

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Struktur aljabar adalah cabang matematika yang mengkaji tentang grup, gelanggang atau ring, ideal, lapangan dan lainnya yang didefinisikan dan diajarkan secara aksiomatis. Jika dalam grup membicarakan tentang satu himpunan dan satu operasi maka dalam gelanggang membicarakan tentang satu himpunan dengan dua operasi yang berbeda yaitu tambah (+) dan kali ($\times$).

Gelanggang adalah satu himpunan tak kosong yang memenuhi dua operasi biner terhadap penjumlahan dan perkalian yang memenuhi beberapa syarat atau aksioma yang disimbolkan dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$. Setiap dua anggota dalam gelanggang tersebut perkaliannya bersifat komutatif maka disebut gelanggang komutatif. Jika terdapat salah satu anggota dari gelanggang tersebut yang perkaliannya tidak komutatif maka gelanggang tersebut disebut gelanggang tak komutatif. Gelanggang R adalah gelanggang komutatif dengan elemen satuan apabila R merupakan gelanggang komutatif serta memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian (Dummit & Foote, 2004).

Ore (1933) telah memperkenalkan gelanggang polinom miring yang merupakan pengembangan dari pembahasan gelanggang. Contohnya gelanggang polinom miring atas bilangan real adalah himpunan polinom-polinom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ dimana x adalah variabel yang tak diketahui dan $a_i \in R$ yang memenuhi aturan perkalian $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ untuk semua $a_i \in R$, dimana σ adalah endomorfisma dan δ adalah σ -derivatif. Operator biner yang terdefinisi di dalam gelanggang polinom biasa adalah operator tambah dan kali biasa, sedangkan operator kali di dalam gelanggang polinom miring mengandung σ dan δ dengan aturan perkalian $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$. Aturan inilah yang membuat gelanggang polinom miring bersifat tidak komutatif meskipun gelanggang tumpuannya gelanggang komutatif. Namun, terdapat hal yang menarik dan berperan cukup penting dalam pengkajian struktur gelanggang polinom miring, yaitu terdapat himpunan bagian yang bersifat komutatif dengan setiap unsur dari gelanggang polinom miring yang dikenal dengan istilah pusat dan dinotasikan dengan $Z(R[[x; \sigma, \delta]])$.

Amir (2012) mengembangkan penelitian gelanggang polinom miring dengan membentuk gelanggang polinom miring dari gelanggang tumpuan yang tidak komutatif. Coquaternion adalah salah satu contoh standar gelanggang yang tidak komutatif yang diperkenalkan oleh James Cockle pada tahun 1849. Selanjutnya Fadhillah dkk, dengan penelitiannya menemukan bentuk pusat dari gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan coquaternion.

Gelanggang matriks segitiga formal yang terdiri dari matriks segitiga atas memiliki aplikasi penting dalam teori representasi dan sistem linear. Hoger Grahmani melakukan penelitian mengenai struktur gelanggang polinom miring

yang didefinisikan atas matriks segitiga formal. Dalam penelitiannya, Grahmani (2012) membuktikan gelanggang polinom miring atas matriks segitiga formal dengan endomorfisma dan standar derivasi tertentu. Penelitian lainnya juga menunjukkan bahwa gelanggang matriks segitiga formal dapat digunakan untuk membangun gelanggang Armendariz yang memiliki sifat-sifat menarik dalam konteks aljabar (Anwar, et. al. 2023).

Pada gelanggang segitiga formal, dapat dibangun struktur gelanggang baru dengan menggabungkan dua gelanggang yaitu R dan S , serta bimodul M yang menghubungkan keduanya. Dalam konteks ini, R merupakan matriks yang berukuran 2×2 yang entri-entrinya merupakan gelanggang coquaternion, sedangkan S adalah gelanggang coquaternion yang dipresentasikan dalam bentuk matriks 1×1 . Di sisi lain, M sebagai bimodul yang berukuran 2×1 ini juga memiliki entri-entri gelanggang coquaternion. Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik untuk mengkaji mengenai struktur gelanggang polinom miring atas gelanggang matriks segitiga formal dengan gelanggang tumpuan coquaternion.

1.1.1. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana membentuk matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion sebagai gelanggang?
2. Bagaimana bentuk endomorfisma dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion?
3. Bagaimana bentuk hasil perkalian polinomial $x^n(A)$ dengan anggota matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion?
4. Bagaimana bentuk pusat dari gelanggang polinom miring atas matriks segitiga formal?

1.1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk membentuk gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion.
2. Untuk mendefinisikan bentuk endomorfisma dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion.
3. Untuk mengidentifikasi bentuk hasil perkalian polinomial $x^n(A)$ dengan anggota matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion.
4. Untuk menemukan bentuk pusat dari gelanggang polinom miring atas matriks segitiga formal.

1.1.3. Batasan Penelitian

Penelitian ini hanya membahas tentang pembentukan gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang trinomial dan bentuk $x^n(A)$ yang merupakan hasil perkalian x^n dengan anggota matriks segitiga formal serta pusat dari gelanggang polinomial miring yang dibangun dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion.

1.1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam perkembangan ilmu aljabar, khususnya pengetahuan tentang gelanggang matriks segitiga formal atas coquaternion dan bentuk pusat gelanggang polinomial miring atas matriks segitiga formal dengan gelanggang tumpuan coquaternion.

1.2. Landasan Teori

1.2.1. Matriks Segitiga Formal

Defenisi 1.1

Matriks segitiga formal ($\mathcal{T}$) berordo 2×2 juga dikenal sebagai matriks segitiga atas berordo 2×2 dengan bentuk sebagai berikut :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$$

dimana R adalah sebuah gelanggang (Anwar, et. al. 2023)

1.2.2. Modul dan Bimodul

Modul M atas ring R adalah struktur aljabar yang dibentuk oleh suatu grup abel M terhadap operasi penjumlahan dan suatu ring R , yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar sehingga memenuhi syarat-syarat tertentu (Wisbauer, 2018).

Defenisi 1.2

Diberikan R dan S masing-masing adalah ring, M adalah suatu grup abel terhadap operasi penjumlahan, dan operasi perkalian skalar $*$: $R \times M \rightarrow M$ serta $\bullet$: $M \times S \rightarrow M$. Himpunan M merupakan (R, S) -bimodul apabila M merupakan modul kiri atas ring R , M merupakan modul kanan atas ring S , dan memenuhi sifat kompatibilitas yaitu untuk setiap $r \in R$, $s \in S$, dan $m \in M$ memenuhi $r * (m \bullet s) = (r * m) \bullet s$.

Defenisi 1.3

- i. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan ring R dengan elemen satuan 1_R , serta operasi $\circ : R \times M \rightarrow M$. Grup M disebut **modul kiri atas ring R** apabila memenuhi aksioma-aksioma :
 - a) $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$
 - b) $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$

- c) $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$
 d) $1_R \circ m_1 = m_1$
 untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$
- ii. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan ring R dengan elemen satuan 1_S , serta operasi $\circ : M \times S \rightarrow M$. Grup M disebut **modul kanan atas ring S** apabila memenuhi aksioma-aksioma :
- a) $(m_1 + m_2) \circ s_1 = m_1 \circ s_1 + m_2 \circ s_1$
 b) $m_1 \circ (s_1 + s_2) = m_1 \circ s_1 + m_1 \circ s_2$
 c) $m_1 \circ (s_1 \cdot s_2) = (m_1 \circ s_1) \circ s_2$
 d) $m_1 \circ 1_S = m_1$
 untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ dan $m_1, m_2 \in M$
- iii. $r * (m \cdot s) = (r * m) \cdot s$.
 untuk setiap $r \in R$, $m \in M$, dan $s \in S$.

Struktur aljabar (R, S) -modul merupakan suatu perumuman dari (R, S) -bimodul sehingga (R, S) -bimodul merupakan kejadian khusus dari (R, S) -modul. Hal tersebut berarti bahwa (R, S) -bimodul pasti merupakan (R, S) -modul, tetapi (R, S) -modul belum tentu merupakan (R, S) -bimodul (Wisbauer, 2018).

1.2.3. Gelanggang

Struktur aljabar yang paling umum dengan dua operasi biner disebut dengan gelanggang (Fraleigh, 2003).

Defenisi 1.4

Sebuah gelanggang $[R, +, \cdot]$ adalah sebuah himpunan R dengan dua operasi biner, penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ yang didefenisikan pada R yang $\forall a, b, c \in R$ memenuhi aksioma-aksioma berikut :

- $a + b \in R, \forall a, b \in R$
- $a + b = b + a, \forall a, b \in R$
- $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in R$
- $\exists (0 + 0i + 0j + 0k = 0_q) \in R, \exists \forall a \in R$ berlaku $(0 + 0i + 0j + 0k) + a = a + (0 + 0i + 0j + 0k)$ selanjutnya 0 disebut sebagai elemen netral dari R
- $\forall a \in R, \exists a + (-a) = 0_q, -a$ disebut invers dari penjumlahan
- $ab \in R, \forall a, b \in R$
- $a(bc) = (ab)c, \forall a, b, c \in R$
- $a(b + c) = (ab) + (ac)$ dan $(a + b)c = (ac) + (bc), \forall a, b, c \in R$

Menurut aksioma a sampai e, maka sebuah gelanggang haruslah merupakan grup abelian (komutatif) terhadap operasi penjumlahan. Jika untuk setiap $a \in R$, terdapat $1 \in R$, sehingga $a1 = 1a = a$. Selanjutnya R

disebut gelanggang dengan elemen satuan dan 1 disebut elemen satuan di R .

Apabila di R juga berlaku $ab = ba, \forall a, b \in R$ maka R dinamakan gelanggang komutatif (Rotman, 2003).

1.2.4. Homomorfisma

Homomorfisma adalah hubungan pemetaan, berikut pemaparan definisi homomorfisma.

Defenisi 1.5

Misalkan R dan R' merupakan gelanggang. Pemetaan $f: R \rightarrow R'$ adalah homomorfisma gelanggang jika

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a) \circ f(b)$$

untuk setiap $a, b \in R$ (Fraleigh, 2003)

Contoh 1.1

Diberikan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

$$T_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

Didefinisikan pemetaan $f: T_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T_{2 \times 2}(\mathbb{Z}).$$

$$f\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\} = a$$

Mudah ditunjukkan bahwa pemetaan f merupakan homomorfisma ring.

1.2.5. Endomorfisma

Defenisi 1.6

Suatu endomorfisma gelanggang dinyatakan dengan $\text{End}(A)$ adalah homomorfisma gelanggang yang memetakan gelanggang R ke dirinya sendiri (Rotman, 2003).

Misalkan R adalah gelanggang $a, b, c \in R$ dan $\sigma: R \rightarrow R$ maka berlaku :

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$$

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

1.2.6. Pusat Gelanggang

Defenisi 1.7

Misalkan R adalah gelanggang. Pusat dari gelanggang R disimbolkan dengan $Z(R)$ yang didefinisikan sebagai

$$Z(R) = \{r \in R \mid rx = xr, \forall x \in R\}$$

(Judson, 2011).

Contoh 1.2

Gelanggang $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Pusat dari gelanggang R adalah

$$Z(R) = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Bukti.

Misalkan $r = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $x = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ maka

$$rx = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix}$$

$$xr = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na & nb \\ nc & nd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix}$$

Dari persamaan di atas, terbukti bahwa $rx = xr$, sehingga adalah $Z(R) = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ merupakan pusat dari R (Fadhilah, et. al.)

1.2.7. Gelanggang Polinom Miring

Dalam gelanggang polinom biasa, perkalian antar polinom-polinom bersifat komutatif. Namun demikian, suatu gelanggang polinom dengan perkalian antar polinom tidak komutatif. Ore (1993) memperkenalkan suatu gelanggang polinom tidak komutatif, yang selanjutnya dikenal dengan gelanggang polinom miring. Berikut akan diuraikan definisi gelanggang polinom miring.

Defenisi 1.8

Misalkan R adalah gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu endomorfisma di R , dan δ adalah suatu σ -derivatif, yaitu :

- δ suatu endomorfisma grup terhadap operator tambah dalam R
- $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$, untuk setiap $a, b \in R$.

Gelanggang polinom miring atas R dengan peubah acak x adalah gelanggang :

$$R[x; \sigma, \delta] = \{(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \mid a_i \in R\}$$

dengan $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ untuk setiap $a_i \in R$. Suatu unsur p dalam gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ mempunyai bentuk kanonik sebagai berikut :

$$p = \sum_{i=0}^n a_i x^i, n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}, a_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$$

Untuk kasus $\sigma = 1$ atau σ adalah suatu endomorfisma identitas, maka gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x; \delta]$. Untuk kasus $\delta = 0$, gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x; \sigma]$. Sedangkan untuk kasus $\sigma = 1$ atau $\delta = 0$, cukup ditulis $R[x]$ yang merupakan gelanggang polinom biasa (McConnell dan Robson, 1987).

Contoh 1.3

Misalkan $D = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$. σ adalah suatu endomorfisma pada D dan didefinisikan sebagai $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ -derivatif. Dengan demikian $D[x; \sigma, \delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring.

Misalkan terdapat dua polinom miring $f(x) = (4 - 2\sqrt{-5})x$ dengan $g(x) = (3 + 5\sqrt{-5})x$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad f(x)g(x) &= [(4 - 2\sqrt{-5})x][(3 + 5\sqrt{-5})x] \\
 &= (4 - 2\sqrt{-5})[x(3 + 5\sqrt{-5})]x \\
 &= (4 - 2\sqrt{-5})[\sigma(3 + 5\sqrt{-5})x + \delta(3 + 5\sqrt{-5})]x \\
 &= (4 - 2\sqrt{-5})(3 - 5\sqrt{-5})x^2 + (4 - 2\sqrt{-5})5x \\
 &= (-38 - 26\sqrt{-5})x^2 + (20 - 10\sqrt{-5})x \\
 \bullet \quad g(x)f(x) &= [(3 + 5\sqrt{-5})x][(4 - 2\sqrt{-5})x] \\
 &= (3 + 5\sqrt{-5})[x(4 - 2\sqrt{-5})]x \\
 &= (3 + 5\sqrt{-5})[\sigma(4 - 2\sqrt{-5})x + \delta(4 - 2\sqrt{-5})]x \\
 &= (3 + 5\sqrt{-5})(4 + 2\sqrt{-5})x^2 + (3 + 5\sqrt{-5})(-2)x \\
 &= (-38 + 26\sqrt{-5})x^2 + (-6 - 10\sqrt{-5})x
 \end{aligned}$$

Karena $f(x)g(x) \neq g(x)f(x)$ maka dapat disimpulkan bahwa perkalian gelanggang polinom miring tidak bersifat komutatif.

1.2.8. Aljabar Coquaternion

Defenisi 1.9

Coquaternion merupakan kombinasi linear skalar real dan tiga satuan imajiner (dilambangkan dengan i, j, k) dengan koefisien real, sehingga himpunan $\{1, i, j, k\}$ membentuk sebuah basis. Menurut Kyrchei (2016), James Cockle memperkenalkan coquaternion pada 1849 yang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbb{H}_s = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

dimana elemen i, j dan k memenuhi aturan perkalian berikut ini:

$$i^2 = -1; j^2 = k^2 = 1; ij = k = -ji; jk = -i = -kj; ki = j = -ik$$

Berdasarkan aturan perkalian tersebut, jelas terlihat bahwa coquaternion tidak komutatif terhadap perkalian. Alagos, et al (2012) mencatat beberapa sifat-sifat pada coquaternion, yakni:

1. Konjugat dari Coquaternion

Misalkan diberikan coquaternion $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}_s$, maka konjugat dari coquaternion tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$q^* = \bar{q} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$$

2. Norm dari Coquaternion

Norm dari coquaternion diperoleh dari modulus perkalian coquaternion dengan konjugatnya $\bar{q}$.

$$|q| = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{|I_q|} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}$$

Jika $|q| = 1$, maka q disebut unit dari coquaternion.

3. Invers dari Coquaternion

Invers dari coquaternion dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{I_q}, \text{ jika } I_q \neq 0$$

1.2.9. Gelanggang Polinom Miring atas Coquaternion

Gelanggang polinom miring atas coquaternion dengan variabel tak diketahui x adalah gelanggang yang terdiri atas polinom-polinom sebagai berikut :

$$q(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

Dengan $q_i \in \mathbb{H}_s$ atau $q_i = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ dengan $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$.

Contoh 1.7

Misalkan

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \text{ dan } \sigma_1: \mathbb{H}_s \rightarrow \mathbb{H}_s$$

$$\sigma(a) = \sigma_1(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = a_0 + a_1 i - a_2 j + a_3 k$$

Maka σ adalah endomorfisma gelanggang dan $\mathbb{H}_s[x, \sigma]$ merupakan gelanggang polinom miring.

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1. Lokasi dan Waktu Penelitian

Lokasi penelitian ini bertempat di Kota Makassar Provinsi Sulawesi Selatan, khususnya di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin. Penelitian ini dilaksanakan sejak 20 Agustus 2024.

2.2. Studi Pustaka

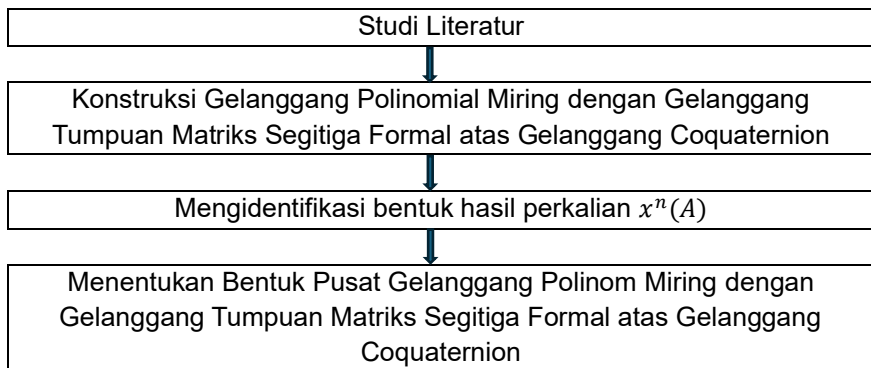
Studi pustaka ini dilakukan terhadap referensi-referensi penelitian yang berkaitan dengan penelitian sebagai tahap melengkapi pengetahuan dasar peneliti untuk keperluan pelaksanaan penelitian.

2.3. Rancangan Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan materi yang berkaitan dengan gelanggang matriks segitiga formal.
2. Mengonstruksi bentuk endomorfisma dari gelanggang matriks segitiga formal atas gelanggang coquaternion.
3. Menentukan bentuk pusat dari gelanggang polinom miring atas matriks segitiga formal.

2.4. Alur Kerja



Gambar 1. Alur Kerja Penelitian