu interpolasi antara turunan dengan orde integer $m - 1$ dan m . Definisi 1.4 dan Definisi 1.5 memiliki pendefinisian yang berbeda, dalam bentuk direfensi keduanya dapat dinyatakan dalam

$$D_C^\alpha y(t) = D_{RL}^\alpha y(t) - \sum_{v=0}^{m-1} r_v^\alpha(t) y^{(v)}(0), \quad r_v^\alpha(t) = \frac{t^{v-\alpha}}{\Gamma(v+1-\alpha)}.$$

Penggunaan operator turunan Caputo $D_C^\alpha y(t)$ memiliki kelebihan jika digunakan dalam persamaan diferensial dibandingkan bentuk yang didefinisikan Riemann – Liouville. Hal tersebut terletak pada syarat nilai awalnya. Pada kasus turunan RL dan turunan Caputo, bentuk syarat nilai awalnya dinyatakan berturut – turut sebagai berikut ;

$$D_{RL}^{\alpha-v} y(0) = b_v \text{ dan } y^{(v-1)}(0) = b_v \text{ untuk } v = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Dari bentuk tersebut, pendefinisian nilai awal untuk turunan Caputo lebih familiar dibandingkan dengan turunan operator Riemann-Liouville dikarenakan bentuk nilai awalnya serupa dengan nilai awal turunan integer. Secara umum, penyelesaian sistem persamaan diferensial nonlinear dengan menggunakan orde fraksional secara analitik sulit untuk dilakukan, sehingga dikembangkanlah solusi numerik untuk mengaproksimasi solusi analitik dari suatu sistem persamaan diferensial orde fraksional. Terdapat banyak metode numerik yang dapat digunakan, salah satunya adalah dengan menggunakan metode eksplisit Grunwald – Letnikov.

Pada metode ini, turunan yang digunakan adalah definisi turunan operator Caputo. Misalkan persamaan diferensial fraksional menggunakan turunan Caputo

$$D_C^\alpha y(t) = f(y(t)), y(\tau_0) = y_0 (0 < \alpha < 1). \quad (1.11)$$

asumsi bahwa terhadap suatu solusi tunggal $y = y(\tau)$ pada interval $[0, T]$ dengan $\tau_0 = 0$ dapat berbentuk homogen maupun nonhomogen. Kemudian untuk diskritisasi dipilih $0 = \tau_1 < \dots < \tau_{N+1} = T$ dengan $\tau_{k+1} - \tau_k = h$ serta memisalkan y_k adalah aproksimasi



dari solusi sebenarnya yaitu $y(\tau_k)$. Aproksimasi dengan metode Grunwald – Letnikov selanjutnya diterapkan pada ruas kiri dari persamaan (1.11), dimana $\tau_{n+1} = (n+1)h$ serta ruas kanan diaproksimasi oleh $f(y_n)$, sehingga bentuk aproksimasi dari metode eksplisit Grunwald – Letnikov adalah (Scherer dkk, 2011),

$$y_{n+1} - \sum_{v=1}^{n+1} C_v^\alpha y_{n+1-v} - r_{n+1}^\alpha y_0 = h^\alpha f(y_n), \quad (1.12)$$

dengan

$$r_{n+1}^\alpha = h^\alpha r_0^\alpha(t_{n+1}) = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

$$c_v^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha+1}{v}\right) c_{v-1}^\alpha, \quad c_1^\alpha = \alpha.$$



BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan merupakan penelitian studi literatur. Penelitian studi literatur merupakan penelitian yang dimana peneliti mengumpulkan rujukan – rujukan pendukung yang dibutuhkan yang berkaitan dengan model penyebaran penyakit hepatitis B.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Lab. Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Hasanuddin. Waktu yang direncanakan untuk melakukan penelitian ini dimulai sejak bulan Januari 2024.

2.3 Prosedur Pelaksanaan Penelitian

Secara umum gambaran penelitian model matematika orde fraksional ini adalah sebagai berikut :

1. Identifikasi masalah

Langkah awal dari penelitian ini adalah terlebih dulu melakukan identifikasi masalah awal yang akan dijadikan topik pada penelitian, yaitu studi literatur terkait data dan informasi mengenai penyakit hepatitis B. Kemudian mengidentifikasi permasalahan yang berkaitan dengan topik tersebut, dimana fokus penelitian ini berkaitan dengan model matematika SVEIR orde Fraksional pada Hepatitis B.

2. Stusi Literatur

Pada tahap studi literatur, penulis mengumpulkan informasi serta mempelajari buku dan jurnal – jurnal yang berkaitan dengan topik penelitian yang diangkat.

3. Formulasi model.

Setelah tahapan studi literatur dilakukan, selanjutnya akan dibuatkan kontruksi model penyebaran penyakit hepatitis B yang mempresentasikan masalah - masalah yang dibahas dalam penelitian ini, serta menyusun asumsi – asumsi yang digunakan pada model tersebut dengan turunan orde fraksional.

4. Analisis dinamik.

Adapun Langkah analisis dinamik yang dilakukan pada tahap ini untuk model matematika orde fraksional pada penyakit hepatitis B adalah sebagai berikut :

- a. Menentukan model SVEIR dengan meninjau orde fraksional.
- b. Menentukan titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemic dari model.
- c. Menentukan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0).



- d. Menganalisis kestabilan disekitar titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik menggunakan persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks jacobian.

5. Penyelesaian numerik

Penyelesaian model dilakukan dengan menggunakan metode numerik yaitu metode eksplisit Grunwald – Letnikov. Adapun Langkah – langkahnya adalah sebagai berikut :

- a. Menentukan skema metode eksplisit Grunwald – Letnikov untuk persamaan pada model pada penyakit hepatitis B.
- b. Menentukan nilai parameter alpha orde fraksional yang diinginkan.
- c. Mensubstitusi nilai parameter dan nilai orde fraksional α .
- d. Menentukan iterasi untuk kondisi awal
- e. Melakukan iterasi menggunakan skema Grunwald-Letnikov untuk memperoleh populasi untuk setiap nilai alpha dari waktu ke waktu.

2.4 Simulasi Model

Simulasi numerik dari model ini dilakukan dengan menggunakan bantuan software Matlab.

2.5 Penarikan Kesimpulan

Setelah menganalisa dan melakukan simulasi numerik terhadap model, maka tahap terakhir adalah menarik suatu kesimpulan dari hasil- hasil yang diperoleh.





Optimized using
trial version
www.balesio.com