

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara umum, aljabar merupakan ilmu yang mempelajari simbol-simbol matematika dan aturan untuk memanipulasi simbol-simbol tersebut. Saat ini, penelitian dalam bidang aljabar semakin berkembang pesat. Salah satu subjek dari perkembangan tersebut adalah aljabar abstrak atau aljabar modern. Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mempelajari struktur-struktur aljabar seperti grup, gelanggang dan lapangan, yang memiliki peran penting dalam berbagai aplikasi matematis dan ilmiah (Hungerford, 1974). Dalam aljabar, gelanggang merupakan salah satu struktur dasar yang terdiri dari himpunan dan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian (Dummit & Foote, 2004). Gelanggang merupakan grup abelian yang bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian dan bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan serta memiliki unsur identitas. Dalam penelitian tentang gelanggang, dikenal dua jenis gelanggang berdasarkan sifat operasi perkaliannya. Suatu gelanggang dengan operasi perkalian yang komutatif disebut gelanggang komutatif. Sebaliknya, gelanggang dengan operasi perkalian yang tidak komutatif disebut gelanggang nonkomutatif. Salah satu contoh gelanggang nonkomutatif adalah gelanggang polinomial miring.

Gelanggang polinomial miring adalah gelanggang yang terdiri atas himpunan polinomial dengan operasi perkalian yang tidak bersifat komutatif. Gelanggang polinomial miring telah memainkan peran penting dalam teori gelanggang nonkomutatif. Banyak peneliti yang mengkaji gelanggang ini dari berbagai perspektif, termasuk teori ideal, teori urutan, teori Galois dan aljabar homologi (Amir, 2010). Hoger Grahmani melakukan penelitian mengenai struktur gelanggang polinomial miring yang didefinisikan atas gelanggang matriks segitiga formal. Dalam penelitiannya, Ghahramani membuktikan bahwa gelanggang polinomial miring atas gelanggang matriks segitiga formal yang dilengkapi dengan endomorfisma dengan derivasi miring tertentu pada gelanggang matriks segitiga formal (Ghahramani, 2012).

Gelanggang matriks segitiga formal yang terdiri dari matriks segitiga atas, memiliki aplikasi penting dalam teori representasi dan sistem linear. Gelanggang trinion yang merupakan struktur yang lebih sederhana, yang memberikan dasar yang kuat dalam memahami dan mengeksplorasi sifat-sifat aljabar lebih kompleks (Klen, 2010). Penelitian sebelumnya juga menunjukkan bahwa gelanggang matriks segitiga formal dapat digunakan untuk membangun gelanggang Armendariz, yang memiliki sifat-sifat menarik dalam konteks aljabar (Anwar dkk, 2023).

Pada gelanggang segitiga formal dapat dibangun struktur gelanggang baru dengan menggabungkan dua gelanggang yaitu R & S , serta bimodul M yang menghubungkan keduanya. Dalam konteks ini R merupakan matriks yang berukuran 2×2 dengan elemen dari gelanggang trinion, sedangkan S adalah

gelanggang trinion yang direpresentasikan dalam bentuk matriks 1×1 . Di sisi lain M sebagai bimodul yang bentuk 2×1 yang terdiri dari gelanggang trinion. Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji struktur dan sifat gelanggang polinomial miring yang dibentuk dari gelanggang tumpuan matriks segitiga formal atas gelanggang trinion.

1.1.1 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana membentuk gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion?
2. Bagaimana bentuk endomorfisma dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion?
3. Bagaimana bentuk hasil perkalian polinomial $x^n A$ dengan anggota matriks segitiga formal atas gelanggang trinion?
4. Bagaimana bentuk pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang matriks segitiga formal?

1.1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk membentuk gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion.
2. Untuk mendefinisikan bentuk endomorfisma dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion.
3. Untuk mengidentifikasi bentuk hasil perkalian polinomial $x^n A$ dengan anggota matriks segitiga formal atas gelanggang trinion.
4. Untuk mengidentifikasi pusat dari gelanggang polinomial miring atas gelanggang matriks segitiga formal.

1.1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas tentang pembentukan gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion dan bentuk $x^n A$ serta pusat dari gelanggang polinomial miring yang dibangun dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion sebagai gelanggang tumpuan. Dalam hal ini, bentuk $x^n A$ yang dimaksud adalah hasil perkalian polinomial x^n dengan anggota matriks segitiga formal atas gelanggang trinion.

1.1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan bagi penulis maupun pembaca khususnya mengenai gelanggang polinomial miring dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion serta dapat menjadi bahan rujukan untuk penelitian di masa datang.

1.2 Landasan Teori

1.2.1 Matriks Segitiga Formal

Matriks segitiga merupakan salah satu bentuk dari matriks persegi. Matriks persegi dengan semua elemen diatas diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga bawah. Sedangkan, matriks persegi dengan semua elemen dibawah diagonal utama bernilai nol disebut matriks segitiga atas.

Definisi 1.2.1

Matriks segitiga formal ($\mathcal{T}$) berordo 2×2 juga dikenal sebagai matriks segitiga atas berordo 2×2 dengan bentuk sebagai berikut:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$$

Dimana R adalah sebuah gelanggang. (Anwar,et.al.2023)

1.2.2 Bilangan Trinion

Trinion adalah konsep dalam matematika yang termasuk dalam kategori bilangan hiperkompleks. Trinion ($\mathbb{T}$) merupakan kombinasi linear dari satu bagian riil dan dua bagian imajiner.

Definisi 1.2.2

Himpunan bilangan trinion dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathbb{T} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Dimana $i^2 = j, j^2 = -i, ij = ji = -1$. (Anwar,et.al.2023)

1.2.3 Gelanggang Trinion

Untuk menunjukkan bahwa Trinion merupakan gelanggang maka dimisalkan $a, b, c \in \mathbb{T}$ dengan $a = a_0 + a_1 i + a_2 j$, $b = b_0 + b_1 i + b_2 j$, dan $c = c_0 + c_1 i + c_2 j$.

1) Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, +)$ adalah grup komutatif

$$\begin{aligned} a + b &= (a_0 + a_1 i + a_2 j) + (b_0 + b_1 i + b_2 j) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)i + (b_2 + a_2)j \\ &= (b_0 + b_1 i + b_2 j) + (a_0 + a_1 i + a_2 j) \\ &= b + a \end{aligned}$$

2) Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, \cdot)$ bersifat asosiatif $(ab)c = a(bc)$.

$$\begin{aligned} (ab)c &= [(a_0 + a_1 i + a_2 j)(b_0 + b_1 i + b_2 j)](c_0 + c_1 i + c_2 j) \\ &= [(a_0(b_0 + b_1 i + b_2 j) + a_1 i(b_0 + b_1 i + b_2 j) \\ &\quad + a_2 j(b_0 + b_1 i + b_2 j))](c_0 + c_1 i + c_2 j) \\ &= [(a_0 b_0 + a_0 b_1 i + a_0 b_2 j) + (a_1 b_0 i + a_1 b_1 j - a_1 b_2) \\ &\quad + (a_2 b_0 j - a_2 b_1 - a_2 b_2 i)](c_0 + c_1 i + c_2 j) \\ &= [(a_0 b_0 + a_0 b_1 i + a_0 b_2 j) + (a_1 b_0 i + a_1 b_1 j - a_1 b_2) \\ &\quad + (a_2 b_0 j - a_2 b_1 - a_2 b_2 i)] c_0 + \\ &\quad [(a_0 b_0 + a_0 b_1 i + a_0 b_2 j) + (a_1 b_0 i + a_1 b_1 j - a_1 b_2) \\ &\quad + (a_2 b_0 j - a_2 b_1 - a_2 b_2 i)] c_1 i + \\ &\quad [(a_0 b_0 + a_0 b_1 i + a_0 b_2 j) + (a_1 b_0 i + a_1 b_1 j - a_1 b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_2 b_0 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{i} - a_2 b_2 \mathbf{i})] c_2 \mathbf{j} \\
= & [(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_0 c_0 + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_1 c_0 \mathbf{i} \\
& + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_2 c_0 \mathbf{j}] + \\
& [(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_0 c_1 \mathbf{i} + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_1 c_1 \mathbf{i} \\
& + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_2 c_1 \mathbf{i}] + \\
& [(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_0 c_2 \mathbf{j} + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_1 c_2 \mathbf{j} \\
& + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_2 c_2 \mathbf{j}] \\
= & [(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_0 c_0 + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_1 c_0 \mathbf{i} \\
& + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_2 c_0 \mathbf{j}] + \\
& [(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_0 c_1 \mathbf{i} + (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_1 c_1 \mathbf{j} \\
& - (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_2 c_1 \mathbf{i}] + \\
& [(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_0 c_2 \mathbf{j} - (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_1 c_2 \\
& - (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) b_2 c_2 \mathbf{i}] \\
= & [(a_0 b_0 + a_0 b_1 \mathbf{i} + a_0 b_2 \mathbf{j}) + (a_1 b_0 \mathbf{i} + a_1 b_1 \mathbf{j} - a_1 b_2) \\
& + (a_2 b_0 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{i} - a_2 b_2 \mathbf{i})] (c_0 + c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j})
\end{aligned}$$

3) Akan ditunjukkan $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ memenuhi hukum distributif.

a. Distributif kanan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

$$\begin{aligned}
a(b + c) &= (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) [(b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}) + (c_0 + c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j})] \\
&= (a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) \mathbf{i} + (b_2 + c_2) \mathbf{j}] \\
&= (a_0 [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) \mathbf{i} + (b_2 + c_2) \mathbf{j}] \\
&\quad + (a_1 \mathbf{i} [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) \mathbf{i} + (b_2 + c_2) \mathbf{j}] \\
&\quad + (a_2 \mathbf{j} [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) \mathbf{i} + (b_2 + c_2) \mathbf{j}]) \\
&= [(a_0 b_0) + (a_0 c_0) + (a_0 b_1) + (a_0 c_1) \mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 b_2) \mathbf{j} + (a_0 c_2) \mathbf{j}] + [(a_1 b_0) \mathbf{i} + (a_1 c_0) \mathbf{i} \\
&\quad + (a_1 b_1) \mathbf{j} + (a_1 c_1) \mathbf{j} - (a_1 b_2) - (a_1 c_2)] \\
&\quad + [(a_2 b_0) \mathbf{j} + (a_2 c_0) \mathbf{j} - (a_2 b_1) - (a_2 c_1) \\
&\quad - (a_2 b_2) \mathbf{i} - (a_2 c_2) \mathbf{i}] \\
&= [((a_0 b_0) - (a_1 b_2) - (a_2 b_1)) + ((a_0 b_1) + (a_1 b_0) - \\
&\quad (a_2 b_2)) \mathbf{i} + ((a_0 b_2) + (a_1 b_1) + (a_2 b_0)) \mathbf{j}] \\
&\quad [((a_0 c_0) - (a_1 c_2) - (a_2 c_1)) \\
&\quad + ((a_0 c_1) + (a_1 c_0) - (a_2 c_2)) \mathbf{i} \\
&\quad + ((a_0 c_2) + (a_1 c_1) + (a_2 c_0)) \mathbf{j}] \\
&= (ab) + (ac).
\end{aligned}$$

b. Distributif kiri $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

$$\begin{aligned}
(a + b)c &= [(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) + (b_0 + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j})] \\
&\quad (c_0 + c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j}) \\
&= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \mathbf{i} + (a_2 + b_2) \mathbf{j}] (c_0 + c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j}) \\
&= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \mathbf{i} + (a_2 + b_2) \mathbf{j}] c_0 \\
&\quad + [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \mathbf{i} + (a_2 + b_2) \mathbf{j}] c_1 \mathbf{i} \\
&\quad + [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \mathbf{i} + (a_2 + b_2) \mathbf{j}] c_2 \mathbf{j} \\
&= [(a_0 c_0) + (b_0 c_0) + (a_1 c_0) \mathbf{i} + (b_1 c_0) \mathbf{i} \\
&\quad + (a_2 c_0) \mathbf{j} + (b_2 c_0) \mathbf{j} + (a_0 c_1) \mathbf{i} + (b_0 c_1) \mathbf{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(a_1c_1)\mathbf{j} + (b_1c_1)\mathbf{j} - (a_2c_1) - (b_2c_1) \\
& +(a_0c_2)\mathbf{j} + (b_0c_2)\mathbf{j} - (a_1c_2) - (b_1c_2) \\
& -(a_2c_2)\mathbf{i} - (b_2c_2)\mathbf{i}] \\
& = [(a_0c_0) - (a_1c_2) - (a_2c_1)] + [(a_0c_1) \\
& \quad + (a_1c_0) - (a_2c_2)]\mathbf{i} + [(a_0c_2) + (a_1c_1) \\
& \quad + (a_0c_2)]\mathbf{j} + [(b_0c_0) - (b_2c_1) - (b_1c_2)] \\
& \quad + [(b_0c_1) + (b_1c_0) - (b_2c_2)]\mathbf{i} + [(b_2c_0) \\
& \quad + (b_1c_1) + (b_0c_2)]\mathbf{j} \\
& = (ac) + (bc)
\end{aligned}$$

Karena ketiga syarat diatas terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa trinion merupakan suatu gelanggang

1.2.4 Bimodul

Ada beberapa syarat yang harus dipenuhi agar disebut bimodul. Berikut ini adalah syarat dalam membentuk bimodul yaitu:

1. M adalah R modul kiri
2. M adalah S modul kanan
3. $r.(m.s) = (r.m).s$ (Wisbauer,2018)

Definisi 1.2.3

- i. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan ring R dengan elemen satuan 1_R , serta operasi $\circ: R \times M \rightarrow M$. Grup M disebut **modul kiri atas ring R** apabila memenuhi aksioma-aksioma :

- a) $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$
- b) $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$
- c) $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$
- d) $1_R \circ m_1 = m_1$

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in R$

- ii. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan ring S dengan elemen satuan 1_S , serta operasi $\circ: M \times S \rightarrow M$ Grup M disebut **modul kanan atas ring S** apabila memenuhi aksioma-aksioma :

- a) $(m_1 + m_2) \circ s_1 = m_1 \circ s_1 + m_2 \circ s_1$
- b) $m_1 \circ (s_1 + s_2) = m_1 \circ s_1 + m_1 \circ s_2$
- c) $m_1 \circ (s_1 \cdot s_2) = (m_1 \circ s_1) \circ s_2$
- d) $m_1 \circ 1_S = m_1$

untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ dan $m_1, m_2 \in M$

- iii. Sifat kompatibilitas yaitu $r.(m.s) = (r.m).s$

1.2.5 Gelanggang

Gelanggang merupakan struktur aljabar yang lebih kompleks dari grup. Berbeda dengan grup yang merupakan struktur aljabar yang memiliki satu operasi biner, gelanggang adalah sebuah himpunan tak kosong dengan dua operator biner yang lazim disebut operator tambah

dengan lambang $(+)$ dan operator kali dengan lambang $(\cdot)$ atau seringkali tidak diberi lambang, yang memenuhi beberapa syarat atau aksioma yang disimbol dengan $(R, +, \cdot)$

Definisi 1.2.4

Himpunan R tak kosong disebut gelanggang jika di dalam R terdapat dua operasi umumnya disimbolkan $(+)$ dan $(\cdot)$ sedemikian sehingga berlaku:

- i. $a + b \in R, \forall a, b \in R$
- ii. $a + b = b + a, \forall a, b \in R$
- iii. $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in R$
- iv. Untuk setiap $a \in R$ terdapat elemen $0_R \in R$ sehingga $0_R + a = a = a + 0_R$. Selanjutnya 0_R disebut identitas dari R .
- v. Untuk setiap $a \in R$, terdapat $b \in R \ni a + b = 0$. Selanjutnya b disebut invers dari a terhadap penjumlahan di R , biasa ditulis $b = -a$.
- vi. $a \cdot b \in R, \forall a, b \in R$
- vii. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$
- viii. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$. Jika untuk setiap $a \in R$, terdapat $1_R \in R$, sehingga $1_R \cdot a = a = a \cdot 1_R$.

Selanjutnya, R disebut gelanggang dengan elemen satuan dan 1_R disebut elemen satuan di R . Apabila di R juga berlaku $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$ maka R dinamakan gelanggang komutatif (Shahriari, 2017).

1.2.6 Homomorfisma Gelanggang

Homomorfisma gelanggang merupakan suatu pemetaan dari gelanggang ke gelanggang yang memenuhi dua syarat tertentu.

Definisi 1.2.5

Misalkan R dan R' merupakan gelanggang. Pemetaan $f: R \rightarrow R'$ merupakan homomorfisma gelanggang jika $\forall a, b \in R$ berlaku:

- 1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- 2) $f(ab) = f(a)f(b)$. (Amir, 2010)

Contoh 1.2.1

Misalkan ϕ adalah homomorfisma dari suatu pemetaan $\phi: R \rightarrow R^1$ yang

didefinisikan dengan $\varphi(x) = x, \forall x \in R$. Akan ditunjukkan φ homomorfisma ring.

Bukti:

Ambil $a, b \in R$, maka

$$\begin{aligned}\varphi(a + b) &= (a + b) \\ &= (a) + (b) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b)\end{aligned}$$

Dan $\varphi(ab) = (a \cdot b)$

$$\begin{aligned}&= (a) \cdot (b) \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(b)\end{aligned}$$

Jadi $\varphi(R)$ adalah homomorfisma di R^1 .

1.2.7 Endomorfisma

Endomorfisma adalah pemetaan dalam teori aljabar yang menghubungkan suatu struktur aljabar dengan dirinya sendiri, dengan mempertahankan operasi yang ada dalam struktur tersebut. (Setiawan Adi, 2023)

Misalkan R adalah gelanggang trinion $a, b \in R$ dan $\sigma: R \rightarrow R$ maka berlaku:

$$\begin{aligned}\sigma(a + b) &= \sigma(a) + \sigma(b) \\ \sigma(ab) &= \sigma(a)\sigma(b)\end{aligned}$$

1.2.8 Gelanggang Polinomial Miring

Gelanggang polinomial miring atas R dengan variabel tak diketahui x adalah gelanggang $R[x; \sigma, \delta]$ yang terdiri dari polinom $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ dimana $a_i \in R$ yang memenuhi aturan perkalian $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$, untuk setiap $a \in R$. Apabila $\sigma = 1$ atau σ adalah endomorfisma identitas, maka gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x; \delta]$. Jika $\delta = 0$, gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x; \sigma]$. Sedangkan jika $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x]$, yang merupakan gelanggang polinomial biasa.

Definisi 1.2.6

Misal R adalah sebuah gelanggang dengan elemen satuan dan σ merupakan endomorfisma gelanggang, maka pemetaan $\delta: R \rightarrow R$ disebut sebagai σ -derivatif dari R jika untuk semua $a, b \in R$ memenuhi:

$$1) \delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b),$$

$$2) \delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b. \text{ (Farahat \& Al-Bogamy, 2021)}$$

Contoh 1.2.2

Misalkan $D = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$. σ adalah suatu endomorfisma pada D dan didefinisikan sebagai $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ -derivatif. Dengan demikian $D[x; \sigma, \delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring.

Misalkan terdapat dua polinom miring $f(x) = (4 - 2\sqrt{-5})x$ dengan $g(x) = (3 + 5\sqrt{-5})x$

- $f(x)g(x) = [(4 - 2\sqrt{-5})x][(3 + 5\sqrt{-5})x]$

$$= (4 - 2\sqrt{-5})[x(3 + 5\sqrt{-5})]x$$

$$= (4 - 2\sqrt{-5})[\sigma(3 + 5\sqrt{-5})x + \delta(3 + 5\sqrt{-5})]x$$

$$= (4 - 2\sqrt{-5})(3 - 5\sqrt{-5})x^2 + (4 - 2\sqrt{-5})5x$$

$$= (-38 - 26\sqrt{-5})x^2 + (20 - 10\sqrt{-5})x$$
- $g(x)f(x) = [(3 + 5\sqrt{-5})x][(4 - 2\sqrt{-5})x]$

$$= (3 + 5\sqrt{-5})[x(4 - 2\sqrt{-5})]x$$

$$= (3 + 5\sqrt{-5})[\sigma(4 - 2\sqrt{-5})x + \delta(4 - 2\sqrt{-5})]x$$

$$= (3 + 5\sqrt{-5})(4 + 2\sqrt{-5})x^2 + (3 + 5\sqrt{-5})(-2)x$$

$$= (-38 + 26\sqrt{-5})x^2 + (-6 - 10\sqrt{-5})x$$

Karena $f(x)g(x) \neq g(x)f(x)$ maka dapat disimpulkan bahwa perkalian gelanggang polinom miring tidak bersifat komutatif.

1.2.9 Pusat Gelanggang

Berikut akan diuraikan bentuk pusat gelanggang

Definisi 1.2.7

Misalkan R adalah gelanggang. Pusat dari gelanggang R disimbolkan dengan $Z(R)$ yang didefinisikan sebagai

$$Z(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\}$$

Contoh 1.2.3

Gelanggang $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Pusat dari gelanggang R adalah $Z(R) = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Bukti:

Misalkan $r = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $x = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ maka

$$rx = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix}$$

$$xr = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix}$$

Dari persamaan di atas, terbukti bahwa $rx = xr$, sehingga adalah

$$Z(R) = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid n \in Z \right\} \text{ merupakan pusat dari } R. \text{ (Juson,T.W.2011)}$$

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Waktu dan Tempat Pelaksanaan

Penelitian dimulai sejak 20 Agustus 2024 di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

2.2 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur atau kajian pustaka dengan cara mengumpulkan informasi dari buku-buku maupun literatur lainnya yang relevan dengan masalah penelitian kemudian menggunakannya untuk menganalisis objek penelitian. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

a. Mencari literatur di buku, jurnal dan beberapa situs terkait.

Pada tahapan ini, penelitian diawali dengan cara mengumpulkan informasi dari buku, jurnal dan situs terkait topik penelitian dalam hal ini bimodul dari trinion kemudian di uji menggunakan syarat bimodul dan matriks segitiga formal atas gelanggang trinion. Selanjutnya akan diuji menggunakan syarat gelanggang

b. Menentukan pemetaan σ dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion.

Pada tahapan ini, dicari pemetaan σ yang memenuhi syarat endomorfisma gelanggang.

c. Mencari bentuk $x^n(a)$

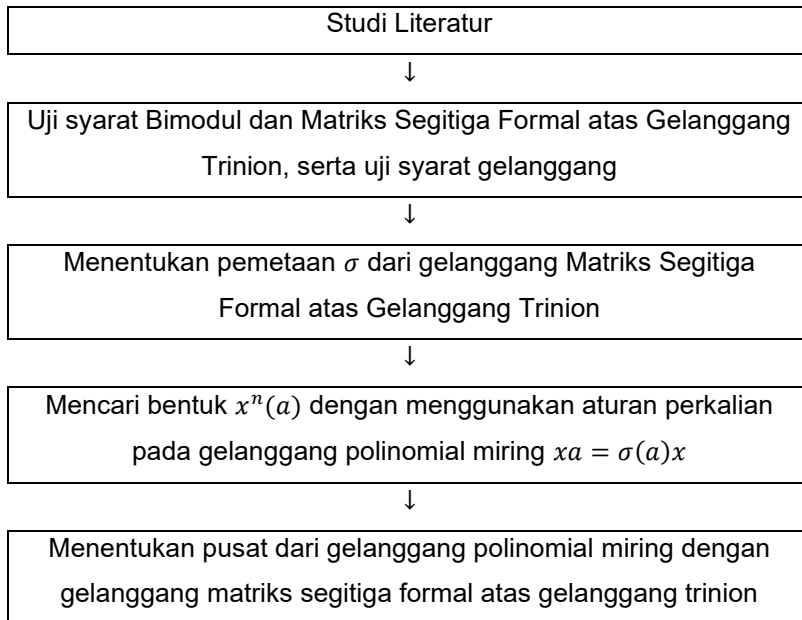
Pada tahapan ini, dicari bentuk $x^n(a)$ dengan menggunakan aturan perkalian pada gelanggang polinomial miring yaitu $xa = \sigma(a)x$ dengan $a \in R[x; \sigma]$

d. Menentukan pusat dari gelanggang polinomial miring

Pada tahapan ini, dicari pusat dari gelanggang polinomial miring dengan gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinion dengan memanfaatkan hasil yang diperoleh dari langkah-langkah sebelumnya.

2.3 Diagram Alur Penelitian

Adapun alur dari penelitian ini ditunjukkan pada diagram berikut.



Gambar 2.3.1. Diagram alur penelitian