

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Rabies adalah penyakit yang ditularkan melalui gigitan atau cakaran hewan yang terinfeksi *Lyssavirus* (A, M., Islam et al., 2020). *Lyssavirus*, yang dikenal sebagai virus rabies, merupakan spesies prototipe yang paling luas dan paling berbahaya bagi kesehatan masyarakat. Penyakit ini menjadi ancaman serius di Asia Tenggara, Afrika, dan Amerika Latin, dan berbagai wilayah lain di seluruh dunia meskipun jarang terjadi (Hailemichael et al., 2022). Rabies menyebabkan banyak kematian setiap tahun di seluruh dunia, lebih dari 99% kasus kematian disebabkan oleh rabies yang ditularkan oleh anjing (A, M., Islam et al., 2020).

Rabies pada anjing adalah penyakit virus yang mematikan dan menyerang sistem saraf pusat. Penyakit ini ditandai oleh dua tahap klinis utama, yaitu tahap *prodromal* dan tahap *furious*. Memahami kedua tahap ini sangat penting untuk diagnosis dan penanganan yang tepat. **Tahap Prodromal:** Tahap awal infeksi rabies ini ditandai dengan gejala yang tidak spesifik, seperti demam, perubahan perilaku, dan manifestasi neurologis ringan. Fase ini terjadi baik pada rabies jenis *furious* maupun *paralytic* dan biasanya berlangsung selama beberapa hari sebelum berkembang menjadi gejala yang lebih parah (Rustad et al., 2015). **Tahap Furious:** tahapan ini dikenal sebagai rabies ensefalitis ditandai dengan hiperaktivitas atau perilaku agresif, serta gejala neurologis seperti hidrofobia dan hipersalivasi. Rabies pada tahap ini merupakan bentuk yang paling umum, mencakup sekitar 70-80% kasus rabies pada anjing (Lippi et al., 2021). Selama tahap ini, virus mengalami peningkatan replikasi di otak, terutama di belahan otak, dengan akumulasi RNA virus rabies dan antigen yang lebih tinggi. Kondisi ini dikaitkan dengan tingkat neuroinvasivitas yang tinggi dan peradangan ringan (Laothamatas et al., 2011).

Gigitan anjing yang terinfeksi *Lyssavirus* dapat menyerang sistem saraf pusat manusia dan menyebabkan ensefalomielitis akut yang mematikan (Dacheux et al., 2011). Pada manusia, infeksi rabies diawali dengan masa inkubasi yang bervariasi, biasanya antara 3 hingga 12 minggu, tetapi dapat berlangsung dari beberapa hari hingga beberapa bulan, dan jarang melebihi 6 bulan (Brown et al., 2011). Selama masa inkubasi, gejala seperti demam, sakit kepala, dan kelelahan biasanya tidak muncul. Karena rabies hampir selalu berakibat fatal setelah munculnya gejala, upaya pencegahan sangat penting untuk mengurangi risiko penularan (John et al., 2015).

Menurut *World Health Organization* (WHO) 2023, rabies adalah penyakit yang dapat dicegah melalui vaksinasi dan masih ditemukan di lebih dari 150 negara dan wilayah. Setiap tahun, rabies menyebabkan puluhan ribu kematian, terutama di Asia dan Afrika, dengan sekitar 40% korbannya adalah anak-anak di bawah usia 15 tahun. Gigitan anjing merupakan sumber utama penularan rabies pada manusia dan menyumbang hingga 22% dari semua kasus rabies pada manusia. Penyakit ini dapat dikendalikan dengan vaksinasi anjing dan pencegahan gigitan anjing.

Organisasi internasional telah berkomitmen untuk menghilangkan kematian akibat rabies yang ditularkan oleh anjing secara global pada tahun 2030 (WHO., 2018). Selain itu, organisasi ini juga menyusun protokol ilmiah untuk mendukung upaya pemberantasan

rabies seperti kemajuan dalam ilmu pengetahuan, teknologi, kelembagaan, dan ekonomi sehingga meningkatkan optimisme bahwa rabies yang ditularkan oleh anjing dapat diberantas pada tahun 2030 (Changalucha et al., 2021). Sejumlah penelitian menunjukkan bahwa vaksinasi massal pada populasi anjing adalah metode yang paling efektif dan ekonomis untuk memberantas rabies. Beberapa kebijakan sebelumnya yang menekankan pemusnahan anjing telah terbukti tidak efektif dalam pengendalian rabies (Rysava et al., 2023). Meskipun banyak penelitian telah dilakukan untuk mencari pengobatan setelah gejala muncul, tindakan pencegahan masih dianggap sebagai pendekatan yang paling efektif dan hemat biaya (Jaswant et al., 2024). Vaksinasi anjing telah terbukti sebagai strategi yang paling efisien untuk mengendalikan rabies, dan diperkirakan bahwa rabies yang ditularkan oleh anjing dapat dieliminasi dengan memvaksinasi setidaknya 70% populasi anjing yang berisiko setiap tahunnya (Kunkel et al., 2021). Berbagai metode vaksinasi telah dikembangkan untuk meningkatkan efektivitas serokonversi sekaligus meminimalkan biaya vaksinasi (Jaswant et al., 2024).

Pemodelan matematika telah memberikan wawasan berharga mengenai dinamika penularan rabies serta strategi pengendaliannya. Model-model ini membantu dalam memahami pola penularan serta menilai efektivitas berbagai metode pengendalian dan pemberantasan penyakit ini. Berbagai model matematika telah dikembangkan untuk menjelaskan dinamika rabies, mencakup berbagai aspek penularan dan manajemen penyakit ini. Model matematika menyoroti peran penting anjing domestik sebagai reservoir utama rabies, terutama di negara-negara berkembang. Model ini menunjukkan bahwa vaksinasi ekstensif terhadap anjing secara signifikan dapat mengurangi tingkat penularan rabies (Layan et al., 2021). Di Cina, proyeksi menunjukkan bahwa kasus rabies dapat distabilkan melalui strategi manajemen yang efisien, termasuk pengendalian populasi anjing dan peningkatan cakupan vaksinasi. Model ini memprediksi bahwa dalam waktu sekitar 10 tahun, kasus rabies dapat dikontrol secara stabil melalui teknik pengendalian yang efisien seperti pengelolaan populasi anjing domestik dan liar (Huang et al., 2020). Model deterministik dan stokastik telah digunakan untuk mengevaluasi efektivitas berbagai teknik vaksinasi. Hasilnya menunjukkan bahwa kombinasi vaksinasi dan tindakan pengendalian lainnya, seperti pemusnahan anjing yang terinfeksi, dapat secara signifikan mengurangi penyebaran rabies (Thongtha et al., 2021). Teori kontrol optimal dalam model matematika telah digunakan untuk menentukan strategi distribusi vaksin yang paling efektif dengan mempertimbangkan faktor spasial dan temporal. Pendekatan ini bertujuan untuk menekan tingkat infeksi dan mengoptimalkan biaya imunisasi. Model ini juga telah digunakan untuk mengelola penyebaran rabies pada rakun (Neilan et al., 2011).

Penelitian terbaru menunjukkan bahwa persamaan diferensial dengan tunda waktu memainkan peran penting dalam pemodelan dinamika penularan rabies. Model ini sangat efektif dalam menggambarkan interval laten antara fase infeksi dan penundaan dalam pelaksanaan langkah-langkah pengendalian, seperti vaksinasi atau pemusnahan. Dengan memasukkan faktor tunda waktu, model dapat memberikan gambaran yang lebih akurat mengenai perkembangan penyakit serta efektivitas intervensi.

Nurdiansyah et al., (2024) mengembangkan model penularan rabies dengan memasukkan faktor waktu tunda, yang terdiri dari enam kompartemen: populasi manusia rentan (S_H), populasi manusia terinfeksi (I_H), populasi manusia yang divaksinasi (V_H),

populasi anjing rentan (S_D), populasi anjing terinfeksi (S_D), dan populasi anjing yang divaksinasi (V_D). Model ini menggunakan persamaan diferensial dengan waktu tunda untuk menganalisis penularan rabies antara populasi anjing dan manusia, dengan mempertimbangkan dua faktor utama yaitu, masa inkubasi dan efektivitas vaksinasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa waktu tunda memiliki dampak signifikan terhadap dinamika penularan rabies. Namun, data juga mengindikasikan bahwa satu strategi pengendalian saja tidak cukup untuk mengurangi atau menghilangkan rabies pada anjing.

Karena anjing merupakan reservoir utama virus rabies, penelitian ini sangat penting dalam mengembangkan strategi pencegahan dan pengendalian yang lebih efektif. Dalam penelitian ini, kami mengevaluasi kestabilan model matematika untuk memperoleh pemahaman yang lebih komprehensif tentang faktor-faktor yang mempengaruhi dinamika penularan rabies. Hal ini bertujuan untuk membangun dasar ilmiah bagi formulasi langkah-langkah intervensi yang lebih efektif dan adaptif.

Penelitian ini menganalisis model penularan rabies dengan memperhitungkan faktor waktu tunda dalam penyebaran penyakit serta karakteristiknya. Oleh karena itu, kami mengevaluasi kompartemen infeksi dalam populasi anjing dengan membaginya menjadi dua kategori: anjing yang terinfeksi pada tahap *prodromal* dan anjing yang terinfeksi pada tahap *furious*, yang menunjukkan perbedaan perilaku kontak dalam penyebaran penyakit.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengembangan model matematika penularan penyakit rabies pada manusia dan anjing, dengan waktu tunda masa inkubasi dan efek vaksin?
2. Bagaimana pengembangan model matematika penularan penyakit rabies pada manusia dan anjing, tanpa waktu tunda?
3. Bagaimana analisis kestabilan dari solusi model dengan waktu tunda?
4. Bagaimana hasil dari simulasi numerik dari solusi model dengan waktu tunda?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka cakupan dari tujuan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui pengembangan model matematika penularan penyakit rabies pada manusia dan anjing dengan, waktu tunda masa inkubasi dan efek vaksin.
2. Mengetahui pengembangan model matematika penularan penyakit rabies pada manusia dan anjing, tanpa waktu tunda.
3. Mengetahui analisis kestabilan dari solusi model dengan waktu tunda.
4. Menganalisis hasil simulasi numerik dari solusi model dengan waktu tunda.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah wawasan keilmuan matematika umumnya tentang model matematika epidemiologi penyakit rabies.

2. Sebagai bahan referensi bagi penulis lain yang ingin mengembangkan model matematika penularan penyakit rabies.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian ini terdapat beberapa batasan masalah sebagai berikut:

1. Populasi anjing yang terinfeksi terbagi dua tahap, yakni tahap *prodromal* dan tahap *furious*.
2. Penularan rabies berasal dari populasi anjing yang terinfeksi tahap *furious*.
3. Tidak ada kematian yang disebabkan oleh penyakit pada tahap *prodromal* tetapi hanya pada tahap *furious*.
4. Rabies tidak dipengaruhi oleh faktor ras, jenis kelamin, atau usia pada anjing, sehingga semua anjing memiliki risiko tertular, kecuali yang telah mendapatkan vaksinasi secara tepat.

1.6 Teori

1.6.1 Pemodelan Matematika

Model adalah karakteristik umum yang mewakili sekelompok bentuk yang ada, atau representasi suatu masalah dalam bentuk yang sederhana dan mudah dikerjakan. Dalam matematika, teori model adalah ilmu yang menyajikan konsep-konsep matematis melalui konsep himpunan, atau ilmu tentang model-model yang mendukung suatu sistem matematis.

Pemodelan matematika adalah membuat model matematika sesuai dengan masalah aktual, menyelesaikan dan menghitung model matematika, dan kemudian menyelesaikan masalah aktual dalam kehidupan sesuai dengan hasil perhitungan. Inti dari model matematika adalah simulasi yang dinamis, bukan cara berpikir yang tetap. Pemodelan matematika menuntut orang untuk secara fleksibel menggunakan pengetahuan matematika yang relevan, serta mengamati dan menganalisis secara cermat permasalahan nyata dalam kehidupan, mengabstraksi permasalahan, dan mengekstrak model matematika (Li, Y., 2022).

Pemodelan matematika digunakan secara luas berbagai bidang, termasuk teknik, fisika, ekonomi, dan biologi, dan telah menjadi alat penting untuk memecahkan masalah yang kompleks dan membuat keputusan yang tepat. Misalnya, dalam bidang teknik, model matematika digunakan untuk mendesain produk baru, memprediksi perilaku sistem, dan mengoptimalkan proses. Dalam fisika, model matematika digunakan untuk menggambarkan perilaku sistem fisik, dari pergerakan planet hingga perilaku partikel subatomik. Salah satu keuntungan utama dari pemodelan matematika adalah kemampuannya untuk memberikan representasi yang jelas dan ringkas dari sistem yang kompleks. Dengan memecah sistem yang kompleks menjadi persamaan matematika yang sederhana, para peneliti dapat lebih mudah mengidentifikasi hubungan antar variabel dan mendapatkan pemahaman yang lebih mendalam tentang mekanisme yang mendasari sistem (Li, H. dkk., 2022).

Model matematika dapat diselesaikan secara analitik dan numerik. Solusi metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan solusi metode analitik dapat berbentuk fungsi matematika yang selanjutnya dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Solusi dari metode numerik berupa hampiran, sedangkan metode analitik berupa solusi sejati.

1.6.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah cabang ilmu matematika yang digunakan untuk menganalisis perubahan suatu sistem dalam waktu. Persamaan ini membantu memahami berbagai fenomena kompleks dalam fisika, biologi, dan ekonomi. Metode penyelesaiannya mencakup pendekatan klasik hingga teknik komputasi modern, yang memungkinkan penerapannya dalam berbagai bidang, seperti pemodelan populasi, dinamika fluida, teori kontrol, dan keuangan. Dengan kerangka matematis yang kuat, sistem ini menjadi alat penting untuk menganalisis dan memprediksi dinamika suatu sistem secara akurat.

Bentuk umum sistem persamaan diferensial orde pertama diberikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= g_3(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Sistem (1.1) dikatakan linier jika $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ linier terhadap variabel-variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Oleh karena itu, bentuk umum dari sistem persamaan diferensial linear orde satu diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + \dots + a_{3n}(t)x_n + f_3(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t),\end{aligned}\tag{1.2}$$

dengan syarat koefisien $a_{ij}(t)$ dan fungsi $f_i(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu dalam interval I yang sama. Sistem (1.2) disebut sistem homogen jika $f_i(t) = 0$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$, jika tidak maka sistem ini disebut sistem non-homogen (Zill dan Cullen, 2009).

Sekarang, misalkan dinyatakan dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & \dots & a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},\tag{1.3}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

maka sistem persamaan diferensial (1.2) dapat dituliskan sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}. \quad (1.4)$$

Jika sistemnya homogen, maka dari (1.4), kita memperoleh (Zill dan Cullen, 2009)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.5)$$

Sebuah sistem yang tidak bergantung pada variabel bebas secara eksplisit disebut sistem otonom. Sebuah sistem persamaan diferensial otonom dituliskan sebagai berikut (Zill dan Cullen, 2009)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= g_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= g_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Jika $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ pada persamaan (1.6) adalah linear pada variabel-variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, maka diperoleh sistem persamaan diferensial linear otonom sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Perhatikan bahwa pada sistem (1.7) a_{ij} , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$, adalah konstan, berlawanan dengan sistem (1.2) dimana a_{ij} diberikan sebagai fungsi dari t . Misalkan, jika kita menyatakan matriks berikut

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \text{ dan } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

Maka sistem persamaan diferensial (1.7) dapat dituliskan sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (1.9)$$

1.6.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Suatu penyakit menyebar atau menghilang dari suatu populasi dapat diketahui melalui analisis kestabilan sehingga dapat dilakukan tindakan lebih lanjut. Titik kesetimbangan adalah suatu titik dimana sistem tidak akan berubah terhadap perubahan waktu. Titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama yang sama dengan nol.

Misalkan suatu persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.10)$$

Definisi 1. (Perko, L., 2001)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan (titik equilibrium) persamaan (1.10) jika $f(\bar{x}) = 0$.

Teorema 1. (Older, 1998)

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, dengan A adalah matriks $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Titik kesetimbangan $\mathbf{x}^*$ stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sementara untuk titik kesetimbangan stabil jika $Re(\lambda_i) \leq 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Dari Teorema 1. dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan dari sebuah sistem persamaan linear atau sistem terlinearisasi dengan nilai eigen $Re(\lambda_i) < 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah:

- Stabil, jika untuk setiap nilai eigen real, berlaku bahwa $(\lambda_i) \leq 0$, dan untuk setiap nilai eigen yang kompleks, berlaku bahwa $Re(\lambda_i) \leq 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. $Re(\lambda_i)$ bermakna bagian real dari nilai eigen kompleks λ_i . Selain itu, jika juga berlaku bahwa $(\lambda_i) \neq 0$ dan $Re(\lambda_i) \neq 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$, maka bisa dikatakan stabil asimtotik.
- Tidak stabil, jika ada nilai eigen real dimana $(\lambda_i) > 0$ atau nilai eigen kompleks dengan $Re(\lambda_i) > 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

1.6.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz merupakan metode yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan, terutama ketika nilai eigen dari matriks Jacobi $J(\mathbf{X}^*)$ sulit dihitung secara eksplisit. Analisis ini didasarkan pada pemeriksaan koefisien-koefisien dari persamaan karakteristik sistem.

Teorema 2. (Martcheva, 2015)

Misalkan terdapat polinomial berderajat n dengan koefisien konstan yang berupa bilangan real.

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n, \quad (1.11)$$

Didefinisikan matriks *Hurwitz* sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1),$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix},$$

⋮

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix},$$

Dengan $a_j = 0$ jika $j > n$. Semua akar polinomial $P(\lambda)$ bernilai negatif atau mempunyaibagian riil negatif jika dan hanya jika seluruh determinan matriks bernilai positif.

1.6.5 Sistem Persamaan Diferensial Waktu Tunda

Persamaan diferensial waktu tunda adalah model matematika yang menggambarkan perubahan suatu variabel terhadap waktu dengan mempertimbangkan efek tunda atau jeda dalam respon sistem. Model ini sering digunakan dalam berbagai bidang ilmu, seperti teknik kontrol, fisika, biologi, dan ekonomi.

Definisi 2. (Kuang, 1993)

Persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan dalam bentuk:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (1.12)$$

jika $x(t)$ adalah variabel yang berubah seiring waktu, F adalah fungsi yang menggambarkan hubungan antara x pada waktu sekarang, x pada waktu tertunda $t - \tau$, waktu t , dan τ adalah waktu tunda. Sistem persamaan diferensial dengan waktu tunda juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, x_{\tau_3}, \dots, x_{\tau_n}) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, x_{\tau_3}, \dots, x_{\tau_n}) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= f_3(x, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, x_{\tau_3}, \dots, x_{\tau_n}) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_k(x, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, x_{\tau_3}, \dots, x_{\tau_n}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

dimana $\mathbf{x}_{\tau_i} = (x_1(t - \tau_i), x_2(t - \tau_i), x_3(t - \tau_i), \dots, x_n(t - \tau_i))$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

1.6.6 Linierisasi

Linierisasi adalah suatu proses mengubah dari sistem persamaan diferensial nonlinier ke sistem persamaan diferensial linier dengan menggunakan pendekatan deret Taylor agar memudahkan dalam mendapatkan solusi dari sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut. Linierisasi sistem persamaan diferensial nonlinier dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik kesetimbangan sistem tersebut.

Diberikan sistem persamaan berikut.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.14)$$

dengan titik kesetimbangan persamaan (1.14) yaitu:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.15)$$

yang memenuhi $\mathbf{x}^* = x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$.

Selanjutnya dilakukan linearisasi dengan pendekatan titik kesetimbangan, sebagai berikut:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{y}. \quad (1.16)$$

Kemudian substitusi persamaan (1.16) ke persamaan (1.14), maka diperoleh ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangannya, yakni:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^* + \dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}^*) + Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{y} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^2), \quad (1.17)$$

dengan Df adalah turunan dari fungsi f , dan $|\dots|$ menunjukkan norma pada $\mathbb{R}^n$. Karena $\dot{\mathbf{x}}^* = f(\mathbf{x}^*)$, maka persamaan (1.17) dapat dituliskan

$$\dot{\mathbf{y}} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{y} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^2). \quad (1.18)$$

Kestabilan dari $\mathbf{x}^*$ dapat dianalisis dengan mengamati perilaku solusi yang mendekati $\mathbf{x}^*$, yang dapat ditentukan melalui studi terhadap persamaan linier (1.18) sebagaimana dijelaskan oleh (Winggins, 2003)

$$\dot{\mathbf{y}} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}. \quad (1.19)$$

Karena persamaan (1.19) merupakan sistem yang telah dilinierkan dengan n variabel, maka sistem ini juga memiliki n persamaan diferensialnya (Df), yang jika disusun dalam bentuk matriks, akan menghasilkan matriks Jacobian dari koefisien-koefisien $\mathbf{y}$. Berikut contoh dapat membantu untuk memberikan pemahaman bagaimana linearisasi bekerja pada sistem dengan sebanyak n fungsi/variabel terikat.

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= h_1(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \mathcal{O}_1(\mathbf{x}^2), \\ h_2(\mathbf{x}) &= h_2(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \mathcal{O}_2(\mathbf{x}^2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$h_n(\mathbf{x}) = h_n(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \mathcal{O}_n(\mathbf{x}^2),$$

dengan $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$ dan $\mathcal{O}_k(\mathbf{x}^2)$, dimana

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k(\mathbf{x}^2) &= \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_n^2}(x_n - x_n^*) + 2 \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \dots \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(x_{n-1} - x_{n-1}^*)(x_n - x_n^*) \right] + \dots \end{aligned}$$

untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Karena x^* adalah sebuah titik equilibrium, maka berlaku bahwa $h_k(x^*) = 0$ untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Selanjutnya, karena $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sangat dekat dengan titik equilibrium, maka $x_n - x_n^*$ cenderung ke arah 0. Karena $x_n - x_n^*$ adalah bilangan yang kecil, maka $(x_n - x_n^*)^2$ haruslah bilangan yang kecil lagi, oleh karena itu kita dapat menghilangkan suku-suku yang berorde lebih tinggi dari $O_n(x^2)$, tetapi dengan mengasumsikan bahwa suku ini harus sangat dekat dengan 0. Sehingga persamaan (1.20) dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial h_1}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_n - x_n^*), \\ h_2(x) &= \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial h_2}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \dots + \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(x_n - x_n^*), \\ h_3(x) &= \frac{\partial h_3}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial h_3}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial h_3}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \dots + \frac{\partial h_3}{\partial x_n}(x_n - x_n^*), \\ &\vdots \\ h_n(x) &= \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial h_n}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \dots + \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(x_n - x_n^*). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Sehingga sistem persamaan (1.21) dapat di bentuk matriks sebagai berikut:

$$f = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \frac{\partial h_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^*},$$

dimana J adalah matriks Jacobian dan diperoleh $f = x - x^*$ maka dapat dituliskan $\dot{f} = \dot{x}$. Maka bentuk sederhana dari persamaan (1.21) adalah sebagai berikut

$$\dot{f} = Jf. \quad (1.22)$$

Linearisasi dengan ekspansi deret Taylor untuk sistem dengan waktu tunda berganda secara matematis dapat dijelaskan sebagai berikut (Lakshmanan dkk., 2011):

Suatu sistem persamaan diferensial tunda (DDE) yang melibatkan beberapa waktu tunda, dilambangkan $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$. Misalkan $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ menjadi vektor keadaan dari sistem tersebut. Dinamika sistem dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\dot{X}(t) = F(X(t), X(t - \tau_1), X(t - \tau_1), \dots, X(t - \tau_m)), \quad (1.23)$$

dimana F adalah fungsi vektor yang bergantung pada kondisi saat ini $X(t)$ dan kondisi tertunda $X(t - \tau_i)$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Untuk melinearisasi sistem (1.23) di sekitar titik ekuilibrium X^* dengan perturbasi kecil δX dan δX_{τ_i} dari titik ekuilibrium:

$$X = X^* + \delta X, \quad X_{\tau_i} = X^* + \delta X_{\tau_i},$$

dengan menggunakan ekspansi deret Taylor, dapat memperkirakan dinamika sistem sebagai berikut:

$$\delta \dot{X} = J_0 \delta X + \sum_{i=1}^m J_{\tau_i} \delta X_{\tau_i},$$

dimana J_0 adalah matriks Jacobian dari F sehubungan dengan X dievaluasi di X^* , dan J_{τ_i} adalah matriks Jacobian dari F sehubungan dengan X_{τ_i} dievaluasi di $X = X_{\tau_i} = X^*$.

Matriks Jacobian J_0 dan J_{τ_i} didefinisikan sebagai berikut:

$$J_0 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \bigg|_{X^*}, \quad J_{\tau_i} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{\tau_{ij}}} \right) \bigg|_{X^*}.$$

Dimana $i = 1, 2, \dots, n$ mewakili indeks dari variabel-variabel.

Dengan mengasumsikan solusi dalam bentuk $\delta X(t) = A e^{\lambda t}$, dengan A sebagai matriks konstan dan λ sebagai nilai eigen dari matriks Jacobian, sistem yang telah dilinierisasikan dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\lambda A = \left(J_0 + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda \tau_i} J_{\tau_i} \right) A. \quad (1.24)$$

Persamaan (1.24) jelas dapat dipenuhi dengan amplitudo perpindahan A yang tidak nol jika kondisi berikut terpenuhi:

$$\left| J_0 + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda \tau_i} J_{\tau_i} - \lambda I \right| = 0,$$

dimana I adalah matriks identitas.

1.6.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan $\mathcal{R}_0$, adalah suatu parameter yang digunakan untuk menggambarkan jumlah rata-rata kasus baru yang dihasilkan oleh satu individu yang terinfeksi dalam subpopulasi rentan (*susceptible*). Dengan kata lain, $\mathcal{R}_0$ mencerminkan potensi penularan suatu penyakit dalam populasi (Driessche & Watmough, 2002).

1. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka dalam populasi tidak terjadi epidemik atau penyakit tidak menyebar lebih lanjut, sehingga untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit.
2. Jika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka penyebaran penyakit berada dalam keadaan seimbang. Dalam kondisi ini, jumlah kasus baru yang terinfeksi akan tetap stabil dari waktu ke waktu.
3. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka populasi yang terinfeksi akan meningkat, yang menyebabkan wabah atau pandemi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) berdasarkan linierisasi dari sistem persamaan diferensial yang pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinierisasikan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = (T - \Sigma)x$$

dengan T adalah matriks berisi elemen-elemen yang menggambarkan laju peralihan dari populasi sehat ke populasi terinfeksi dan Σ adalah matriks berisi elemen-elemen yang menunjukkan peralihan dari populasi infeksi seperti individu sembuh atau meninggal dengan matriks berukuran $n \times n$,

$$T = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, y_0) \text{ dan } \Sigma = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, y_0),$$

dimana $(0, y_0)$ merupakan titik kesetimbangan non endemik. Selanjutnya didefinisikan

matriks K_L sebagai berikut:

$$K_L = T\Sigma^{-1}.$$

K disebut *next generation matrix*. Penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) ini akan diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar dari *next generation matrix* (Diekmann dkk., 1990).

Contoh 1.1:

Tentukan $\mathcal{R}_0$ dari model epidemi berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (k + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} &= kE - (\mu + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Selanjutnya mengamati kesetimbangan bebas penyakit dari persamaan (1.25) dimana $E = I = R = 0$, sehingga $S = \frac{A}{\mu}$. Oleh karena itu ,subsistem infeksi yang dilinearisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta A}{\mu}I - (k + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} &= kE - (\mu + \gamma)I.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Dari persamaan (1.26) dapat menyusun matriks T dan Σ sebagai berikut:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} (k + \mu) & 0 \\ -k & (\mu + \gamma) \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh matriks Σ^{-1} sebagai berikut

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(k + \mu)} & 0 \\ \frac{k}{(k + \mu)(\mu + \gamma)} & \frac{1}{(\mu + \gamma)} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai berikut:

$$K_L = T\Sigma^{-1}$$

$$\begin{aligned}&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta A}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(k + \mu)} & 0 \\ \frac{k}{(k + \mu)(\mu + \gamma)} & \frac{1}{(\mu + \gamma)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\beta Ak}{(k + \mu)(\mu + \gamma)\mu} & \frac{\beta A}{(\mu + \gamma)\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Maka di peroleh

$$\mathcal{R}_0 = \rho(T\Sigma^{-1})$$

$$= \frac{\beta Ak}{(k + \mu)(\mu + \gamma)\mu}$$

1.6.8 Penyakit Rabies

Rabies merupakan salah satu penyakit *zoonosis* yaitu penyakit yang menular dari hewan ke manusia. Infeksi ini ditularkan oleh hewan yang terinfeksi penyakit rabies. Hewan utama sebagai penyebab penyebaran rabies adalah anjing, kelelawar, kucing dan kera. Di Indonesia, rabies atau yang dikenal dengan “penyakit anjing gila”, masih menjadi salah satu masalah yang mengancam Kesehatan Masyarakat (kemkes.go.id, 2023).

Rabies pada manusia terutama disebabkan oleh virus rabies setelah digigit oleh anjing yang sakit, dan virus tersebut kemudian menyerang saraf pusat, yang mengakibatkan ensefalomielitis akut dan fatal (Dacheux et al., 2011). Rabies dapat sepenuhnya dicegah; masa inkubasi setelah virus rabies menginfeksi biasanya 2-8 minggu, meskipun dapat berkisar dari beberapa hari sehingga beberapa tahun. Begitu infeksi menimbulkan gejala, rabies selalu berakibat fatal. Oleh karena itu, tindakan pencegahan menjadi prioritas yang harus dilakukan bagi manusia yang berisiko setelah digigit anjing atau hewan lainnya (Stringer, 2003). Masa inkubasi rabies bervariasi sesuai dengan lokasi inokulasi virus (semakin dekat dengan area tubuh yang memiliki saraf dan otak yang baik, maka masa inkubasi akan semakin pendek), tingkat keparahan gigitan dan/atau luka (semakin luas dan dalam gigitan/luka, semakin pendek masa inkubasi), dan viral load serta genotipe virus (Susilawathi dkk., 2012).

Organisasi-organisasi Internasional berkomitmen terhadap penghapusan global kematian manusia akibat rabies yang disebabkan oleh anjing pada tahun 2030, dan panduan ilmiah untuk memfasilitasi kemajuan menuju eliminasi telah dilakukan (Minghui dkk., 2018)

Secara garis besar periode penyakit dibagi menjadi tiga tahap yaitu, tahap Prodromal, tahap Eksitasi, dan tahap bisu atau lumpuh (Dejene & Koya, 2016). **Tahap Prodromal:** ini adalah fase pertama dari penyakit ini. Periode prodromal dapat berlangsung selama satu hingga tiga hari. Pada tahap awal ini akan ada beberapa perubahan pada perilaku hewan. Namun, perubahan ini sedikit dan dengan demikian sering diabaikan. Hewan-hewan rabies pada tahap ini tidak merasa nyaman saat bersama. Mereka tidak mudah bergaul dengan hewan lain, mudah bergairah, merasa tidak nyaman, dan juga sulit menelan dan mengeluarkan air liur. Sering terjadi iritasi atau rangsangan pada tubuh yang menghubungkan organ kemih dan kelamin. Hal ini dibuktikan dengan sering buang air kecil, ereksi dan hasrat seksual. Hewan yang terkena rabies juga dapat berhenti makan dan minum. **Tahap Eksitasi:** ini adalah fase kedua atau fase Tengah dari penyakit. Tahap ini juga dikenal sebagai tahap ‘mengamuk’ atau ‘sidrom anjing gila’. Perilaku hewan pada tahap ini tidak rasional, agresif, gelisah, dan menggairah. Hewan-hewan ini juga mengalami gangguan mental dan mania untuk memukul dan mengeluarkan suara. Hewan-hewan ini kehilangan kewaspadaan dan rasa takut terhadap musuh alami. Mereka berkeliaran tanpa tujuan di jalanan dan di jalan raya. Mereka menggigit hewan lain dan manusia tanpa alasan dan tujuan. Mereka berburu dan mengejar benda-benda yang bergerak dan menelan benda-benda asing. Selama tahap ini, air liurnya sangat menular. Selain itu, otot-otot dan kaki hewan rabies mulai bergetar

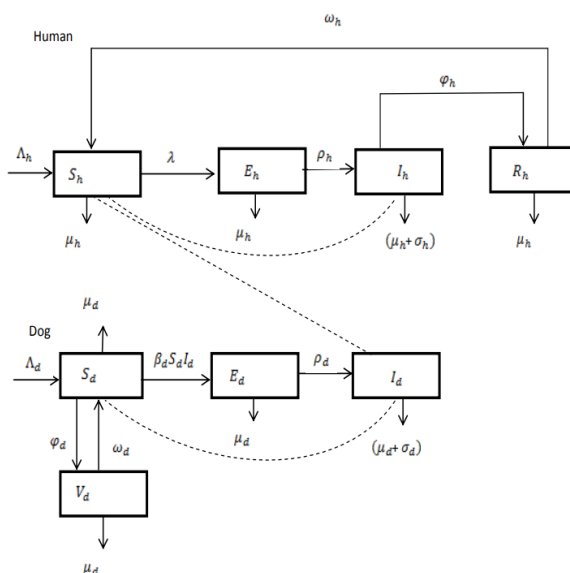
sehingga hewan tidak dapat berjalan dengan stabil. Bernapas juga menjadi sangat sulit. **Tahap Bisu atau Lumpuh:** ini adalah tahap ketiga atau terakhir dari penyakit ini. Tahap ini terjadi sesaat sebelum kematian. Pada tahap ini, hewan mengalami kelumpuhan pada otot-otot tenggorokan, wajah, batang tubuh dan anggota badan. Air liur lebih banyak diproduksi di mulut dan menelan apa pun menjadi sulit. Rahang bawah turun, jarang sekali hewan yang terkena rabies dapat menggigit. Hewan yang terkena rabies terlihat tertekan, lesu dan tidak terkoordinasi. Secara bertahap mereka menjadi lumpuh total. Jika kelumpuhan terlihat jelas, tahap ini juga disebut *silent fury*. Kelumpuhan akan menyebar ke seluruh bagian tubuh dan menyebabkan koma dan kematian dalam beberapa jam.

Vaksin rabies pada anjing biasanya mulai menimbulkan kekebalan dalam waktu 2-3 minggu setelah pemberian, dengan puncak kekebalan umumnya dicapai dalam waktu 5-6 minggu setelah vaksinasi (Zhang et al., 2008). Vaksin rabies mulai bekerja dalam waktu seminggu, dengan kekebalan penuh biasanya terbentuk dalam waktu 1 bulan setelah dosis awal. Jangka waktu yang tepat dapat bervariasi berdasarkan jenis vaksin, dosis, dan respons individu, tetapi protokol vaksinasi standar dirancang untuk memastikan kekebalan yang tepat waktu dan efektif (Overduin et al., 2019).

1.6.9 Penelitian Terdahulu

Berikut akan dibahas beberapa penelitian terdahulu yang relevan dengan topik penyebaran penyakit rabies, bertujuan untuk memberikan pemahaman mendalam tentang perkembangan dan temuan penelitian sebelumnya, yang dapat menjadi dasar untuk merumuskan landasan teoritis dan kerangka konseptual dalam penelitian ini.

Penelitian yang dilakukan Eze dkk. (2022) mempresentasikan model SEIR dan SEIV untuk menggambarkan dinamika penularan virus rabies pada anjing dan manusia yang ditunjukkan pada gambar 1.



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Eze dkk. (2022)

Keterangan :

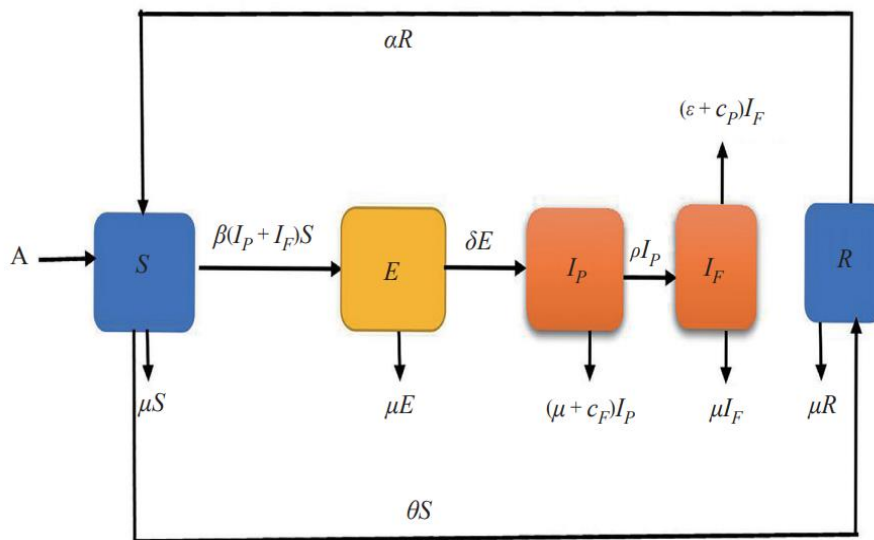
- S_h : Populasi manusia yang rentan terhadap penyakit rabies (*susceptible human*).
- E_h : Populasi manusia yang terpapar penyakit rabies tetapi belum menunjukkan gejala klinis (*exposed human*).
- I_h : Populasi manusia yang terinfeksi penyakit rabies dan menunjukkan gejala klinis (*infected human*).
- R_h : Populasi manusia yang telah sembuh dari penyakit rabies.
- S_d : Populasi anjing yang rentan terhadap penyakit rabies (*susceptible dog*).
- E_d : Populasi anjing yang telah terpapar terhadap penyakit rabies tetapi belum menunjukkan gejala klinis (*exposed dog*).
- I_d : Populasi anjing yang terinfeksi penyakit rabies dan mampu menularkan virus kepada manusia dan anjing lain (*infected dog*).
- V_d : Populasi anjing yang telah divaksinasi (*vaccinated dog*).

Eze dkk. (2022) menghitung angka reproduksi dasar, titik equilibrium bebas penyakit dan endemik. Mereka juga memperoleh solusi kontrol untuk model yang memprediksi bahwa menggunakan profilaksis pra-paparan pada anjing dan manusia adalah cara terbaik untuk menghilangkan kematian akibat rabies. Hasil penelitian Eze dkk. (2022) menunjukkan bahwa profilaksis pra-paparan dan profilaksi paska-paparan pada manusia dengan penggunaan vaksinasi pada populasi anjing dapat menyebabkan eliminasi total penyakit ini.

Penelitian yang dilakukan oleh Somma S. A. dkk., (2022) merumuskan model matematika yang menggambarkan dinamika penularan dan pengendalian virus rabies antara anjing dan manusia dengan adanya kelas vaksinasi. Terdapat dua kondisi kesetimbangan yang ada dalam model, yaitu; Kesetimbangan Bebas Penyakit (DFE) dan endemik. Analisis stabilitas lokal menunjukkan bahwa DFE stabil jika $R_0 < 1$. Hal ini menyiratkan bahwa rabies dapat diberantas dari populasi jika anjing-anjing tersebut divaksin.

Pada penelitian Hailemichael dkk., (2023) yang berjudul "*Mathematical Modeling of Dog Rabies Transmission Dynamics Using Optimal Control Analysis*" menggambarkan model penyakit rabies dengan membedakan menjadi dua jenis kompartemen infeksi yaitu *Infectious dog population in the prodromal* (I_p) dan *Infectious dog population in the furious* (I_f). Sehingga kompartemen yang dibuat adalah *Susceptible dog population* (S), *Exposed dog population* (E), *Infectious dog population in the prodromal* (I_p), *Infectious dog population in the furious* (I_f), dan *Recovered dog population* (R). Diamsunksikan bahwa tidak ada peluang untuk sembuh dari penyakit untuk semua anjing yang terinfeksi dan hanya kelompok rentan yang bisa sembuh ketika telah diberi vaksinasi. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa peningkatan tingkat vaksin dan pemusnahan anjing memiliki dampak signifikan terhadap laju penyebaran penularan rabies dan metode kontrol yang ideal untuk dinamika penularan rabies pada anjing diberikan dalam penelitian ini, dikarenakan penulis membagi kompartemen terinfeksi yang telah di perbarui dari penelitian sebelumnya.

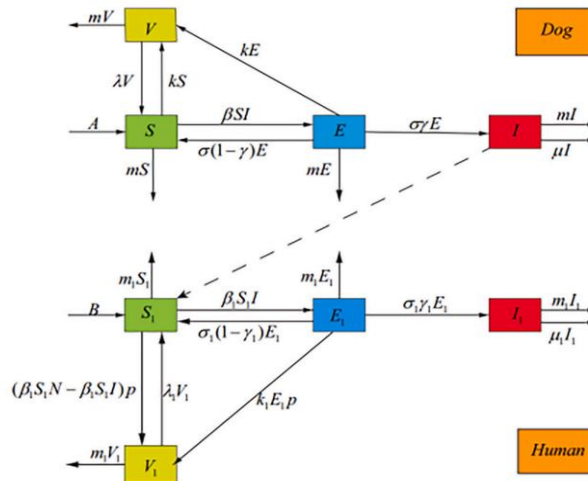
Penelitian Hailemichael dkk., (2023) menampilkan digram kompartemen seperti yang ditunjukkan pada gambar 2



Gambar 2. Diagram Kompartemen Model Hailemichael dkk., (2023)

M.-M. Lv dkk., (2023) juga mempelajari kasus penyebaran penyakit rabies yang berjudul “*Dynamic analysis of rabies transmission and elimination in mainland China*”, mereka membuat model penularan rabies dari anjing ke manusia untuk meramalkan tren epidemi rabies di masa depan, mereka menyimpulkan untuk meningkatkan upaya pengendalian rabies dengan meningkatkan tingkat cakupan imunisasi anjing peliharaan pedesaan, mengendalikan jumlah anjing liar, dan mencegah impor virus rabies pada hewan liar.

Penelitian M.-M. Lv dkk., (2023) menampilkan diagram kompartemen seperti yang ditunjukkan pada gambar 3.

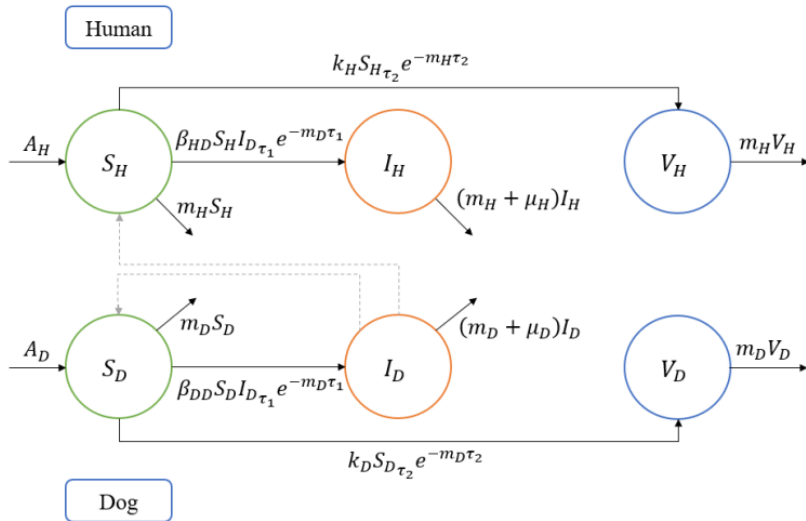


Gambar 3. Diagram Kompartemen Model M.-M. LV. dkk. (2023)

Keterangan :

- S_1 : Populasi manusia yang rentan terhadap penyakit rabies (susceptible human).
- E_1 : Populasi manusia yang terpapar penyakit rabies tetapi belum menunjukkan gejala klinis (exposed human).
- I_1 : Populasi manusia yang terinfeksi penyakit rabies dan menunjukkan gejala klinis (infected human).
- V_1 : Populasi manusia yang telah divaksinasi (vaccinated human)
- S : Populasi anjing yang rentan terhadap penyakit rabies (susceptible dog).
- E : Populasi anjing yang telah terpapar terhadap penyakit rabies tetapi belum menunjukkan gejala klinis (exposed dog).
- I : Populasi anjing yang terinfeksi penyakit rabies dan mampu menularkan virus kepada manusia dan anjing lain (infected dog).
- V : Populasi anjing yang telah divaksinasi (vaccinated dog).

Model yang sebelumnya telah disusun dan dianalisis masih memiliki potensi pengembangan yang lebih lanjut. Salah satu strategi untuk meningkatkan model tersebut adalah dengan mempertimbangkan dampak dari penundaan waktu, dimana salah satu faktor yang dapat dianggap sebagai penundaan adalah periode inkubasi penyakit. Nurdiansyah dkk., (2024) membangun model persamaan diferensial waktu tunda untuk mengamati penyebaran rabies antara populasi anjing dan manusia dengan mempertimbangkan dua efek yaitu penundaan pada masa inkubasi dan efek vaksin dengan diagram kompartemen model ditunjukkan pada gambar 4.



Gambar 4. Diagram kompartemen model Nurdiansyah dkk. (2024)

Hasil penelitian tersebut menunjukkan adanya pengaruh yang signifikan terhadap penyebaran penyakit rabies, tetapi hasil numerik menunjukkan hanya bergantung satu metode kontrol saja hal ini disebabkan tidak cukup untuk mengurangi atau membasmi rabies pada anjing sehingga diperlukan beberapa strategi lainnya.

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur (*literature review*), yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan, mengevaluasi, dan menyusun informasi yang terdapat dalam literatur atau sumber-sumber tulisan berkaitan dengan model epidemik penyebaran penyakit rabies.

2.2 Waktu dan Tempat Penelitian

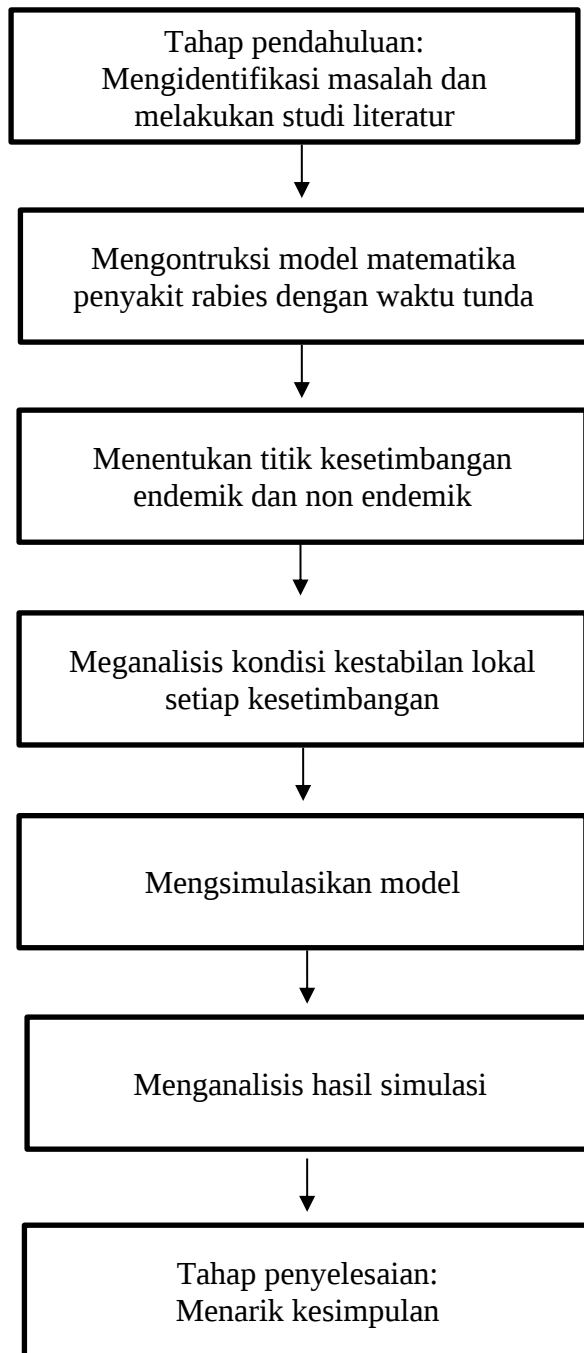
Penelitian ini dilaksanakan di Universitas Hasanuddin Kota Makassar. Adapun waktu penelitian yang direncanakan adalah awal bulan Juni hingga Agustus 2024

2.3 Prosedur Pelaksanaan Penelitian

Adapun prosedur dalam penelitian ini guna mencapai tujuan penelitian, adalah sebagai berikut:

1. Terlebih dahulu melakukan identifikasi masalah awal yang ingin dijadikan topik dalam penelitian ini, yaitu studi literatur terkait data dan informasi mengenai dinamika penyakit rabies dan faktor-faktor yang mempengaruhinya dengan waktu tunda.
2. Setelah melakukan tahap studi literatur maka dilakukan tahap pemodelan penyakit rabies, serta menyusun asumsi-asumsi terhadap model dengan waktu tunda.
3. Tahap selanjutnya menentukan titik kesetimbangan endemik dan non endemik.
4. Melakukan analisis kestabilan lokal disekitar titik kesetimbangan endemik dan non endemik.
5. Melakukan tahapan simulasi model dengan bantuan *software* Python.
6. Interpretasi hasil simulasi model penyakit rabies dengan waktu tunda dan menarik kesimpulan seluruh hasil dari penelitian ini.

2.4 Diagram Alir (Flowchart)



Gambar 5. Bagan Alur Penelitian