

BAB 1 PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam aljabar abstrak atau sering juga disebut sebagai aljabar modern dipelajari mengenai struktur aljabar seperti grup, gelanggang, dan lainnya. Struktur aljabar merupakan ilmu yang mempelajari tentang satu atau lebih himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner yang didefinisikan (Gilbert, 2013). Di dalam gelanggang (ring) dibahas mengenai sebuah himpunan yang dipasangkan dengan dua buah operasi biner. Dua operasi biner yang umum digunakan pada gelanggang berupa operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ($\cdot$). Apabila suatu gelanggang R memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian maka R dinamakan gelanggang dengan elemen satuan. Apabila operasi perkalian pada gelanggang R bersifat komutatif maka gelanggang R dinamakan gelanggang komutatif (Dummit & Foote, 2004). Apabila terdapat operasi perkalian dua anggota gelanggang yang tidak bersifat komutatif, maka gelanggang tersebut disebut dengan gelanggang nonkomutatif. Salah satu contoh gelanggang nonkomutatif adalah gelanggang polinom miring yang diperkenalkan pertama kali oleh Ore pada tahun 1933. Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang berbasis himpunan polinom-polinom yang operasi perkaliannya tidak komutatif.

Gelanggang Polinom Miring telah memerankan peran yang penting dalam teori gelanggang yang tidak komutatif dan telah banyak peneliti yang bergelut dalam teori gelanggang nonkomutatif menginvestigasi bentuk gelanggang tersebut dari berbagai sudut pandang, seperti teori ideal, teori order, teori Galois, dan aljabar homologi (Amir, 2010). Hoger Ghahramani mempelajari struktur gelanggang polinom miring atas gelanggang matriks segitiga formal. Hoger Ghahramani membuktikan bahwa gelanggang polinom miring atas gelanggang matriks segitiga formal isomorfik dengan suatu gelanggang matriks segitiga formal dengan endomorfisma dan derivasi miring tertentu pada gelanggang matriks segitiga formal (Ghahramani, 2012).

Gelanggang dari Morita konteks adalah perumuman dari gelanggang matriks segitiga formal. Suatu Morita konteks merupakan 6-tupel $M = (R, V, W, S, \alpha, \beta)$ dengan R dan S merupakan ring, V merupakan suatu (R, S) – bimodul, W merupakan suatu (S, R) – bimodul, $\alpha : V \otimes_S W \rightarrow R$ merupakan suatu homomorfisma (R, R) –bimodul dan $\beta : W \otimes_R V \rightarrow S$ merupakan homomorfisma (S, S) –bimodul. Dengan menggunakan sifat pada komponen-komponen penyusun M , suatu ring dapat dikonstruksikan yaitu $M = \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix}$ yang disebut sebagai gelanggang Morita konteks (Dahoklory, dkk, 2020). Pada gelanggang Morita konteks, dapat dibangun struktur gelanggang baru dengan memasukkan dua gelanggang, R dan S , serta dua bimodul, V dan W , yang menghubungkan kedua gelanggang tersebut. Dalam hal ini, R dan S bisa berupa gelanggang barisan bilangan riil, sementara V dan W adalah modul-modul yang terdiri dari barisan

bilangan riil. Modul V bertindak sebagai (R, S) –bimodul, yang berarti setiap elemen di dalamnya dapat dioperasikan oleh bilangan riil dari R di sebelah kiri dan S di sebelah kanan. Begitu pula dengan modul W , yang merupakan (S, R) –bimodul. Homomorfisme $\alpha: V \otimes_S W \rightarrow R$ dan $\beta: W \otimes_R V \rightarrow S$ menghubungkan modul-modul ini dengan gelanggang R dan S akan menghasilkan kombinasi linear dari barisan bilangan riil. Dengan demikian, kita dapat membangun struktur gelanggang baru dalam bentuk matriks. Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji struktur dari gelanggang polinom miring atas gelanggang morita konteks yang dibentuk dari gelanggang pasangan barisan bilangan riil beringga.

1.1.1. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana membentuk $V (R, S)$ -bimodul dan $W (S, R)$ -bimodul?
2. Bagaimana membentuk gelanggang morita konteks atas gelanggang pasangan barisan bilangan riil berhingga?
3. Bagaimana bentuk endomorfisma gelanggang morita konteks atas gelanggang pasangan barisan bilangan riil berhingga?
4. Bagaimana bentuk hasil perkalian polinom $X^n A$ dengan anggota gelanggang morita konteks atas gelanggang pasangan barisan bilangan riil berhingga?

1.1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk membentuk $V (R, S)$ -bimodul dan $W (S, R)$ -bimodul.
2. Untuk membentuk gelanggang morita konteks atas gelanggang pasangan barisan bilangan riil berhingga.
3. Untuk mengetahui bentuk endomorfisma gelanggang morita konteks atas gelanggang pasangan barisan bilangan riil berhingga.
4. Untuk mengetahui bentuk hasil perkalian polinom $X^n A$ dengan anggota gelanggang morita konteks atas gelanggang pasangan barisan bilangan riil berhingga.

1.1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas pembentukan gelanggang polinom miring morita konteks $M = (R, V, W, S)$ dengan R, S adalah gelanggang, $V = V_{R \times S}$ adalah (R, S) -bimodul, dan $W = W_{S \times R}$ adalah (S, R) -bimodul, dimana elemen dari (R, V, W, S) adalah gelanggang barisan bilangan riil berhingga yang kemudian akan dibuktikan sebagai gelanggang polinom miring.

1.1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam perkembangan bidang ilmu matematika, khususnya di bidang aljabar, serta menjadi referensi bagi penelitian-penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan topik ini.

1.2. Landasan Teori

1.2.1. Gelanggang

Gelanggang merupakan struktur aljabar yang lebih kompleks dari grup. Berbeda dengan grup yang merupakan struktur aljabar yang memiliki satu operasi biner, gelanggang adalah sebuah himpunan tak kosong dengan dua operator biner yang lazim disebut operator tambah dengan lambang '+' dan operator kali dengan lambang '·' (seringkali tidak diberi lambang), yang memenuhi beberapa syarat atau aksioma yang disimbol dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$

Definisi 1.1

Himpunan R tak kosong disebut gelanggang jika di dalam R terdapat dua operasi umumnya disimbolkan $(+)$ dan $(\cdot)$ sedemikian sehingga berlaku:

1. $a + b \in R, \forall a, b \in R$.
2. $a + b = b + a, \forall a, b \in R$.
3. $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in R$.
4. Untuk setiap $a \in R$, terdapat elemen $0_R \in R$ sehingga $0_R + a = a = a + 0_R$. Selanjutnya 0_R disebut identitas dari R .
5. Untuk setiap $a \in R$, terdapat $b \in R \ni a + b = 0$. Selanjutnya b disebut invers dari a terhadap penjumlahan di R , biasa ditulis $b = -a$.
6. $a \cdot b \in R, \forall a, b \in R$.
7. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$.
8. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \forall a, b, c \in R$. Jika untuk setiap $a \in R$, terdapat $1_R \in R$, sehingga $1_R \cdot a = a = a \cdot 1_R$. Selanjutnya, R disebut gelanggang dengan elemen satuan dan 1_R disebut elemen satuan di R . Apabila di R juga berlaku $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in R$ maka R dinamakan gelanggang komutatif (Shahriari, 2017).

Adapun contoh dari gelanggang adalah sebagai berikut:

Contoh 1.1 (Rafiudin, 2023)

Diketahui $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, didefinisikan operasi $+$ adalah operasi penjumlahan pada matriks dan operasi $(\cdot)$ adalah operasi perkalian pada matriks $(M, +, \cdot)$, maka M merupakan gelanggang.

Bukti:

- a) Mudah ditunjukkan bahwa $(M, +)$ merupakan grup abelian.
- b) $(M, \cdot)$ bersifat asosiatif $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \forall A, B, C \in M$.

Ambil sembarang $A, B, C \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ dengan $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a(ce) & 0 \\ 0 & b(df) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ce & 0 \\ 0 & df \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right) \\
&= A \cdot (B \cdot C)
\end{aligned}$$

$\therefore$ Terbukti $(M, \cdot)$ bersifat asosiatif $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \forall A, B, C \in M$.

c) Akan ditunjukkan bersifat distributif kanan dan kiri

Ambil sembarang $A, B, C \in M$ dengan $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ dengan $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, maka

(i) Bersifat distributif kanan $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

$$\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c+e & 0 \\ 0 & d+f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac+ae & 0 \\ 0 & bd+bf \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & bf \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right) \\
&= (A \cdot B) + (A \cdot C)
\end{aligned}$$

$$\therefore A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

(ii) Bersifat distributif kiri $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

$$\begin{aligned}
(A + B) \cdot C &= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae+ce & 0 \\ 0 & bf+df \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & bf \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ce & 0 \\ 0 & df \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right) \\
&= (A \cdot C) + (B \cdot C)
\end{aligned}$$

$$\therefore (A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

Karena memenuhi ketiga syarat diatas maka terbukti bahwa $(M, +, \cdot)$ merupakan gelanggang.

1.2.2. Homomorfisma Gelanggang

Homomorfisma gelanggang merupakan suatu pemetaan dari gelanggang ke gelanggang yang memenuhi dua syarat tertentu.

Definisi 1.2

Misalkan R dan R' merupakan gelanggang. Pemetaan $f: R \rightarrow R'$ merupakan homomorfisma gelanggang jika $\forall a, b \in R$ berlaku:

- 1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- 2) $f(ab) = f(a)f(b)$. (Amir, 2010)

Definisi 1.3

Endomorfisma gelanggang merupakan homomorfisma gelanggang dari suatu gelanggang ke dirinya sendiri (Shahriari, 2017).

Contoh 1.2

Himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil $M_R^{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$ dengan operasi penjumlahan matriks (+) dan perkalian matriks ($\cdot$) membentuk gelanggang. Misalkan suatu pemetaan

$\sigma: M_R^{2 \times 2} \rightarrow M_R^{2 \times 2}$ yang didefinisikan dengan $\sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$, untuk

setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_R^{2 \times 2}$. Akan ditunjukkan σ merupakan suatu endomorfisma gelanggang. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa σ merupakan suatu homomorfisma gelanggang. Ambil sebarang $x, y \in M_R^{2 \times 2}$, dengan $x =$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sigma(x + y) &= \sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \\
 &= \sigma \left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} a+e & -(b+f) \\ -(c+g) & d+h \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a+e & -b-f \\ -c-g & d+h \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -f \\ -g & h \end{pmatrix} \\
 &= \sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) + \sigma \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \\
 &= \sigma(x) + \sigma(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sigma(x \cdot y) &= \sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \\
 &= \sigma \left(\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} ae+bg & -(af+bh) \\ -(ce+dg) & cf+dh \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ae+bg & -af-bh \\ -ce-dg & cf+dh \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ -g & h \end{pmatrix} \\
&= \sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \cdot \sigma \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \\
&= \sigma(x) \cdot \sigma(y)
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh bahwa σ merupakan homomorfisma. Karena σ merupakan homomorfisma gelanggang dan memetakan $M_R^{2 \times 2}$ ke dirinya sendiri, maka σ adalah endomorfisma gelanggang.

1.2.3. Gelanggang Polinom Miring

Gelanggang polinom miring atas R dengan variabel tak diketahui x adalah gelanggang $R[x; \sigma, \delta]$ yang terdiri dari polinom $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ dimana $a_i \in R$ yang memenuhi aturan perkalian $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$, untuk setiap $a \in R$. Apabila $\sigma = 1$ atau σ adalah endomorfisma identitas, maka gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x; \delta]$. Jika $\delta = 0$, gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x; \sigma]$. Sedangkan jika $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x]$, yang merupakan gelanggang polinom biasa.

Definisi 1.4

Misal R adalah sebuah gelanggang dengan elemen satuan dan σ merupakan endomorfisma gelanggang, maka pemetaan $\delta: R \rightarrow R$ disebut sebagai σ -derivatif dari R jika untuk semua $a, b \in R$ memenuhi

- 1) $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$,
- 2) $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$. (Farahat & Al-Bogamy, 2021)

Contoh 1.3

Misalkan Gelanggang $(M_R^{2 \times 2}, +, \cdot)$ di mana $M_R^{2 \times 2}$ merupakan himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen bilangan riil, diberikan σ yang merupakan endomorfisma gelanggang pada $M_R^{2 \times 2}$ yang didefinisikan dengan $\sigma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$, untuk setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_R^{2 \times 2}$. Selanjutnya diberikan juga pemetaan δ yang merupakan σ -derivatif dan didefinisikan sebagai $\delta \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, untuk setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_R^{2 \times 2}$. Maka gelanggang $M_R^{2 \times 2}$ dengan σ dan δ membentuk gelanggang polinom miring yang disimbolkan dengan $M_R^{2 \times 2}[x; \sigma, \delta]$. Misalkan diambil $f(x), g(x) \in M_R^{2 \times 2}[x; \sigma, \delta]$ dengan $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x^2$ dan $g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$, akan diperlihatkan bahwa perkalian pada $M_R^{2 \times 2}[x; \sigma, \delta]$ tidak komutatif.

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x^2 \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \right) \left(x \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \delta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(x \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(x \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \delta \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\sigma \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \delta \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x \\
g(x)f(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x + \delta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right) x^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} x^2 \\
&= \begin{pmatrix} -11 & 14 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} x^2 \\
\therefore f(x)g(x) &\neq g(x)f(x) \text{ (Tidak Komutatif)}
\end{aligned}$$

1.2.4. Barisan Bilangan Riil Berhingga

Definisi 1.5

Misal X merupakan suatu himpunan. Barisan dalam X adalah sebuah fungsi $a: N \rightarrow X$, di mana $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ untuk suatu $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dalam kata lain barisan adalah sebuah fungsi dengan nilai di dalam X dengan domainnya berupa seluruh bilangan bulat dimulai dengan n_0 (biasanya $n_0 = 0$ atau 1). Jika a merupakan sebuah barisan, maka biasanya tidak dinotasikan dengan $a(n)$ melainkan digunakan (a_n) (Hsu, 2020).
Jika $X = \mathbb{R}$ yaitu himpunan seluruh bilangan riil dan $a: N \rightarrow \mathbb{R}$, maka barisan (a_n) merupakan barisan bilangan riil.

Definisi 1.6

Barisan berhingga merupakan barisan yang memiliki domain yang berhingga. Sedangkan jika suatu barisan memiliki domain yang tidak berhingga maka barisan tersebut disebut dengan barisan tak hingga (Sosang, 2022).

Definisi 1.7

Jumlah barisan (a_n) dan (b_n) adalah sebuah barisan (k_n) yang didefinisikan sebagai $k_n = a_n + b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{Z} \geq 0$ dan ditulis dengan $(k_n) = (a_n + b_n)$ (Anderson & Hall, 2012).

Teorema 1.1

Misalkan $S = \{0, 1, 2, \dots, t\}$ dan $t \in \mathbb{Z} \geq 0$. Diberikan $R^S = \{(a_n)_{n \in S} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in S\}$ serta didefinisikan operasi penjumlahan

$$(a_n)_{n \in S} + (b_n)_{n \in S} = (a_n + b_n)_{n \in S},$$

(1.1)

dan operasi hasil kali Cauchy barisan

$$(a_n)_{n \in S} * (b_n)_{n \in S} = \left(\sum_{d=0}^n a_d b_{n-d} \right)_{n \in S}$$

(1.2)

Sementara itu operasi perkalian tiga barisan bilangan $(a_n)_{n \in S}, (b_n)_{n \in S}, (c_n)_{n \in S}$ yaitu:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= (a_n)_{n \in S} * ((b_n)_{n \in S} * (c_n)_{n \in S}) \\ &= (a_n)_{n \in S} * \left(\sum_{d=0}^n b_d c_{n-d} \right) \\ &= \left(\sum_{g=0}^n \left[\left(\sum_{d=0}^{n-g} a_g b_d c_{n-g-d} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

(1.3)

Maka R^S bersama dengan operasi tersebut membentuk gelanggang komutatif dengan elemen satuan (Sosang, 2022).

1.2.5. Modul dan Bimodul

Modul M atas ring R adalah struktur aljabar yang dibentuk oleh suatu grup abel M terhadap operasi penjumlahan dan suatu ring R , yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar sehingga memenuhi syarat-syarat tertentu (Wisbauer, 2018).

Definisi 1.8

Diberikan R dan S masing-masing adalah ring, M adalah suatu grup abel terhadap operasi penjumlahan, dan operasi perkalian skalar $*$: $R \times M \rightarrow M$ serta $\bullet$: $M \times S \rightarrow M$. Himpunan M merupakan (R, S) -bimodul apabila M merupakan modul kiri atas ring R , M merupakan modul kanan atas ring S , dan memenuhi sifat kompatibilitas yaitu untuk setiap $r \in R$, $s \in S$, dan $m \in M$ memenuhi $r * (m \bullet s) = (r * m) \bullet s$ (Ratnasari, dkk, 2023).

Definisi 1.9

Diberikan R dan S masing-masing adalah ring, M merupakan suatu grup abel terhadap operasi penjumlahan dan didefinisikan operasi perkalian skalar pada modul kiri M atas ring R adalah $*$: $R \times M \rightarrow M$, sedangkan operasi perkalian skalar pada modul kanan M atas ring S adalah $\bullet$: $M \times S \rightarrow M$ dimana himpunan M merupakan (R, S) -modul apabila memenuhi:

- i. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan Ring R dengan elemen satuan 1_R , serta operasi $*$: $R \times M \rightarrow M$. Grup M disebut modul kiri atas ring R apabila memenuhi aksioma berikut:
 - a) $r_1 \cdot (m_1 + m_2) = r_1 \cdot m_1 + r_1 \cdot m_2$
 - b) $(r_1 + r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_1$
 - c) $(r_1 \cdot r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot (r_2 \cdot m_1)$
 - d) $1_R \cdot m_1 = m_1$

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$
- ii. Diberikan grup komutatif $(M, +)$ dan Ring S dengan elemen satuan 1_S , serta operasi $\bullet$: $M \times S \rightarrow M$. Grup M disebut modul kanan atas ring S apabila memenuhi aksioma berikut:
 - a) $(m_1 + m_2) \cdot s_1 = m_1 \cdot s_1 + m_2 \cdot s_1$
 - b) $m_1 \cdot (s_1 + s_2) = m_1 \cdot s_1 + m_1 \cdot s_2$
 - c) $m_1 \cdot (s_1 \cdot s_2) = (m_1 \cdot s_1) \cdot s_2$
 - d) $m_1 \cdot 1_S = m_1$

untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ dan $m_1, m_2 \in M$
- iii. $r \bullet (m * s) = (r * m) \bullet s$

Struktur aljabar (R, S) -modul merupakan suatu perumuman dari (R, S) -bimodul, sehingga (R, S) -bimodul merupakan kejadian khusus dari (R, S) -modul. Hal tersebut berarti bahwa (R, S) -bimodul pasti merupakan (R, S) -modul, tetapi (R, S) -modul belum tentu merupakan (R, S) -bimodul (Wisbauer, 2018).

1.2.6. Gelanggang Morita Konteks

Gelanggang Morita Konteks diperkenalkan oleh Kiiti Morita pada tahun 1958.

Definisi 1.10

Morita Konteks merupakan 6-tupel $M = (R, V, W, S, \alpha, \beta)$ dengan R dan S merupakan ring, V merupakan (R, S) -bimodul W merupakan (S, R) -bimodul, $\alpha: (v, w) \rightarrow R$ merupakan homomorfisma (R, R) -bimodul dan $\beta: (w, v) \rightarrow S$ merupakan homomorfisma (S, S) -bimodul. Dengan menggunakan sifat pada komponen-komponen konteks Morita M , dapat dibentuk suatu ring yaitu

$$R^m = \begin{pmatrix} R & V \\ W & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & v \\ w & s \end{pmatrix} \mid r \in R, v \in V, w \in W, s \in S \right\}$$

yang disebut sebagai ring Morita Konteks (Dahoklory, dkk, 2020).

Berikut contoh pembuktian gelanggang morita konteks

Contoh 1.4: (Hamonangan, 2017).

Misalkan W adalah R – modul kanan, $V = \text{Homomorfisma}(W, R)$ dan $S = \text{Endomorfisma } W$.

Didefinisikan pemetaan

$$\alpha(v, w): (v, w) \rightarrow R$$

dan pemetaan

$$\beta(w, v): (w, v) \rightarrow S$$

yaitu (w, v) adalah endomorfisma R – modul pada W sehingga

$(w, v)(w') = w(v(w'))$ untuk setiap $w' \in W$.

Jelas bahwa pemetaan $\alpha(v, w)$ dan $\beta(w, v)$ keduanya terdefinisi dengan baik. Perhatikan bahwa;

- V adalah (R, S) – bimodul, dimana untuk setiap $v \in V, r \in R, s \in S$ berlaku $rv: W \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan $(rv)(w) = r(v(w))$ untuk setiap $w \in W$ dan $vs: W \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan $(vs)(w) = v(s(w))$ untuk setiap $w \in W$.
- Karena W adalah R – modul kanan dan $S = \text{Endomorfisma } W$ maka dengan pendefinisian $sw = s(w)$ untuk setiap $s \in S, w \in W$ diperoleh W sebagai (S, R) – bimodul.
- Untuk setiap $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, s \in S$ dan $r \in R$ berlaku:
 - a) $(vs, w) = (vs)(w) = v(s(w)) = v(sw) = (v, sw)$
 - b) $(v_1 + v_2, w) = (v_1 + v_2)(w) = v_1(w) + v_2(w) = (v_1, w) + (v_2, w)$
 - c) $(v, w_1 + w_2) = v(w_1 + w_2) = v(w_1) + v(w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$
 - d) $r(v, w) = r(v(w)) = (rv)(w) = (rv, w)$
 - e) $(v, w)r = (v(w))r = v(wr) = (v, wr)$

$\therefore$ Jadi $\alpha(v, w)$ adalah pemetaan bilinear $R - R$
- Ambil $v, v_1, v_2 \in V, w, w', w_1, w_2 \in W, s \in S$ dan $r \in R$
 - a) Perhatikan bahwa

$$(wr, v)(w') = (wr)(v(w')) = w(rv(w')) = (w, rv)(w')$$

jadi, $(wr, v) = (w, rv)$

b) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(w_1 + w_2, v)(w') &= (w_1 + w_2)v(w') = w_1 v(w') + w_2 v(w') \\ &= (w_1, v)(w') + (w_2, v)(w') \\ \text{jadi, } (w_1 + w_2, v) &= (w_1, v) + (w_2, v)\end{aligned}$$

c) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(w, v_1 + v_2)(w') &= w((v_1 + v_2)(w')) = w(v_1(w') + v_2(w')) \\ &= w(v_1(w')) + w(v_2(w')) \\ &= (w, v_1)(w') + (w, v_2)(w') \\ \text{jadi, } (w, v_1 + v_2) &= (w, v_1) + (w, v_2)\end{aligned}$$

d) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}s((w, v))(w') &= s(w(v(w')) = (s(w))(v(w')) = (sw)(v(w')) \\ &= (sw, v)w' \\ \text{jadi, } s(w, v) &= (sw, v)\end{aligned}$$

e) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(w, v)(s(w')) &= wv(s(w')) = w(vs)(w') = (w, vs)(w') \\ \text{jadi, } (w, v)s &= (w, vs)\end{aligned}$$

Dengan ini, disimpulkan bahwa $\beta(w, v)$ adalah pemetaan biliner $S - S$.

- Untuk setiap $v, v_1 \in V$, dan $w, w_1 \in W$ berlaku

$$\begin{aligned}(v_1(w, v))(w') &= v_1((w, v)(w')) = v_1(w(v(w')) = (v_1(w))(v(w')) \\ &= ((v_1, w)v)(w') \\ &\quad \text{dan} \\ (w, v)w_1 &= w(v(w_1)) = w(v, w_1).\end{aligned}$$

$\therefore$ Jadi, $v_1(w, v) = (v_1, w)v$ dan $(w, v)w_1 = w(v, w_1)$

Berdasarkan observasi diatas, disimpulkan bahwa $M = (R, V, W, S)$ adalah morita konteks.

Contoh 1.5:

Misalkan R adalah gelanggang, himpunan $M = (R, R^{1 \times 2}, R^{2 \times 1}, R^{2 \times 2})$ dengan operasi perkalian matriks biasa membentuk morita konteks. Misalkan $\mathbb{M}$ adalah gelanggang dari morita konteks M . Definisikan pemetaan $\theta: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ dan $d: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ dengan:

$$\begin{aligned}\theta(a, b, c, d) &= (a, -b, -c, d) \\ d(a, b, c, d) &= (0, b, c, 0)\end{aligned}$$

untuk setiap $(a, b, c, d) \in \mathbb{M}$.

Misalkan $\mathbb{R}$ adalah $\mathbb{Z}$ polinom:

$$\begin{aligned}P(z) &= \begin{bmatrix} 2 & (1 & -1) \\ (1) & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 0 & (1 & 1) \\ (-1) & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad Q(z) = \\ &\begin{bmatrix} 1 & (0 & 1) \\ (0) & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} z\end{aligned}$$

dimana $M[z; \theta; d]$. Berikutnya diperlihatkan perhitungan $P(z)Q(z)$. Pertama digunakan perhitungan langsung dengan menggunakan struktur di $M[z; \theta; d]$. Perhatikan bahwa untuk setiap $K \in M$ berlaku

$$z^2 K = \theta(\theta(K))z^2 + (d(\theta(K)) + \theta(d(K)))z + d(d(K))$$

Akibatnya,

$P(z)Q(z)$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 2 & (1 & -1) \\ (1) & (1 & 2) \\ (0) & (-1 & 0) \end{bmatrix} z^2 \begin{bmatrix} 1 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (-1 & -2) \end{bmatrix} z \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & (1 & 1) \\ (1) & (0 & 1) \\ (-1) & (3 & 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (-1 & -2) \end{bmatrix} z \\ &= \begin{bmatrix} 2 & (1 & -1) \\ (1) & (1 & 2) \\ (0) & (-1 & 0) \end{bmatrix} z^2 \begin{bmatrix} 1 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (-1 & -2) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & (-1 & -2) \\ (2) & (-1 & -1) \\ (-1) & (0 & -1) \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

Kemudian, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} &z^2 \begin{bmatrix} 1 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (-1 & -2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (-1 & -2) \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 0 & (0 & -2) \\ (0) & (0 & 0) \\ (-2) & (0 & 0) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (0 & 0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi,

$P(z)Q(z)$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 2 & (1 & -1) \\ (1) & (1 & 2) \\ (0) & (-1 & 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (-1 & -2) \end{bmatrix} z^3 \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2 & (1 & -1) \\ (1) & (1 & 2) \\ (0) & (-1 & 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (0 & -2) \\ (0) & (0 & 0) \\ (-2) & (0 & 0) \end{bmatrix} z^2 \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2 & (1 & -1) \\ (1) & (1 & 2) \\ (0) & (-1 & 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (0 & 1) \\ (0) & (0 & 0) \\ (1) & (0 & 0) \end{bmatrix} z \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 & (-1 & -2) \\ (2) & (-1 & -1) \\ (-1) & (0 & -1) \end{bmatrix} z \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (1 & 4) \\ (3) & (-2 & -3) \\ (0) & (0 & 0) \end{bmatrix} z^3 + \begin{bmatrix} 2 & (0 & -4) \\ (-4) & (0 & -2) \\ (0) & (0 & 0) \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 1 & (-1 & -2) \\ (2) & (-1 & -1) \\ (-1) & (0 & -1) \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

BAB 2

METODOLOGI PENELITIAN

2.1. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi pustaka yang dilakukan terhadap referensi-referensi penelitian yang berkaitan dengan topik penelitian untuk memperoleh data dan informasi yang akan dikembangkan dalam penelitian.

2.2. Lokasi dan Waktu Penelitian

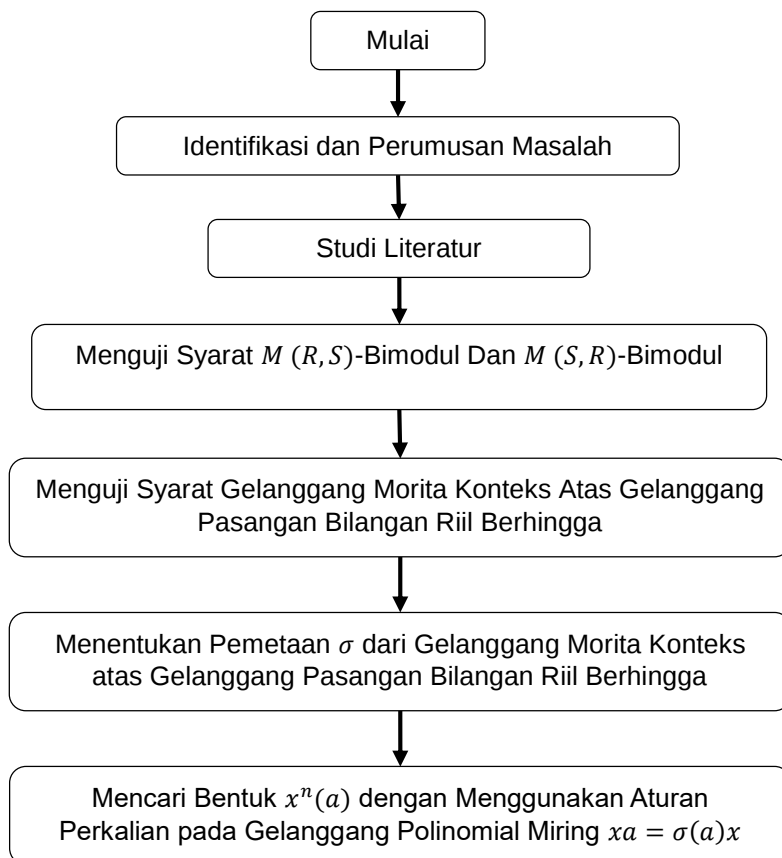
Lokasi penelitian ini bertempat di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin kota Makassar dengan waktu penelitian direncanakan berlangsung mulai dari Agustus 2024

2.3. Prosedur Penelitian

Dalam penelitian ini terdapat beberapa tahapan yang harus dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- i. Mengidentifikasi dan merumuskan masalah yang menjadi fokus penelitian.
- ii. Melakukan studi literatur terhadap referensi-referensi jurnal penelitian yang berkaitan dengan topik yang diteliti sebagai tahap melengkapi pengetahuan dasar peneliti untuk keperluan pelaksanaan penelitian.
- iii. Membentuk gelanggang morita konteks dengan gelanggang tumpuan barisan bilangan riil berhingga.
- iv. Membuktikan gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan morita konteks yang dibentuk dari gelanggang pasangan barisan bilangan riil berhingga.
- v. Setelah melewati langkah penelitian, maka hasil dari penelitian tersebut akan dibuat kesimpulan berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian.

Langkah- langkah kerja dalam penelitian ini dapat digambarkan dalam diagram alur berikut:



Gambar 2.3.1. Diagram alur penelitian