BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Bisnis adalah usaha perorangan atau usaha yang dimiliki oleh suatu organisasi untuk mencapai tujuan atau target dari usaha tersebut. Salah satu permasalahan di dalam sebuahperusahaan untuk mendapatkan keuntungan maksimum adalah biaya yang dikeluarkan belum efisien sehingga hasil yang diperoleh belum maksimal (Anoraga, 2008).

Setiap bisnis mempunyai tujuan untuk meningkatkan produk yang dihasilkan dan memperoleh keuntungan. Tujuan yang paling mendasar orang-orang melaksanakan suatu bisnis adalah untuk memperoleh keuntungan. Oleh karena itu, Setiap badan usaha memerlukan suatu perencanaan terbaik demi perkembangan usaha yang dijalankan dengan cara menciptakan inovasi baru dan menerapkan sistem manajemen yang terarah. Dalam menjalankan sebuah bisnis terkhusus dalam bidang produksi maka perusahaan harus mampu memaksimalkan penggunaan faktor produksinya seperti bahan baku, tenaga kerja, dan mesin produksi untuk memperoleh hasilyang maksimal (Siadari, 2016).

Perkembangan dunia industri yang semakin berkembang pada saat ini akan menyebabkan tingginya persaingan dalam dunia industri. Sehingga keuntungan dari setiap perusahaan ikut berpengaruh. Sangat dibutuhkan pemikiran-pemikian baru untuk membawa dunia bisnis ke arah yang lebih maju agar dapat mengimbangi laju persaingan yang semakin ketat. Setiap orang harusmampu menambah pengetahuannya agar memiliki pengetahuan yang lebih luas yang bertujuan agar mampu menambah taraf berfikir yang semakin tinggi (Ferdias dan Savitri, 2015).

Persaingan bisnis membuat para pelaku usaha kecil atau besar harus memiliki strategi dalam proses operasional bisnisnya untuk tetap bisa bersaing secara kompetitif dengan kompetitor lainnya. Seperti permasalahan yang dihadapi pada Toko kue Rara yaitu memiliki pesaing bisnis yang serupa dengan tetap membuat kue tradisional yang disukai oleh banyak orang dari dulu dan juga membuat variasi yang lebih menarik dan modern dari kue yang dijual agar tetap memiliki pelanggan dengan selera yang modern. Permasalahan tersebut membuat bisnis harus memiliki stategi agar usahanya tersebut tetap bisa berjalan.

Permasalahan yang dihadapi biasanya terkait pengadaan sumber daya yang sulit didapatkan atau harganya yang relatif tinggi dipasaran, hal

tersebut dapat menyebabkan pelaku UMKM tidak memiliki kemajuan yang signifikan karena kesulitan dalam pengadaan sumber daya, selain itu yang menjadi permasalahan berikutnya para pelaku UMKM belum memiliki perencanaan tentang bagaimana cara agar produk yang dihasilkannya itu mendapatkan keuntunganyang maksimum dengan penggunaan sumber daya yang efisien (Herjanto, 2008).

Keuntungan maksimal merupakan indikator penting yang menjadi faktor penentu perkembangan sebuah usaha. Masalah yang paling banyak menyerang kehidupan bisnis khususnya dalam bidang produksi yaitu kurangnya kemampuan mengkombinasikan faktor produksi dan kemampuan menentukan jumlah produk dari hasil produksinya sehingga tak sedikit yang mendapatkan keuntungan yang kurang optimal. Khusus untuk jenis usaha mikro kecil dan menengah (UMKM), maka masalah tersebut berpengaruh keras dalam menghambat perkembangan sebuah usahanya (Asmayanti, 2021).

Mengingat bahwa tingkat keuntungan, faktor-faktor produksi dan produk yang dihasilkan oleh perusahaan tersebut memiliki hubungan yang linier, maka pemecahan optimasi yang digunakan adalah alat analisis linier programming melalui metode simpleks (Herjanto, 2008).

Konsumsi dan distribusi sangat berkaitan dengan kegiatan produksi. Produsen untuk memenuhi kebutuhan konsumen yaitu dengan melakukan kegiatan produksi barang dan jasa. Perkembangan suatu kegiatan ekonomi dipengaruhi oleh ada atau tidaknya kegiatan produksi yang dilakukan produsen. Kegiatan produksi banyak melibatkan faktor produksi dalam menghasilkan suatu barang dan jasa. Fungsi produksi memperlihatkan adanya hubungan antara jumlah pemasukan dengan pengeluaran yang dihasilkan dalam satu waktu periode tertentu (Sumar'in, 2017).

Matematika adalah ilmu yang banyak digunakan dalam permasalahan sehari-hari. Pemecahan masalah dalam matematika digunakan untuk memecahkan masalah matematika itu sendiri maupun permasalahan dalam kehidupan sehari-hari karena matematika memiliki cara sendiri untuk memecahkan masalah tersebut dengan cepat dan tepat. Matematika wajib ada dalamsetiap pembelajaran di sekolah maupun di perguruan tinggi. Hal ini dikarenakan matematika memegang peran penting dalam kemajuan suatu bangsa (Dewimarni, 2017).

Optimasi merupakan proses meminimalkan biaya dengan seminimal mungkin untuk memperoleh keuntungan semaksimal mungkin dalam suatu masalah. Linear programming sebagai suatu model penelitian operasional

dalam kajian matematika terapan yang banyak digunakan dalam bidang industri dan organisasi bisnis dapat digunakan dalam proses memperoleh solusi danmemecahkan suatu permasalahan optimasi (Mentari, 2018).

Menurut Stapleton, Hanna, dan Markussen (2003), definisi Linear Programming adalah suatu teknik aplikasi matematika dalam menentukan pemecahan masalah yang bertujuan untuk memaksimumkan atau meminimumkan sesuatu yang dibatasi oleh batasan-batasan tertentu. Hal ini juga dikenal sebagai teknik optimalisasi.

Banyak persoalan yang penyelesaiannya menggunakan program linear, diantaranya persoalan transportasi, persoalan penugasan, program dinamis serta program bilangan bulat (Integer Program Linear). *Integer Linear Programming* adalah model program linear yang digunakan khusus untuk menyelaraskan masalah dimana nilai variabel-variabel keputusan dalam memecahkan optimasi mestilah berupa integer. Syarat bahwa nilai variabel keputusan perlu bilangan bulat melihat jumlahnya yang tidak mungkin berupa pecahan seperti rumah, pabrik, tugas, dan lain-lainnya. Dalam matematika, bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan nol serta bilangan bulat negatif. Matematika merupakan ilmu pengetahuan tentang penalaran yang logis dan masalah yang berhubungan dengan bilangan. Bahkan dia mengartikan matematika sebagai ilmu dalam menginterpretasikan berbagai ide dan kesimpulan (Amin, 2016).

Integer Linear programming merupakan suatu model program linier yang khusus digunakan untuk menyesuaikan suatu masalah dimana nilai variabel-variabel keputusan dalam penyelesaian optimal haruslah merupakan bilangan integer (bilangan bulat). *Integer Linear Programming* dapat diselesaikan dengan banyak cara, antara lain dengan menggunakan grafik, eliminasi, subtitusi dan lain-lain. Salah satu cara yang cukup efektif untuk menyelesaikan program integer adalah dengan mengaplikasikan algoritma *Branch and Bound* dibandingkan metodeperhitungan nilai bulat lainnya dan telah menjadi kode komputer standar untuk *Integer Linear Programming* (Aritonang, 2013).

Metode *Branch and Bound* (cabang dan batas) adalah salah satu metode untuk menghasilkan penyelesaian optimal program linear dengan hasil beberapa atau seluruh variabel keputusan bilangan bulat. Penyelesaian untuk mencari solusi optimal menggunakan metode *Branch and Bound* dilakukan secara berulang hingga membentuk pohon pencarian (search tree) dan dilakukan pembatasan (bounding) dengan mementukan batas atas (upper bound) dan batas bawah (lower bound) (Siringoringo, 2005).

Berdasarkan uraian tersebut maka pada penelitian ini akan dibahas

dengan judul :
"**OPTIMASI KEUNTUNGAN PRODUKSI KUE MENGGUNAKAN INTEGER LINEAR PROGRAMMING METODE *BRANCH AND BOUND* DENGAN APLIKASI POM-*QM FOR WINDOWS***."

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, permasalahan yang akan dibahas adalah berapa jumlah produksi yang optimal pada Toko Kue Rara agar keuntungan yang di dapat lebih maksimal dengan menggunakan *Integer Linear Programming* metode *Branch and Bound.*

1.3. Batasan Masalah

Agar pembahasan dapat diselesaikan dengan baik dan benar untuk tujuan yang akan diperoleh serta meciptakan pembahasan lebih terencana, maka penulis merealisasikan suatu batasan masalah, yaitu:

1. Metode yang digunakan untuk menghitung keuntungan penjualan yaitu Metode Simpleks kemudian dilanjutkan *Branch and Bound.*
2. Objek yang akan diteliti adalah semua varian kue.
3. Data yang digunakan pada penelitian hanya terbatas pada data bulan desember 2023 mencakup bahan baku, modal, jumlah penjualan, dan harga penjualan tiap produk, agar tidak terjadi fluktuasi nilai yang berlebihan.
4. Jumlah Penjualan faktual dibulatkan ke nilai puluhan terdekat agar memudahkan penghitungan.
5. Biaya tak terduga dan lain hal dianggap sudah termasuk dalam modal harian.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan pemikiran yang telah diuraikan di atas maka penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengetahui biaya produksi dan keuntungan aktual pada Toko kue Rara.
2. Mengetahui kombinasi produk dan keuntungan Optimal pada Toko kue Rara.
3. Mengetahui kendala penggunaan sumber daya yang dimiliki oleh Toko kue Rara untuk mencapai kondisi produksi optimal.
4. Mengetahui perubahan keuntungan dan sumber daya dalam kondisi optimal.
5. Mengetahui rencana produksi optimal pada Toko kue Rara.

1.5. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat berguna bagi berbagai pihak, yaitu :

1. Bagi akademik, sebagai bahan referensi serta menambah wawasan untuk kepentingan edukasi sebagai bahan penelitian selanjutnya.
2. Bagi penulis, untuk menambah wawasan dan pengetahuan serta salah satu sarana penerapan ilmu-ilmu yang telah diperoleh selama perkuliahan, serta sebagai salah satu syarat kelulusan dan meraih gelar sarjana sains.
3. Bagi perusahaan, yakni dapat menjadi bahan pertimbangan dalam mengatur perencanaan produksi berikutnya, serta dapat memberikan rekomendasi dan informasi bagi Toko kue Rara dalam mengambil keputusan yang berkaitan dengan pengelolaan produksi.

1.6. Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan tugas akhir ini disajikan dalam beberapa bab, antara lain:

1. Bab I Pendahuluan : Pada bab ini diuraikan mengenai Latar Belakang, Rumusan Masalah, Batasan Masalah, Tujuan Penelitian, Manfaat Penelitian, Sistematika Penulisan, dan Landasan Teori.
2. Bab II Metodologi Penelitian : Pada bab ini diuraikan informasi mengenai Tempat dan Waktu Penelitian, Objek Penelitian, Jenis dan Sumber data, Metode Pengumpulan Data, Metode Pengolahan Data, Tahapan Penelitian beserta Diagram Alir nya
3. Bab III Hasil dan Pembahasan : Berisi tentang data-data hasil penelitian yang diperoleh dari hasil pengamatan dan pengukuran yang dilakukan dilapangan yang diperlukan dalam menganalisis permasalahan yang ada, serta melakukan pengolahan data dengan menggunakan metode yang telah ditentukan.
4. Bab IV Penutup : Berisi tentang uraian kesimpulan dan saran.

1.7. Landasan Teori

1.7.1. Optimasi

Optimasi adalah serangkaian proses untuk menemukan kondisi terbaik dalam situasi tertentu, yang bertujuan untuk mencapai hasil maksimal atau minimal melalui fungsi tujuan. Secara normatif, optimasi mengidentifikasi penyelesaian terbaik dari suatu masalah, yang diarahkan pada maksimisasi atau minimisasi (Anwar, 2007).

Optimasi dapat ditempuh dengan dua cara: maksimisasi dan minimisasi. Maksimisasi adalah optimasi produksi yang berfokus pada alokasi input tertentu untuk memperoleh keuntungan maksimal. Sebaliknya, minimisasi adalah optimasi produksi yang bertujuan untuk menghasilkan biaya seminimal

mungkin (Esther, 2013).

Pada intinya, optimasi merupakan pencarian solusi terbaik dari suatu masalah pengambilan keputusan, seringkali dengan mempertimbangkan sumber daya yang terbatas (Mentari, 2018). Ini tidak selalu berarti keuntungan tertinggi atau biaya terendah, melainkan solusi yang paling optimal sesuai tujuan yang ditetapkan (Hotniar, 2005). Dalam praktiknya, optimasi seringkali melibatkan penentuan nilai-nilai ekstrem pada fungsi linear (Soekartawi, 2005) dan dapat diterapkan melalui model program linier untuk memecahkan permasalahan di bidang industri dan organisasi bisnis (Teguh, 2013).

Optimasi yang dilakukan perusahaan untuk mencapai tujuannya yaitu memperoleh keuntungan maksimum, dapat ditempuh melalui dua cara yaitu (Heizer, 2005):

1. Maksimalisasi, yaitu optimalisasi produksi dengan menggunakan atau mengalokasikanmasukan (biaya) yang sudah tertentu untuk mendapatkan keuntungan maksimum.
2. Minimalisasi, yaitu optimalisasi produksi untuk menghasilkan tingkat output tertentu dengan menggunakan masukan (biaya) yang paling minimal (biaya minimal, bahan sudah tertentu/pasti).

Berdasarkan langkah-langkah optimasi setelah masalah diidentifikasi dan tujuan ditetapkan maka langkah selanjutnya adalah memformulasikan model matematika yang meliputi tiga tahap, yaitu (Nur'safara, 2015).

1. Menentukan variabel yang tidak diketahui (variabel keputusan) dan nyatakan dalam simbol matematik.
2. Membentuk fungsi tujuan yang ditunjukkan sebagai hubungan linier (bukan perkalian) dari variabel keputusan.
3. Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikan dalam persamaan atau pertidaksamaan yang juga merupakan hubungan linier dari variabel keputusan yang mencerminkan keterbatasan sumber daya masalah tersebut.

Persoalan optimasi meliputi optimasi tanpa kendala dan optimasi dengan kendala. Dalam optimasi tanpa kendala, faktor-faktor yang menjadi kendala terhadap suatu fungsi tujuan diabaikan sehingga dalam menentukan nilai maksimum atau minimum tidak terdapat batasan untuk berbagai pilihan peubah yang tersedia. Sedangkan pada optimasi dengan kendala, faktor-faktor yang menjadi kendala terhadap fungsi tujuan diperhatikan dalam menentukan titik maksimum atau minimum fungsi tujuan (Herjanto, 2008:44).

Optimasi dengan kendala pada dasarnya merupakan persoalan dalam menentukan nilai variabel suatu fungsi menjadi maksimum atau minimum dengan memperhatikan keterbatasan- keterbatasan yang ada. Keterbatasan-keterbatasan itu meliputi input atau faktor-faktor produksi seperti modal, bahan baku, tenaga kerja dan mesin. Optimasi produksi dengan kendala perlu memperhatikan faktor-faktor yang menjadi kendala pada fungsi tujuan karena kendala

Menentukan nilai maksimum dan minimum. Fungsi tujuan merupakan suatu pernyataan matematis yang digunakan untuk mempresentasikan kriteria dalam mengevaluasi solusi suatu masalah. Fungsi tujuan dalam teknik optimasi produksi merupakan unsur yang penting karena akan menentukan kondisi optimal suatu keadaan.

1.7.2. Linear Programming

Linear Programming merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan biaya. Linear Programming banyak diterapkan dalam masalah ekonomi, indsutri, militerm sosial dan lain-lain. Hasil yang diinginkan mungkin ditunjukkan sebagai maksimasi dari beberapa profit, penjualan dan kesejahteraan, atau minimisasi pada biaya, waktu dan jarak. Masalah optimasi ini dapat diselesaikan dengan Linear Programming (Taha, 2003).

Program linear merupakan suatu metode untuk membuat keputusan di antara berbagai alternatif kegiatan pada waktu kegiatan-kegiatan tersebut dibatasi oleh kegiatan tertentu. Keputusan yang akan diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan (objective function), sedangkan kendala-kendala yang dihadapi dalam membuat keputusan tersebut dinyatakan dalam bentuk fungsi kendala (constraints). Adapun tujuan mempelajari pemrograman linear yaitu mampu dalam membuat model matematika dan menguasai analisisnya, memiliki wawasan dalam analisis untuk menentukan fungsi tujuan maksimal dan minimal dengan kendala yang ada, dan mampu menganalisis yang fungsi tujuannya maksimal atau minimal apabila terjadi perubahan pada fungsi tujuan dan kendala dilakukan secara manual serta dengan program Lindo (Aidawayati, 2013).

Program linear merupakan model matematika untuk mendapatkan alternatif penggunaan terbaik atas sumber-sumber organisasi. Kata sifat linear digunakan untuk menunjukkan fungsi-fungsi matematika yang digunakan dalam bentuk linear dalam artian hubungan langsung yang bersifat proporsional. Program menyatakan penggunaan teknik matematika tertentu. Jadi, pengertian

program linear adalah suatu teknik perencanaan yang bersifat analitis yang analisisnya menggunakan model matematika dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan optimal terhadap suatu persoalan (Pasaribu, 2018).

Beberapa penyelesaian optimal dalam program linear dapat ditemukan pada titik ekstrim dalam daerah layak. Titik ekstrim adalah titik potong dari minimal dua garis kendala, sedangkan daerah layak adalah daerah pada grafik yang memuat titik-titik dan memenuhi semua kendala permasalahan (kumpulan dari semua penyelesaian layak). Penyelesaian layak adalah suatu solusi untuk semua kendala dipenuhi, sehingga titik ekstrim akan menunjukkan titik-titik yang dapat menghasilkan nilai fungsi tujuan yang paling besar (untuk kasus maksimal), seperti menghitung laba atau pendapatan dan nilai fungsi yang paling kecil (pada kasus minimal) seperti menghitung biaya (cost) atau waktu (time) (Aidawayati, 2013).

Pokok pikiran yang paling utama dalam menggunakan program linear adalah merumuskan masalah dengan jelas menggunakan sejumlah informasi yang tersedia. Kemudian menerjemahkan masalah tersebut ke dalam model matematika yang cara pemecahan masalahnya lebih mudah dan terstruktur agar didapatkan solusinya (Pasaribu, 2018).

Linear programming berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linear dengan beberapa kendala linear. Programa Linier merupakan bagian dari Matematika yang khusus diterapkan untuk menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan penentuan :

a. Jumlah variabel-variabel input yang dipakai dalam suatu masalah.
b. Kombinasi variabel input yang harus disediakan atau kombinasi output yang harus dihasilkan.
c. Jumlah output yang harus dihasilkan untuk mencapai tujuan (objective) tertentu yakni untuk mencapai optimalisasi dari suatu masalah, misalnya untuk mencapai profit maksimum atau biaya minimum.

Dalam membangun model dari persoalan linier programming digunakan karakteristik- karakteristik sebagai berikut :

a. Variabel keputusan
   Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan keputusan yang akan dibuat. Yang dimaksud disini adalah X_1, X_2, X_3, X_4, ... , X_n.

b. Fungsi tujuan
   Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan (untuk pendapatan atau keuntungan) atau diminimumkan (untuk ongkos).
c. Pembatas-pembatas
   Merupakan kendala-kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga variabel keputusan secara sembarang. Jadi maksudnya disini nilai dari variabel keputusan tersebut dibatasi oleh pembatas (constraint).
d. Pembatas tanda
   Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya berharga nonnegatif atau variabel keputusan tersebut boleh berharga positif, boleh juga negatif (tidak terbatas dalam tanda).

Bentuk umum model program linear sebagai berikut :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

(2.1)

Dengan Kendala :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j. \quad \text{atau} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j.$$

$$x_j \geq 0, untuk\ setiap\ j.$$

(2.2)

Dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

Atau dapat dituliskan secara lengkap sebagai berikut :

Maksimalkan fungsi tujuan :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n \qquad (2.3)$$

Dengan kendala :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \dots & +a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \dots & +a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + & \dots & a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array} \qquad (2.4)$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0.$$

Di samping itu, ada bentuk lain yaitu sebagai berikut:

a. Fungsi tujuan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$ diminimalkan.
b. Beberapa kendala fungsional dengan pertidaksamaan lebih besar dari atau sama dengan
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_n. \quad (2.5)$$
c. Kendala fugsional dalam bentuk persamaan
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n. \quad (2.6)$$
d. Variabel keputusan memenuhi kendala tidak negatif yaitu
$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0\ . \quad (2.7)$$

dengan :
z adalah fungsi tujuan yang merupakan nilai optimal (maksimalkan atau minimalkan).
x_j adalah tingkat kegiatan ke-j.
c_j adalah kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan xj dengan suatu satuan unit atau sumbangan setiap satuan keluarga kegiatan j terhadap Z.
a_{ij} adalah banyaknya sumber i yang diperlukan untuk menghasilkan setiap unit keluaran kegiatan j.
b_i adalah kapasitas sumber i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan.
n adalah macam kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia.
m adalah macam batasan sumber atau fasilitas yang tersedia.
Model program linear secara umum dapat dirangkaikan sebagai berikut (Aidawayati, 2013):

a. Fungsi yang akan dicari nilai optimalnya (Z) disebut fungsi tujuan (objective function) dapat berupa maksimal atau minimal.
b. Fungsi yang mempengaruhi persoalan terhadap fungsi tujuan yang akan dicapai disebut dengan fungsi batasan atau kendala (constraints function) yang merupakan ketidaksamaan dan persamaan.
c. Variabel yang memengaruhi persoalan dalam pengambilan keputusan disebut variabel keputusan (decision variables) yang berupa non-negative.

Persamaan (2.3) dapat disajikan sebagai $Z = C\ X$ dengan c suatu vektor baris

$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, c_3 \ldots, c_n)$ dan **X** suatu vektor kolom $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Lalu Persamaan (2.4) dapat disajikan sebagai **A X = B** dengan **A** suatu matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

a_{11} adalah koefisien peubah x_j pada baris ke-i persamaan (2.4) dan **B** suatu vektor kolom

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1. Meminimalkan nilai $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX}$ sehingga dipenuhi syarat $x_i \geq 0$, i = 1,2,3,⋯,n dan $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ dengan c suatu vektor baris, $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{B}$ suatu vektor kolom $\boldsymbol{A}$ suatu matriks, dan $\mathbf{0}$ suatu vektor nol disajikan sebagai vektor kolom dimensi n.
2. Meminimalkan nilai $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{CX}$ sehingga dipenuhi syarat $x_i \geq 0$, i = 1,2,3,⋯,n dan $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n = p_0$ dengan p_i merupakan kolom ke i dari matriks A dan $p_0 = b$.

Vektor $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi syarat (2.3) dan (2.4) disebut penyelesaian feasible (fisibel atau layak) dari masalah program linear.

Linear programming itu sendiri sebenarnya merupakan metode perhitungan untuk perencanaan terbaik di antara kemungkinan-kemungkinan tindakan yang dapat dilakukan.
Penentuan terbaik tersebut terdapat banyak alternatif dalam perencanaan untuk mencapai tujuan spesifik pada sumberdaya yang terbatas.

Program linier terdiri dari dua macam fungsi, yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala.

1. Fungsi tujuan adalah fungsi yang menggambarkan sasaran atau tujuan dalam sumber- sumber untuk memperoleh keuntungan maksimum atau biaya yang minimum.
2. Fungsi kendala adalah bentuk penyajian secara matematis kendala- kendala yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal keberbagai kegiatan.

Asumsi dasar yang menjadi ciri khas dari model linear programming adalah (Handoko, 1999) :

1. Linearitas, berarti bahwa fungsi tujuan dan fungsi kendala harus dapat dinyatakan sebagai fungsi linier. Hubungan antara variabel bersifat linear.
2. Proporsionalitas, berarti naik turunnya nilai Z dan penggunaan sumberdaya atau fasilitas yang tersedia akan berubah sebanding (proporsional) dengan perubahan tingkat kegiatan.
3. Aditivitas, berarti bahwa nilai tujuan tiap kegiatan tidak salingmempengaruhi, atau dalam linear programming dianggap bahwa kenaikan dari nilai tujuan (Z) yang diakibatkan oleh kenaikan suatu kegiatan dapat ditambahkantanpa mempengaruhi bagian nilai Z yang diperoleh dari kegiatan lain.
4. Divisibilitas, berarti bahwa keluaran (output) yang dihasilkan oleh setiapkegiatan dapat berupa bilangan pecahan.
5. Deterministik, berarti bahwa semua parameter dalam model linear programming tetap dan dapat diketahui atau ditentukan secara pasti.

Teknik linear programming dapat digunakan dalam 2 cara , yaitu : (Dimyati, 2006)

a. Meminimumkan biaya dalam rangka tetap mendapatkan total penerimaan atau total keuntungan sebesar mungkin. Cara ini dikenal dengan istilah program “minimasi atau meminimumkan (minimize)”.

b. Memaksimalkan total penerimaan atau total keuntungan pada kendala sumber daya yang terbatas. Cara ini disebut dengan istilah program “memaksimumkan atau maksimisasi (maximize)”.

Masalah keputusan yang sering dihadapi adalah alokasi optimum sumber daya yang langka. Sumber daya dapat berupa uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruangan atau teknologi. Tugas yang dilakukan adalah mencapai hasil terbaik yang mungkin dengan keterbatasan sumber daya itu. Hasil yang diinginkan mungkin ditunjukkan sebagai memaksimumkan dari beberapa ukuran seperti profit, penjualan dan kesejahteraan, atau meminimalkan seperti pada biaya, waktu dan jarak. Setelah masalah didefinisikan, tujuan ditetapkan, langkah selanjutnya adalah formulasi model matematika yang meliputi tiga tahap berikut (Mulyono, 2004:7).

1. Menetapkan variabel yang tidak diketahui (variabel keputusan) dan menyatakan dalam simbol matematika.
2. Menyusun fungsi tujuan yang ditunjukkan sebagai suatu hubungan linier (bukan perkalian) dari variabel keputusan.
3. Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikan dalam persamaan atau pertidaksamaan yang juga merupakan hubungan linier dari variabel keputusan yang mencerminkan keterbatasan sumber daya masalah tersebut.

Pemrograman Linier digunakan untuk menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan linier pada kondisi pembatasan-pembatasan yang berkaitan dengan sumber daya. Pemrograman Linier digunakan untuk membantu membuat keputusan untuk memilih suatu alternatif yang paling tepat dan solusi yang paling baik (the best solution) (Ruminta, 2009:10).

Persoalan Pemrograman Linier adalah persoalan optimasi, ada beberapa tahapan dalam memformulasikan persoalan pemrogram linier, yaitu (Ruminta, 2009:13) :

1. Memahami permasalahan secara keseluruhan apakah persoalan tersebut adalah persoalan maksimum atau minimum.
2. Mengidentifikasi variabel keputusan.
3. Mendeskripsikan fungsi tujuan sebagai kombinasi linier dari variabel keputusan.
4. Mendeskripsikan pembatasan-pembatasan sebagai kombinasi linear dari variabel keputusan.
5. Mengidentifikasi batas bawah dan batas atas variabel keputusan.
6. Mengekspresikan semua hasil identifikasi tersebut dalam formula matematika.

1.7.3. Metode Simpleks

Persoalan program linier tidak selalu sederhana karena melibatkan banyak constraint (pembatas) dan banyak variabel sehingga tidak mungkin diselesaikan dengan metode grafik. Oleh karena itu serangkaian prosedur matematik (aljabar linier) diperlukan untuk mencari solusi dari persoalan yang rumit tersebut. Prosedur yang paling luas digunakan adalah Metode Simpleks. Penemuan metode ini merupakan lompatan besar dalam riset operasi dan digunakan sebagai prosedur penyelesaian dari setiap program komputer (Wirdasari, 2009:276).

Salah satu teknik penentuan solusi optimal yang digunakan dalam pemrograman linier adalah metode simpleks. Metode simpleks merupakan prosedur algoritma yang digunakan untuk menghitung dan menyimpan banyak angka pada iterasi-iterasi yang sekarang dan untuk pengambilan keputusan pada iterasi berikutnya. Metode simpleks yang secara sistematis dimulai dari suatu pemecahan dasar yang fisibel ke pemecahan dasar fisibel lainnya, dilakukan berulang- ulang sehingga akhirnya tercapai suatu pemecahan dasar yang optimum dan pada setiap langkah menghasilkan suatu nilai dari fungsi tujuan yang selalu lebih besar atau sama dari langkah sebelumnya (Dumairy, 1999).

Pada tahun 1947 seorang ahli matematik dari Amerika Serikat, George B. Dantzig menemukan suatu cara untuk memecahkan persoalan linear programming tersebut dengan suatu metode yang disebut “simplex method”. Metode simpleks merupakan salah satu teknik penyelesaian dalam program linier yang digunakan sebagai teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dengan pengalokasian sumberdaya secara optimal. Metode simpleks digunakan untuk mencari nilai optimal dari program linier yang melibatkan banyak constraint (pembatas) dan banyak variabel (lebih dari dua variabel). Penemuan metode ini merupakan lompatan besar dalam riset operasi dan digunakan sebagai prosedur penyelesaian dari setiap program computer (Nasution dkk, 2016).

Metode Simpleks adalah suatu Metode untuk memecahkan problem-problem program linear yang diantaranya banyak pertidaksamaan dan banyak variabel. Dalam memanfaatkan metode simpleks untuk memecahkan masalah-masalah program linear, model program linear harus diubah ke dalam suatu bentuk umum yang dinamakan ”bentuk baku”. Ciri-ciri dari bentuk baku model program linear ialah semua kendala berbentuk persamaan dengan sisi kanan nonnegatif, fungsi tujuan bisa memaksimumkan atau meminimumkan. Salah satu teknik penentuan solusi optimal yang dipakai dalam pemrograman linear ialah metode simpleks. Penentuan solusi optimal memanfaatkan metode simpleks didasarkan pada teknik eleminasi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrem satu per satu dengan cara kalkulasi iteratif. Sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke-i hanya tergantung dari iterasi sebelumnya (Sriwidadi, 2013).

Penyelesaian masalah optimalisasi dengan metode simpleks didasarkan pada teknik eliminasi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrim satu persatu dengan cara perhitungan iteratif. Sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke-i hanya tergantung dari iterasi sebelumnya (i-1).

Ada beberapa istilah yang sering digunakan dalam metode simpleks, diantaranya yaitu:

1. Iterasi adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
2. Variabel non basis adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Dalam terminologi umum, jumlah variabel non basis selalu sama dengan derajat bebas dalam sistem persamaan.
3. Variabel basis merupakan variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, variabel basis merupakan variabel slack (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan ≤) atau variabel buatan (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan ≥ atau =). Secara umum, jumlah

variabel basis selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas (tanpa fungsi non negatif).

4. Solusi atau nilai kanan merupakan nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
5. Variabel slack adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≤ menjadi persamaan (=). Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel slack akan berfungsi sebagai variabel basis.
6. Variabel surplus adalah variabel yang dikurangkan dari model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≥ menjadi persamaan (=). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai variabel basis.
7. Variabel buatan adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk ≥ atau = untuk difungsikan sebagai variabel basis awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi.Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak ada. Variabel hanya ada di atas kertas.
8. Kolom pivot (kolom kerja) adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akn menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
9. Baris pivot (baris kerja) adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.
10. Elemen pivot (elemen kerja) adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.
11. Variabel masuk adalah variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu dari antara variabel non basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.
12. Variabel keluar adalah variabel yang keluar dari variabel basis pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu dari antara variabel basis pada setiap iiterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

Metode simpleks merupakan suatu perhitungan dengan menggunakan jalan iterasi. Sebelum melakukan perhitungan iterasi maka terlebih dahulu mengubah bentuk umum dari pemograman linear ke bentuk baku. Perubahan bentuk baku dimulai dengan mengubah sama dengan pada persamaan fungsi kendala dan penambahan variabel basis awal pada setiap fungsi kendala yang ada. Variabel basis awal menunjukkan belum dilakukannya aktivitas pada sumber daya sebelumnya. Fungsi kendala pada bentuk umum walaupun sudah dalam bentuk persamaan harus tetap diubah terlebih dahulu.

Terdapat hal-hal yang harus diperhatikan sebelum merubah bentuk umum simpleks manjadi bentuk baku, yaitu :

1. Pertidaksamaan dengan bentuk ≤ dalam bentuk umum pada fungsi kendala diubah terlebih dahulu menjadi persamaan = dengan menambahkan satu variabel slack.
2. Mengubah pertidaksamaan ≥ dalam bentuk umum menjadi persamaan = pada fungsi kendala dengan mengurangkan satu variabel surplus.
3. Fungsi kendala dengan persamaan = pada bentuk umum ditambah dengan variabel buatan (variabel artifisial).

Langkah langkah penyelesaian dengan metode simpleks adalah sebagai berikut (Kalangi, 2005) :

1. Mengubah fungsi tujuan dan kendala : Semua fungsi tujuan dan batasan diubah ke bentuk persamaan (standar),dengan cara fungsi tujuan diubah menjadi fungsi implisit, yaitu fungsi tujuan digeser ke kiri dan menambah variabel penolong (slack) pada fungsi kendala.
2. Menyusun persamaan-persamaan ke dalam tabel simpleks.
3. Memilih kolom kunci. Caranya dengan memilih kolom yang mempunyai nilai pada garis fungsi tujuan yang bernilai negatif dengan angka terbesar.
4. Memilih baris kunci. Pilih baris yang mempunyai limit ratio dengan angka positif terkecil. Limit ratio = nilai kolom NK / nilai kolom Kunci.
5. Mengubah nilai-nilai baris kunci.
6. Nilai baris kunci diubah dengan cara membaginya dengan angka kunci. Baris baru kunci = baris kunci : angka kunci
7. Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci sehingga nilai-nilai kolom kunci (selainbaris kunci) = 0.
8. Untuk mengubahnya menggunakan rumus : Baris baru = baris lama – (koefisien per kolom kunci * nilai baris baris kunci).
9. Melanjutkan perbaikan-perbaikan atau perubahan-perubahan. Ulangi langkah 3 - 6, sampai semua nilai pada fungsi tujuan bernilai positif.
10. Karena tidak ada lagi bilangan (elemen) yang beenilai negatif di baris pertama, masalah ini telah terpecahkan dan penyelesaiannya telah optimal. Mengekspresikan semua hasil identifikasi tersebut dalam formula matematika.

Berikut contoh penggunaan Metode simpleks :

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$

Dengan syarat :

$$2x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Pertama, kita menambahkan variable slack ke dalam persamaan kendala :

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 + s_2 = 9$$

$$Z - 5x_1 - 3x_2 = 0$$

Setelah menambahkan variabel slack, kita dapat menyusun tabel simpleks untuk kasus ini.

Variabel	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
s_1	2	1	1	0	7
s_2	1	3	0	1	9
Z	-5	-3	0	0	0

pivot pertama : ambil nilai paling negative pada baris tujuan (Z) untuk kasus ini -5 (di kolom x_1), setelah itu kita membagi nilai pada kolom ruas kanan dengan nilai di kolom variable x_1 untuk menentukan baris pivot.

Untuk R_1 : $7 / 2 = 3.5$ Untuk R_2 : $9 / 1 = 9$

Hasil Terkecil adalah 3.5 (pada baris R_1), sehingga pivot dilakukan di baris R_1 (di mana $x_1 = 2$), dengan demikian x_1 menjadi variabel masuk dan s_1 akan digantikan pada baris R_1. Setelah itu, kita lakukan operasi pivot terhadap x_1, yaitu dengan membagi seluruh baris R_1 dengan 2, lalu mengeliminasi x_1 dari R_2 and Z.

$$R_1 : R_1/2 = [1, 0.5, 0.5, 0, 3.5]$$

$$R_2 : R_2 - R_1 = [0, 2.5, -0.5, 1, 5.5]$$

$$Z : Z + 5R_2 = [0, -0.5, 2.5, 0, 17.5]$$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
x_1	1	0.5	0.5	0	3.5

s_2	0	2.5	-0.5	1	5.5
Z	0	-0.5	2.5	0	17.5

pivot kedua : ambil nilai paling negatif pada baris tujuan (Z) untuk kasus ini -0.5 (di kolom x_2) setelah itu kita membagi nilai pada kolom ruas kanan dengan nilai di kolom variable x_2 untuk menentukan baris pivot.

Untuk $R_1 : 3.5/0.5 = 7$ Untuk $R_2 : 5.5\ /2.5 = 2.2$

Hasil Terkecil adalah 2.2 (pada baris R_2), sehingga pivot dilakukan di baris R_2 (di mana x_2 = 2.5), dengan demikian x_2 menjadi variabel masuk dan s_2 akan digantikan pada baris R_2, Setelah itu, kita lakukan operasi pivot terhadap x_2, yaitu dengan membagi seluruh baris R_2 dengan 2.5, lalu mengeliminasi x_2 dari R_1 dan Z. .

$R_2 : R_2/2.5 = [0, 1, -0.2, 0.4, 2.2]$

$R_1 : \ R_1 - 0.5R_2 = [1, 0, 0.6, -0.2, 2.4]$

$Z : Z + 0.5R_2 = [0, 0, 2.4, 0.2, 18.6]$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
x_1	1	0	0.6	-0.2	2.4
x_2	0	1	-0.2	0.4	2.2
Z	0	0	2.4	0.2	18.6

Dengan demikian didapatkan solusi optimal :

$x_1 = 2.4 \qquad x_2 = 2.2 \qquad Z = 18.6$

1.7.4. Integer Linear Programming

Integer linear programming merupakan suatu cara dari program matematika. *Integer Linear Programming* merupakan suatu masalah tertentu dari program linier di mana seluruh atau sebagian variabel dibatasi sebagai bilangan cacah tak negatif. Seandainya semua variabel dibatasi sebagai bilangan cacah, masalahnya dapat disebut sebagai *pure integer programming* dan seandainya sebagian variabel tertentu dibatasi sebagai bilangan cacah sedangkan yang lain tidak, masalahnya disebut *mixed integer programming*. Metode simpleks merupakan basis untuk mencari jalan keluar masalah program linier di mana disyaratkan bahwa semua variabel merupakan tak negatif. Tetapi untuk mencari jalan keluar masalah (model) *Integer Linear Programming* mempunyai beberapa cara. Tetapi, baik *Linear Programming* ataupun *Integer Linear Programming*, mulai dengan ruang yang sama yaitu ruang mencari jalan keluar yang layak (*feasible*). Namun, akibat adanya persyaratan bilangan cacah

bagi masalah kedua yang bermakna adanya batasan tambahan mengakibatkan adanya suatu pengurangan dari ruang jalan keluar yang layak (Angeline, 2014).

Metode pemecahan masalah *integer linear programming* diawali dengan memanfaatkan metode simpleks. Pemecahan masalah optimal yang didapatkan dengan metode ini mungkin tidak integer. Kesukaran ini memfokuskan para peneliti untuk memilih cara-cara lain untuk memecahkan masalah tersebut. Cara pendekatan salah satunya dengan cara memecahkan model tersebut sebagai sebuah *linear programming* yang kontinu dan kemudian membulatkan pemecahan masalah optimal ke nilai integer terdekat yang layak. Namun, pemecahan masalah yang dibulatkan tidak menjamin untuk memenuhi kendala. Ada dua metode untuk mendapatkan batasan-batasan khusus yang akan didapat jalan keluar masalah optimal dari masalah *Linear Programming* relaksasi untuk mencapai ke arah mencari jalan keluar integer yang dibutuhkan, yaitu *branch and bound* dan *cutting plane* (Syafwan, 2015).

Ciri sistem model matematika program linier integer adalah sama dengan model linier biasa, kecuali dalam program linier integer harus ada memuat suatu persyaratan bahwa variabel keputusan tertentu harus bilangan integer. Apabila dalam Program Linier integer mensyaratkan bahwa :

1. keputusan harus merupakan bilangan integer akan disebut *All integer linear programming* (AILP).
2. Sebagian dari keputusan yang merupakan bilangan integer disebut *Mixed integer linear programing* (MILP).
3. Ketika variabel keputusan harus bernilai 0 dan 1 disebut *Zero one integer linear programming* (ZOILP).

Berbagai kasus dalam masalah sistem program integer yang membatasi variabel model bernilai nol atau satu. Dalam kasus demikian, pengambil keputusan hanya memiliki dua pilihan yaitu menerima atau menolak suatu usulan kegiatan. Penerimaan atau penolakan yang sifatnya parsial (sebagian) tidak diperbolehkan. Jika variabel keputusan bernilai satu, kegiatan diterima. Dan jika variabel berilai nol, kegiatan ditolak (Mulyono, 2004).

Model matematika pada program integer ini tidak jauh berbeda dengan model matematika pada *linear programming*. Pada masalah program integer untuk kasus memaksimumkan, nilai tujuan dari program integer tidak akan lebih besar dari nilai tujuan pada *linear programming*, apabila hasilnya melebihi maka diperoleh penyelesaian yang tidak layak (Marulizar, 2018).

1.7.5. Metode Branch and Bound

Metode *Branch and Bound* diusulkan pertama kali oleh A.H.Land dan A.G.Doig pada tahun 1960. Untuk mempermudah dalam memperoleh jalan keluar optimal sinkron dengan persyaratan, metode Branch and Bound adalah salah satu dari Integer Linear Programming. Pada intinya merupakan pendekatan untuk "mencabangkan dan membatasi". Metode Branch and Bound merupakan metode global untuk menyelesaikan jalan keluar masalah optimal dari beragam persoalan optimasi. Metode ini juga adalah teknik jalan keluar yang tidak hanya untuk persoalan Integer Linear Programming saja. Namun juga, metode Branch and Bound adalah pendekatan mencari jalan keluar yang bisa digunakan untuk beragam persoalan yang tidak sama. Metode Branch And Bound mempunyai prinsip yang mendasar yaitu jumlah seluruh set jalan keluar masalah yang fisibel bisa dibagi menjadi subset jalan keluar yang lebih kecil. Subset-subset ini kemudian bisa dievaluasi secara teratur sampai terdapat jalan keluar masalah yang terbaik didapatkan penerapan metode Branch And Bound pada problem Integer Linear Programming dimanfaatkan bersama-sama dengan metode simpleks (Akram, 2016).

Ada dua batas yang terdapat pada Algoritma Branch and bound yaitu batas atas (upper bound) dan batas bawah (lower bound) yaitu sebagai berikut:

a. Pada problem maksimalisasi: batas atas adalah Jalan keluar masalah Integer Linear Programming relaksasi dari sub problem tersebut sedangkan batas bawahnya merupakan nilai dari sub problem tersebut ataupun jalan keluar masalah dari sub problem lain yang semua variabel keputusan yang wajib bernilai integer sudah bernilai integer (jalan keluar terbaik yang sejauh ini didapat)
b. Pada problem minimalisasi: batas bawah adalah jalan keluar masalah Integer Linear Programming relaksasi dari sub problem tersebut sedangkan batas atasnya merupakan nilai dari sub problem tersebut ataupun jalan keluar dari sub problem lain yang semua variabel keputusan yang wajib bernilai integer (jalan keluar terkecil/terbaik yang sejauh ini didapat)

Adapun langkah-langkah metode Branch and Bound dalam kasus optimasi adalah sebagai berikut (Siang, 2011) :

1. Menyelesaikan LP dengan metode simpleks.
2. Jika variabel basis yang diharapkan bernilai bulat telah mencapai nilai berupa bilangan bulat, maka solusi bulat optimum telah tercapai.
3. Jika variabel basis yang diharapkan bernilai bulat belum mencapai nilai yang berupa bilangan bulat, maka nilai solusi yang masih berupa bilangan pecahan harus dicabangkan ke dalam sub-sub masalah (branching). Misalkan variabel dari nilai solusi optimum yang belum berupa bilangan bulat adalah x_j dengan $i_1 < x_j < i_2$ (i_1 dan i_2 merupakan 2 bilangan bulat berurutan). Pencabangan dilakukan menjadi 2 sub masalah baru yaitu $x_j \leq i_1$

untuk cabang kiri dan $x_j \geq i_2$ untuk cabang kanan. Perhitungan yang diselesaikan terlebih dahulu adalah pencabangan di sisi sebelah kiri. Bila terdapat lebih dari satu variabel pecahan pada solusi optimum, maka pilih variabel dengan nilai pecahan terbesar untuk dicabangkan terlebih dahulu.

4. Nilai solusi optimum kontinu fungsi tujuan ditetapkan sebagai batas atas pada setiap sub-masalah. Batas bawah adalah pemecahan bulat pertama yang didapatkan melalui tahap pencabangan yang menjadi patokan kapan pencabangan dapat dihentikan (misalkan $X*$ dengan nilai fungsi ($X*$)). Batas bawah belum tentu merupakan penyelesaian optimal masalah mula-mula.
5. Setiap pencabangan diselesaikan dengan metode simpleks.
6. Jika salah satu atau kedua bagian tersebut menghasilkan solusi yang bulat, maka bagian tersebut dihentikan dan ditetapkan sebagai batas bawah. Jika kedua masalah belum menghasilkan solusi yang bulat, maka dipilih salah satu bagian yang memiliki nilai fungsi tujuan yang lebih besar untuk kembali dicabangkan. Selesaikan pencabangan dengan metode simpleks sampai ditemukan batas bawah (langkah 5).
7. Setelah ditemukan batas bawah, lakukan pencabangan pada variabel yang belumberupa bilangan bulat pada solusi optimum. (Xa) adalah solusi optimum lain yang didapat setelah ditemukannya batas bawah(berupa variabel bulat atau tidak).
8. Pencabangan dihentikan apabila solusi optimum lain (Xa) memiliki nilai fungsi lebih besar dari nilai fungsi batas bawah ((Xa) > ($X*$)) pada kasus maksimasi dan jika solusi optimum lain (Xa) memiliki nilai fungsi lebih kecil dari nilai fungsi batas bawah ($f(Xa) < f(X*)$) pada kasus minimasi. Jika pencabangan dihentikan dengan solusi optimum lain ( ) yang belum berupa bilangan bulat, maka batas bawah akan ditetapkan sebagai solusi bulat optimum. Pencabangan juga dihentikan apabila pemecahan menghasilkan nilai yang tidak layak (nilai variabel basis pada kolom solusi bernilai negatif) dan apabila terjadi maka batas bawah ditetapkan sebagai solusibulat optimum.
9. Jika ditemukan solusi optimum lain (Xa) yang bernilai bulat, maka lakukan pembandingan dengan batas bawah, lalu dipilih solusi bulat optimum yang memiliki nilai paling optimal atau menghasilkan nilai Z yang lebih optimal (bernilai lebih besar untuk kasus maksimasi dan bernilai lebih kecil untuk kasus minimasi).
10. Jika sudah ditemukan nilai optimum yang memenuhi syarat integer maka nilai tersebut dibandingan dengan nilai keuntungan produksi sebelumnya yang biasa dilakukan perusahaan.

Berikut contoh penggunaan Metode Branch & Bound :

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$

Dengan Syarat :

$$2x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dan berikut hasil dari metode simpleks yang telah kita selesaikan sebelumnya :

$$x_1 = 2.4$$

$$x_2 = 2.2$$

$$Z = 18.6$$

Seperti yang dapat kita lihat, solusi yang diperoleh masih mengandung nilai non-integer. Oleh karena itu, untuk memperoleh solusi dengan nilai integer, proses dilanjutkan menggunakan metode branch and bound.
Pertama, kita memilih nilai desimal terbesar dari solusi non-integer yang diperoleh. Dalam kasus ini, nilai tersebut adalah $x_1 = 2.4$ menjadi $x_1 \leq 2 \ \ or \ \ x_1 \geq 3$.

- Batas Bawah : mulai dengan menambahkan kendala $x_1 \leq 2$. Sama seperti pada metode simpleks sebelumnya, langkah pertama adalah menambahkan variabel slack pada setiap kendala yang ada.

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 + s_2 = 9$$

$$x_1 + s_3 = 2$$

$$Z - 5x_1 - 3x_2 = 0$$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
s_1	2	1	1	0	0	7
s_2	1	3	0	1	0	9
s_3	1	0	0	0	1	2
Z	-5	-3	0	0	0	0

Sama seperti sebelumnya kita akan mengolah persoalan ini dengan metode simpleks, didapatkan hasil berikut :

pivot pertama : ambil nilai paling negative pada baris tujuan (Z) untuk kasus ini -5 (di kolom x_1), setelah itu kita membagi nilai pada kolom ruas kanan dengan nilai di kolom variable x_1 untuk menentukan baris pivot.

Untuk $R_1 : 7 / 2 = 3.5$ Untuk $R_2 : 9 / 1 = 9$ Untuk $R_3 : 2/1 = 2$

Hasil Terkecil adalah 2 (pada baris R_3), sehingga pivot dilakukan di baris R_3 (di mana $x_1 = 1$), dengan demikian x_1 menjadi variabel masuk dan s_3 akan digantikan pada baris R_3. Setelah itu, kita lakukan operasi pivot terhadap x_1, yaitu dengan membagi seluruh baris R_3 dengan 1, lalu mengeliminasi x_1 dari R_1 , R_2 , dan Z.

$R_3 : R_3/1 = [1, 0, 0, 0, 1, 2]$

$R_1 : R_1 - 2R_3 = [0, 1, 1, 0, -2, 3]$

$R_2 : R_2 - 1R_3 = [0, 3, 0, 1, -1, 7]$

$Z : Z + 5R_2 = [0, -3, 0, 0, 5, 10]$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
s_1	0	1	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	1	-1	7
x_1	1	0	0	0	1	2
Z	0	-3	0	0	5	10

pivot kedua : ambil nilai paling negative pada baris tujuan (Z) untuk kasus ini -3 (di kolom x_2), setelah itu kita membagi nilai pada kolom ruas kanan dengan nilai di kolom variable x_2 untuk menentukan baris pivot.

Untuk $R_1 : 3 / 1 = 3$ Untuk $R_2 : 7 / 3 = 2.333$

Hasil Terkecil adalah 2.333 (pada baris R_2), sehingga pivot dilakukan di baris R_2 (di mana $x_2 = 3$), dengan demikian x_2 menjadi variabel masuk dan s_2 akan digantikan pada baris R_2, Setelah itu, kita lakukan operasi pivot terhadap x_2, yaitu dengan membagi seluruh baris R_2 dengan 3, lalu mengeliminasi x_2 dari baris R_1 dan Z.

$R_2 : R_2/3 = [0, 1, 0, 1/3, -1/3, 7/3]$

$R_1 : R_1 - R_2 = [0, 0, 1, -1/3, -5/3, 2/3]$

$Z : Z + 3R_2 = [0, 0, 0, 1, 4,17]$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
s_1	0	0	1	-1/3	-5/3	2/3
x_2	0	1	0	1/3	-1/3	7/3
x_1	1	0	0	0	1	2
Z	0	0	0	1	4	17

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2.333 \qquad Z = 17$

- **Batas Atas :** mulai dengan menambahkan kendala $x_1 \geq 3$, Sama seperti pada metode simpleks sebelumnya, langkah pertama adalah menambahkan variabel slack pada setiap kendala yang ada

$2x_1 + x_2 + s_1 = 7$

$x_1 + 3x_2 + s_2 = 9$

$-x_1 + s_3 = -3$

$Z - 5x_1 - 3x_2 = 0$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	a_1	RHS
s_1	2	1	1	0	0	0	7
s_2	1	3	0	1	0	0	9
a_1	1	0	0	0	-1	1	3
Z	-5	-3	0	0	0	0	0

pivot pertama : ambil nilai paling negative pada baris tujuan (Z) untuk kasus ini -5 (di kolom x_1), setelah itu kita membagi nilai pada kolom ruas kanan dengan nilai di kolom variable x_1 untuk menentukan baris pivot.

Untuk $R_1 = 7\ /3 = 3.5$ Untuk $R_2 = 9\ /1 = 9$ Untuk $R_3 = 3\ /1 = 3$

Hasil Terkecil adalah 3 (pada baris R_3), sehingga pivot dilakukan di baris R_3 (di mana $x_1 = 1$), dengan demikian x_1 menjadi variabel masuk dan a_1 akan digantikan pada baris R_3, Setelah itu, kita lakukan operasi pivot terhadap x_1, yaitu dengan membagi seluruh baris R_3 dengan 1, lalu mengeliminasi x_1 dari baris R_1 , R_2 dan Z.

$R_3 : R_3/1 = [1, 0, 0, 0, -1, 1, 3]$

$R_1 : \ R_1 - 2R_3 = [0, 1, 1, 0, 2, 2, 1]$

$R_2 : \ R_2 - 1R_3 = [0, 3, 0, 1, 1, 1, 6]$

$Z \ : Z + 5R_3 = [0, -3, 0, 0, -5, -5, 15]$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
s_1	0	1	1	0	2	1
s_2	0	3	0	1	1	6
x_1	1	0	0	0	-1	3
Z	0	-3	0	0	-5	15

pivot kedua : ambil nilai paling negative pada baris tujuan (Z) untuk kasus ini -5 (di kolom s_3), setelah itu kita membagi nilai pada kolom ruas kanan dengan nilai di kolom variable s_3 untuk menentukan baris pivot.

Untuk $R_1 = 1 \,/2 = 0.5$ Untuk $R_2 = 6 \,/1 = 6$

Hasil Terkecil adalah 0.5 (pada baris R_1), sehingga pivot dilakukan di baris R_1 (di mana s_3 = 2), dengan demikian s_3 menjadi variabel masuk dan s_1 akan digantikan pada baris R_1, Setelah itu, kita lakukan operasi pivot terhadap s_3, yaitu dengan membagi seluruh baris R_1 dengan 2, lalu mengeliminasi s_3 dari baris R_2 , R_3 , dan Z.

$R_1 : R_1/2 = [0, 0.5, 0.5, 0, 1, 0.5]$

$R_2 : \ R_2 - R_1 = [0, 2.5, -0.5, 1, 0, 5.5]$

$R_3 : \ R_3 + R_1 = [1, -0.5, -0.5, 0, -2, 2.5]$

$Z \ : Z + 5R_1 = [0, -0.5, 2.5, 0, 0, 17.5]$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
s_3	0	0.5	0.5	0	1	0.5
s_2	0	2.5	-0.5	1	0	5.5
x_1	1	0.5	0.5	0	0	3.5
Z	0	-0.5	2.5	0	0	17.5

Pivot ketiga : ambil nilai paling negative pada baris tujuan (Z) untuk kasus ini -0.5 (di kolom x_2), setelah itu kita membagi nilai pada kolom ruas kanan dengan nilai di kolom variable x_2 untuk menentukan baris pivot.

Untuk $R_1 = 0.5 \,/0.5 = 1$ Untuk $R_2 = 5.5 \,/2.5 = 2.2$ Untuk $R_3 = 3.5 \,/0.5 = 6$

Hasil Terkecil adalah 1 (pada baris R_1), sehingga pivot dilakukan di baris R_1 (di mana s_3 = 0.5), dengan demikian x_2 menjadi variabel masuk dan s_3 akan digantikan pada baris R_1, Setelah itu, kita lakukan operasi pivot terhadap x_2,

yaitu dengan membagi seluruh baris R_1 dengan 0.5, lalu mengeliminasi x_2 dari baris R_1 dan Z.

$R_1 : R_1/0.5 = [0, 1, 1, 0, 2, 1]$

$R_2 : \ R_2 - 2.5R_1 = [0, 0, -3, 1, -5, 3]$

$R_3 : \ R_3 - 0.5R_1 = [1, 0, 0, 0, -1, 3]$

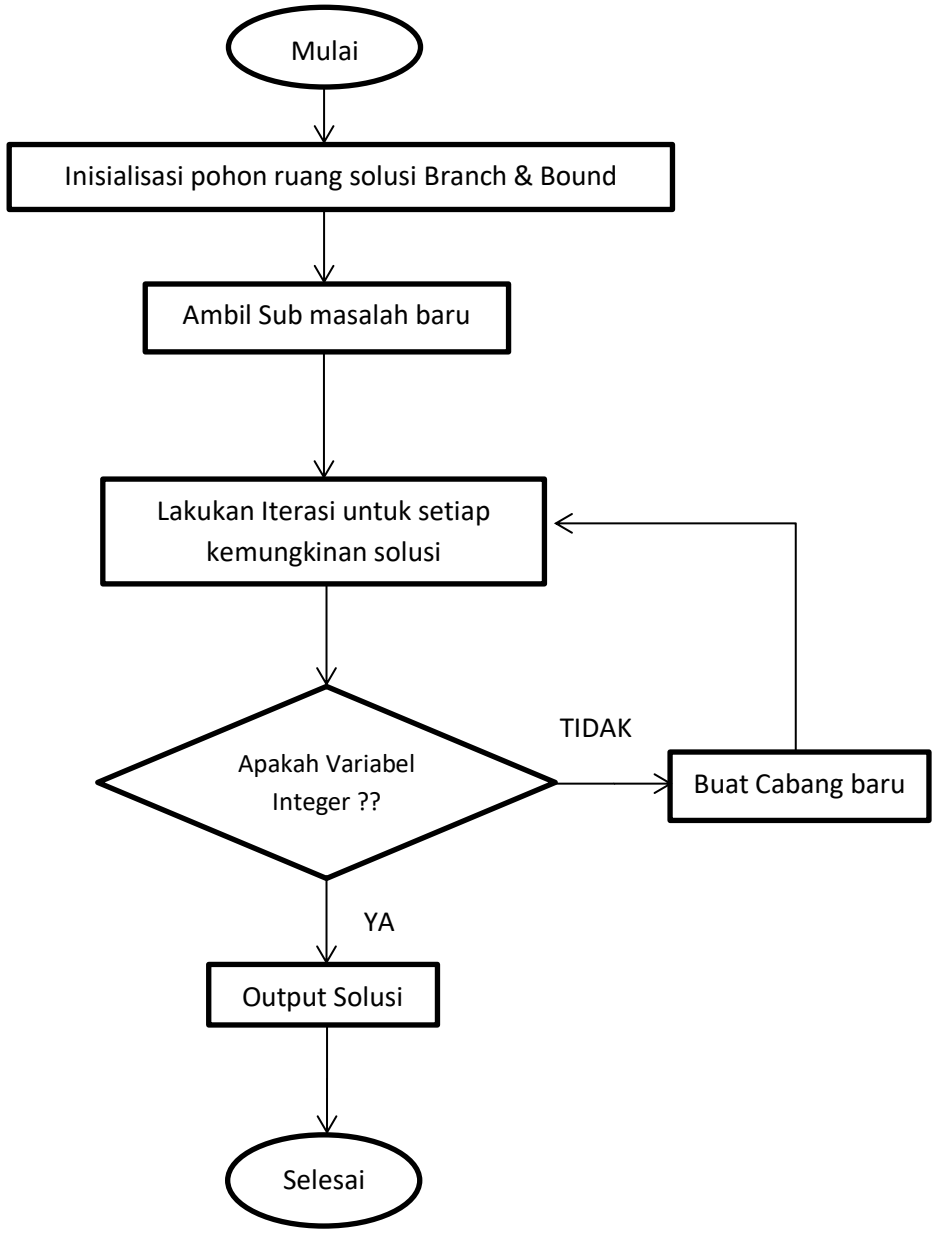
$Z \ : Z + 0.5R_1 = [0, 0, 3, 0, 1, 18]$

Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
x_2	0	1	1	0	2	1
s_2	0	0	-3	1	-5	3
x_1	1	0	0	0	-1	3
Z	0	0	3	0	1	18

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1 \qquad Z = 18$

Solusi Integer & Optimal

Berikut disajikan algoritma penyelesaian menggunakan metode Branch and Bound :



Gambar 1. Diagram Alur Metode Branch & Bound

1.7.6. Aplikasi POM – QM for Windows

Perangkat lunak adalah objek tertentu yang dapat dijalankan seperti kode sumber, kode objek atau sebuah program yang lengkap (Ladjamuddin, 2006). Menurut Wilman Rahman(2014) Perangkat Lunak pun memiliki banyak jenis seperti:

a. Software Application
b. Operating system
c. Software development tools
d. Device driver
e. Firmware
f. Open source
g. Freeware
h. Shareware
i. Malware

Nama lain dari aplikasi adalah software atau sering disebut juga dengan perangkat lunak. Karena disebut juga sebagai perangkat lunak, maka sifatnya pun berbeda dengan Hardware atau perangkat keras, jika perangkat keras adalah komponen yang nyata yang dapat dilihat dan disentuh secara langsung manusia, maka software tidak dapat disentuh dan dilihat secara fisik, software memang tidak tampak secara fisik dan tidak berwujud benda namun bisa dioperasikan. Pengertian software adalah sekumpulan data elektronik yang disimpan dan di atur oleh komputer, data elektronik yang disimpan oleh komputer itu dapat berupa program atau instruksi yang akan menjalankan suatu perintah. Melalui software inilah suatu komputer dapat menjalankan suatu perintah.

Salah satu software yang digunakan dalam penelitian ini adalah Software POM-QM for Windows 3 yang merupakan sebuah software yang dikeluarkan oleh Prentice Hall. Prentice Hall ini berperan sebagai imprint dari Pearson Education, Inc., yang berbasis di Upper Saddle River, New Jersey, Amerika Serikat. Software POM-QM for Windows V5 dirancang untuk melakukan perhitungan yang diperlukan pihak manajemen untuk mengambil keputusan di bidang produksi dan pemasaran. Software ini dirancang oleh Howard J. Weiss pada tahun 1996 untuk membantu manajer produksi khususnya dalam menyusun prakiraan dan anggaran untuk produksi bahan baku menjadi produk jadi atau setengah jadi dalam proses pabrikasi. Tetapi sekarang modul-modul yang terdapat di software ini sudah lebih berkembang dan dapat digunakan untuk menghitung berbagai permasalahan seperti quantitative methods dan managemen science. Software ini dibekali berbagai

macam modul, namun penggunaannya yang berkaitan dengan penulisan skripsi ini adalah pengoperasian modul Linear Programming saja (Weiss, 2006:134).

BAB II
METODE PENELITIAN

2.1. Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini berlangsung selama 1 minggu mulai tanggal 22 Desember sampai dengan 29 Desember 2023 dan tempat penelitian adalah UD. Toko Kue Rara di Jl.Sultan Hasanuddin No.110 Sungguminasa, Gowa, Sulawesi Selatan, 92111.

2.2. Objek Penelitian

Objek penelitian ini adalah produk kue yang di produksi oleh UD. Toko Kue Rara yang berupa Kue Tradisional Bugis Makassar dalam bentuk satuan yang dijual via etalase toko & pesanan untuk acara formal.

2.3. Jenis Data & Sumber Data

Jenis penelitian ini adalah kuantitatif, sumber data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data primer dan sekunder. Data primer dalam penelitian ini merupakan data yang diperoleh menggunakan kuisioner dan panduan wawancara dan Data sekunder dalam penelitian ini merupakan data yang diperoleh dengan mengambil data lampau dari pelaku usaha.

Data primer yang dibutuhkan antara lain adalah cara pembuatan kue dan juga dilakukan perekaman suara agar lebih mudah mengingat hasil wawancara.

Data sekunder yang dibutuhkan antara lain adalah hasil dari kegiatan produksi dan juga resep yang mencantumkan takaran dari setiap bahan baku yang digunakan di setiap kue berupa foto dari resep dari orang tua yang berhubungan dengan data penelitian.

2.4. Metode Pengumpulan Data

1. Observasi

   Tahap observasi merupakan teknik pengumpulan data dengan cara langsung terjun ke lapangan untuk mengambil data mengenai variabel yang berhubungan dengan pokok permasalahan yang akan diteliti.

2. Wawancara

   Yaitu teknik pengambilan data dengan wawancara langsung untuk mendapatkan penjelasan dan jawaban-jawaban dari pihak perusahaan, sehingga diharapkan akan mendapatkan keterangan-keterangan yang lebih

jelas dari masalah yang terjadi. Metode ini dilakukan dengan meminta konfirmasi atau keterangan-keterangan pada pemilik toko yaitu ibu Hj.Nurmala Dg.Nginna tentang semua masalah yang berhubungan dengan objek penelitian.

3. Dokumentasi / Arsip

Teknik dokumentasi merupakan bagian dari studi lapangan dengan mengambil data dari objek penelitian berupa dokumen, foto, atau tulisan yang berhubungan dengan data penelitian.

2.5. Metode Pengolahan Data

Dalam melakukan pengolahan data yang telah diperoleh saat observasi di lapangan, maka pengolahan dapat dilakukan secara kualitatif dan kuantitatif. Dalam pengolahan data secara kualitatif dilakukan untuk menggambarkan keadaan Toko Kue Rara dan proses produksi yang dilakukan. Sedangkan perolehan kuantitatif diperoleh untuk mendapatkan jumlah produksi yang optimum. Pengolahan data yang dilakukan dengan menggunakan metode Branch and Bound integer linear programming yang akan diselesaikan dengan menggunakan software QM for windows.

Adapun langkah-langkah dalam pengolahan data adalah sebagai berikut:

1. Penentuan komposisi bahan baku per produk.
2. Penentuan biaya bahan baku per produk.
3. Penentuan biaya produksi per produk serta menentukan keuntungan tiap produk.
4. Peramalan penjualan produk digunakan sebagai acuan untuk menentukan batasan permintaan untuk masa yang akan datang, sehingga perusahaan mengetahui berapa banyak produk yang harus di produksi. Dalam penelitian ini digunakan metode peramalan yaitu Exponential Smoothing, Linear Regression dan Moving Average. Nantinya akan dipilih metode peramalan terbaik berdasarkan atas nilai MAPE dan MAD terkecil.
5. Penentuan variabel keputusan.
6. Penentuan fungsi tujuan yakni merupakan keuntungan dari masing-masing produk
7. Penentuan fungsi kendala yakni batasan bahan baku, permintaan dan batasan jam kerja. Juga denga menambahkan batasan-batasan integer.
8. Pengolahan dengan menggunakan metode Branch and Bound integer linear programming dengan menggunakan software QM for Windows.

2.6. Definisi Operasional

1. Variabel Keputusan

Variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat. Variabel keputusan ini merupakan simbol matematika yang meng-gambarkan tingkatan aktivitas perusahaan. Dalam penelitian ini variabel keputusan adalah produk-produk yang di produksi dan dijual.

Sebagai indikator variabel keputusan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel keputusan

A. Kue 1 : Cucur Bayao (x_1)	B. Kue 2 : Biji Nangka (x_2)	C. Kue 3 : Pelita (x_3)
D. Kue 4 : Barongko (x_4)	E. Kue 5 : Sarikaya (x_5)	F. Kue 6 : Sarikaya Bayao (x_6)
G. Kue 7 : Putri Ijo (x_7)	H. Kue 8 : Katrisala (x_8)	I. Kue 9 : Sikaporo (x_9)
J. Kue 10 : Kue Lapis (x_{10})	K. Kue 11 : Tolba Susu (x_{11})	L. Kue12 : Tolba Bakar (x_{12})
M. Kue 13 : Umba-umba (x_{13})		

2. Ketidaksamaan Kendala

Ketidaksamaan kendala adalah hubungan linear dari variabel keputusan yang menunjukkan keterbatasan perusahaan dalam lingkungan operasi perusahaan. Dalam penelitian ini batasan yang dipakai adalah merupakan bahan-bahan yang digunakan untuk membuat suatu produk.

Batasan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

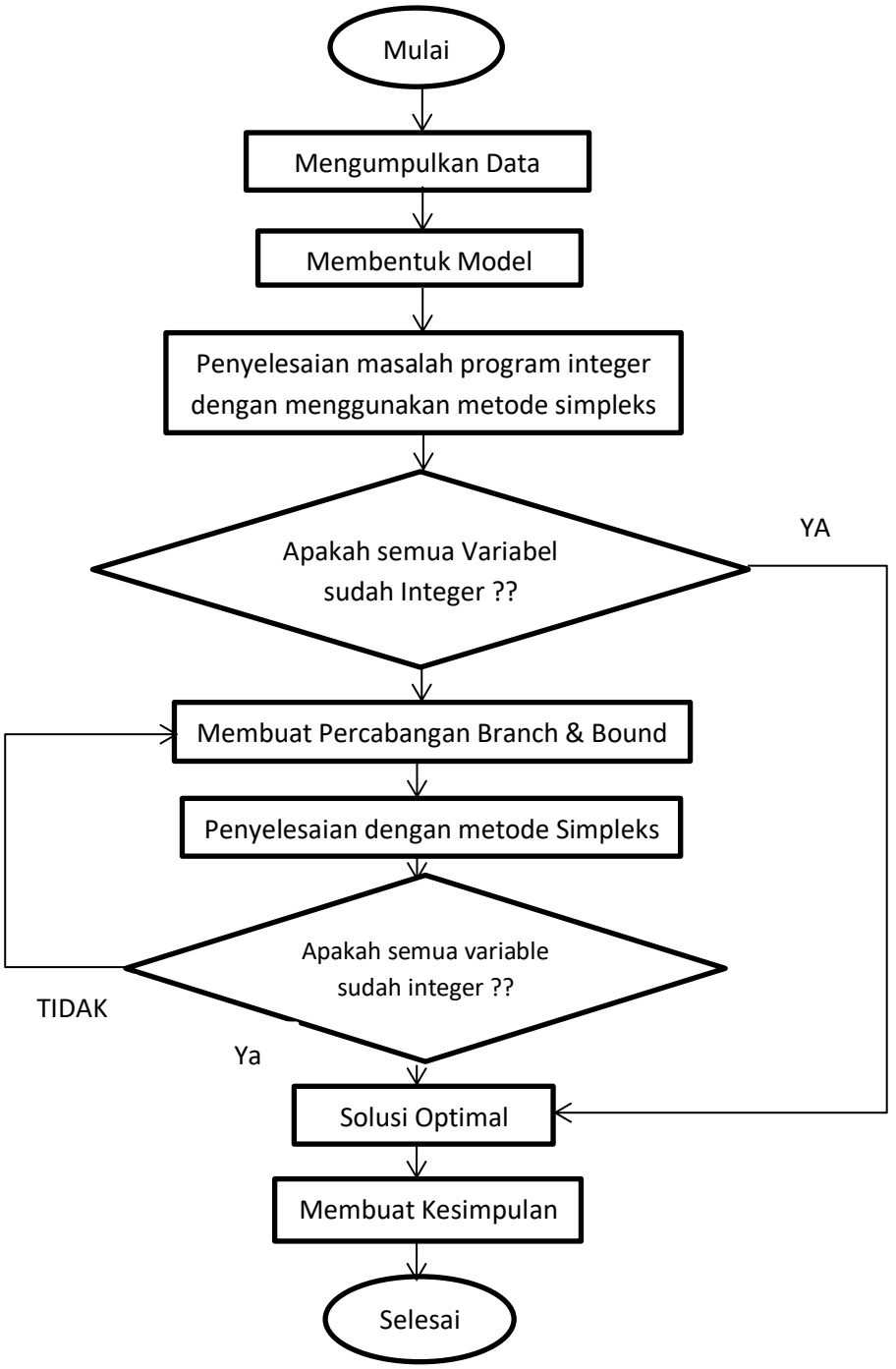
Tabel 2. Ketidaksamaan Kendala

a. Gula Pasir	b. Santan	c. Telur Ayam	d. Telur Bebek
e. Kuning Telur Bebek	f. Pasta Pandan	g. Kenari	h. Vanili
i. Gula Merah	j. Tepung Beras	k. Tepung Terigu	l. Tepung Maizena
m. Tepung Tapioka	n. Pewarna Kuning	o. Mentega	p. Susu Bubuk
q. Kentang	r. Pisang	s. Ketan	

2.7. Langkah Langkah Penelitian

1. Melakukan perumusan masalah.
2. Menentukan tujuan penelitian.
3. Pengumpulan data.
4. Menentukan variabel keputusan.
5. Membentuk model matematika dari data yang telah dikumpulkan.
6. Mengoptimalkan banyaknya produksi kue pada usaha toko kue Rara untuk mendapatkan keuntungan yang optimal dengan menggunakan Metode Simpleks.
7. Jika nilai variabel keputusan yang dihasilkan menggunakan Metode Simpleks tidak integer, maka diubah kedalam bentuk integer menggunakan Metode Branch and Bound.
8. Kemudian diambil solusi integer paling optimal dari percabangan yang telah dilakukan pada Metode Branch and Bound.
9. Selanjutnya dilakukan penarikan kesimpulan dari perhitungan tersebut sebagai saran bagi usaha toko kue Rara.

Adapun langkah-langkah metodologi penelitian dapat dibuat dalam bentuk flowchartsebagai berikut:



Gambar 2. Diagram Alur Tahapan Penelitian