

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah penelitian, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan landasan teori.

1.1 Latar Belakang

Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari mengenai struktur, relasi dan operasi matematika yang melibatkan objek abstrak seperti bilangan, variabel, dan operasi aritmatika.

Salah satu topik dalam aljabar yang banyak diteliti oleh para matematikawan saat ini adalah teori mengenai hyperstruktur. Teori hyperstruktur pertama kali diperkenalkan oleh Marty pada tahun 1934 saat gelaran kongres ke-8 Matematikawan Skandinavia diadakan. Dia mempublikasikan beberapa catatan mengenai hypergrup dan menerapkannya ke dalam berbagai konsep yang berbeda seperti fungsi aljabar, pembagian rasional, grup non-komutatif dan masih banyak lagi riset yang dikerjakan dalam bidang baru aljabar modern. Kemudian, diketahui bahwa teori hyperstruktur memiliki berbagai macam penerapan pada sains murni maupun sains terapan. Tepatnya, Corsini dan Leoreanu-Fotea yang mengoleksi berbagai macam terapan dari hyperstruktur aljabar khususnya yang ditemukan selama 15 tahun terakhir seperti terapan pada geometri, hypergraf, relasi biner, lattices, himpunan fuzzy dan rough, automata, kriptografi, teori koding, aljabar median, aljabar relasi, kecerdasan buatan, dan teori peluang. (Davvaz & Leoreanu-Fotea, 2007)

Hyperring adalah salah satu bidang dari hyperstruktur dan pertama kali dikenalkan oleh Krasner, Nakasis, Massourous, dan secara khusus diteliti oleh Davvaz, Leoreanu-Fotea, Zahedi, Ameri dan Norouzi. Salah satu jenis hyperring yang telah banyak dikenal adalah krasner hyperring. Krasner hyperring sejatinya adalah hyperring dengan penjumlahan sebagai hyperoperasi dan perkalian sebagai operasi. Jenis lain dari hyperring ditemukan oleh Rota pada tahun 1982 dimana perkalian sebagai hyperoperasi dan penjumlahan sebagai operasi. Hyperring ini disebut sebagai multiplicative hyperring. Kemudian, De Salvo memperkenalkan hyperring dimana penjumlahan dan perkalian merupakan hyperoperasi. Lebih jauh, terdapat jenis hyperring dimana perkalian dan penjumlahan merupakan hyperoperasi tetapi dibandingkan memiliki sifat asosiatif, distributif, dan komutatif, hyperring tersebut justru memenuhi sifat asosiatif lemah, distributif lemah, dan komutatif lemah. Hyperring itu disebut sebagai H_v -Hyperring. Procesi dan Rota meneliti mengenai pembagian ring dalam krasner hyperring dan membuat konsep keprimaan hyperideal dalam multiplicative hyperring. (Ameri & Kordi, 2016)

Relasi adalah pasangan terurut dari elemen-elemen suatu himpunan. Relasi ekuivalensi adalah relasi yang memenuhi sifat refleksif, simetri, dan transitif. Salah satu relasi ekuivalensi yang istimewa adalah relasi fundamental yang memainkan

peran penting dalam teori aljabar hyperstruktur. Relasi fundamental menghubungkan aljabar hyperstruktur dengan struktur aljabar biasa. Relasi fundamental pada hypergrup didefinisikan oleh Koskas, kemudian diteliti oleh Corsini, Freni, dan Vougiouklis. (Ameri & Kordi 2016)

Rosaria Rota dan Rita Procesi Ciampi memperkenalkan struktur polinomial pada hypergroup, kemudian memperluas konsepnya ke dalam krasner hyperring dan multiplicative hyperring. Di dalam bukunya “Hyperring Theory and Applications”, Bijan Davvaz dan Violeta Leoreanu-Fotea mengenalkan jenis struktur polinomial pada multiplicative hyperring dengan hyper perkalian yang berbeda dengan yang diperoleh Rota dan Ciampi. (Rota & Ciampi, 2014)

Berdasarkan uraian diatas, kami ingin menggunakan konsep relasi fundamental pada multiplicative hyperring regular sedemikian sehingga hasil partisi multiplicative hyperring menggunakan relasi fundamental γ^* membentuk ring. Kemudian, kami ingin mengonstruksi isomorfisma ring polinomial yang diperoleh dari partisi multiplicative hyperring polinomial dengan menggunakan relasi fundamental γ^* sehingga lahirlah karya kami yang berjudul :

“Isomorfisma Partisi Multiplicative Hyperring Polinomial”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi ring yang diperoleh dengan menggunakan relasi fundamental γ^* untuk mempartisi multiplicative hyperring?
2. Bagaimana konstruksi struktur polinomial pada multiplicative hyperring?
3. Bagaimana konstruksi isomorfisma pada ring hasil partisi multiplicative hyperring polinomial?

1.3 Batasan Penelitian

Penelitian ini dibatasi pada penggunaan hypergrup yang didefinisikan oleh F.Marty, multiplicative hyperring yang didefinisikan oleh R.Rota, hyperring yang didefinisikan oleh T.Vougiouklis, relasi fundamental γ^* yang didefinisikan oleh T.Vougiouklis, dan struktur polinomial pada multiplicative hyperring yang didefinisikan oleh R.Rota.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Memperoleh konstruksi ring dengan mempartisi multiplicative hyperring menggunakan relasi fundamental.
2. Memperoleh konstruksi multiplicative hyperring polinomial.
3. Memperoleh isomorfisma dari ring hasil partisi multiplicative hyperring polinomial.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat kepada berbagai pihak sebagai berikut:

1. Bagi Penulis :
 - a. Sebagai sarana untuk memperkaya pengetahuan dan wawasan mengenai ilmu matematika khususnya pada bidang aljabar.
 - b. Sebagai sarana untuk menambah keterampilan dalam menerapkan teori-teori yang telah diperoleh dalam perkuliahan maupun yang diperoleh secara mandiri.
2. Bagi Pembaca :
 - a. Sebagai sarana untuk menambah pemahaman tentang teori-teori dalam bidang aljabar.
 - b. Sebagai bahan referensi dalam kajian keilmuan matematika.
3. Bagi Universitas Hasanuddin :
 Sebagai pelengkap literatur mengenai matematika khususnya aljabar yang dapat dimanfaatkan oleh setiap civitas akademik Universitas Hasanuddin.

1.6 Landasan Teori

Pada subbab berikut ini diberikan beberapa materi yang akan digunakan sebagai landasan teori dalam mengkaji aplikasi relasi fundamental γ^* pada regular multiplicative hyperring dan himpunan elemen pembangun hyperideal regular. Materinya berupa himpunan, relasi, grup, gelanggang, lapangan, hypergrup, hyperring, dan multiplicative hyperring.

1.6.1 Himpunan, Relasi, dan Fungsi

Pada subbab ini dibahas mengenai himpunan, relasi, dan fungsi.

Definisi 1.6.1.1 (Enderton, 1977) Himpunan adalah koleksi dari objek-objek. Objek tersebut disebut sebagai anggota dari himpunan atau elemen himpunan.

Contoh 1.6.1.1 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Himpunan bilangan bulat positif $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dengan anggota-anggotanya adalah bilangan bulat positif.

Definisi 1.6.1.2 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan A dan B himpunan. $A \subseteq B$ jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \in B$.

Contoh 1.6.1.2 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $A = \{2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Karena 2 dan 3 anggota B juga maka dapat disimpulkan bahwa $A \subseteq B$.

Definisi 1.6.1.3 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan A dan B himpunan. $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh 1.6.1.3 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $A = \{2,3,5,7,11\}$ dan $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 11 \text{ dan } x \text{ bilangan prima}\}$ maka diperoleh $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ sedemikian sehingga diperoleh $A = B$.

Definisi 1.6.1.4 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan A dan B himpunan. Gabungan dari himpunan A dan B didefinisikan sebagai

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Contoh 1.6.1.4 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{4,5\}$ maka diperoleh $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$.

Definisi 1.6.1.5 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan A dan B himpunan. Irisan dari himpunan A dan B didefinisikan sebagai

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Contoh 1.6.1.5 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{a, i, u, e, o\}$ maka $A \cap B = \{a, e\}$.

Definisi 1.6.1.6 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Perkalian Cross dari himpunan A dan B didefinisikan sebagai

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Contoh 1.6.1.6 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b\}$ maka

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

Definisi 1.6.1.7 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan X himpunan. Himpunan kuasa dari X didefinisikan sebagai

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

Contoh 1.6.1.7 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $X = \{1,2,3\}$ maka

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Definisi 1.6.1.8 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Relasi R dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai subset dari $A \times B$

Contoh 1.6.1.8 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Misal R adalah himpunan pasangan terurut (m, n) sedemikian sehingga $m < n$ yaitu

$$R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$$

Karena $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka R adalah relasi pada $\mathbb{Z}$.

Definisi 1.6.1.9 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan R relasi dari himpunan A ke himpunan B . Maka daerah asal dari R , dinotasikan $\mathcal{D}(R)$, didefinisikan oleh himpunan

$$\mathcal{D}(R) = \{x \mid x \in A \text{ dan terdapat } y \in B \text{ sedemikian sehingga } (x, y) \in R\}$$

Peta dari R dinotasikan $\mathcal{I}(R)$ didefinisikan oleh himpunan

$$\mathcal{I}(R) = \{y \mid y \in B \text{ dan terdapat } x \in A \text{ sedemikian sehingga } (x, y) \in R\}$$

Contoh 1.6.1.9 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal $A = \{4, 5, 7, 8, 9\}$ dan $B = \{16, 18, 20, 22\}$. Definisikan $R \subseteq A \times B$ oleh

$$R = \{(4, 16), (4, 20), (5, 20), (8, 16), (9, 18)\}$$

Tinjau bahwa R adalah relasi dari A ke B . Berdasarkan definisi 1.6.1.9 diperoleh bahwa

$$\mathcal{D}(R) = \{4, 5, 8, 9\}$$

dan

$$\mathcal{I}(R) = \{16, 18, 20\}.$$

Definisi 1.6.1.10 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal R relasi pada himpunan A . Maka R disebut :

- Refleksif** jika untuk setiap $x \in A$, berlaku xRx .
- Simetris** jika untuk setiap $x, y \in A$, berlaku xRy mengakibatkan yRx .
- Transitif** jika untuk setiap $x, y, z \in A$, berlaku xRy dan yRz mengakibatkan xRz .

Definisi 1.6.1.11 (Grami, 2022) Misalkan R adalah relasi pada himpunan A dengan $|A| = n$. Relasi R_t adalah transitive closure dari relasi R jika R_t adalah relasi terkecil sedemikian sehingga $R \subset R_t$ dan R_t bersifat transitive.

Definisi 1.6.1.12 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal E relasi pada himpunan A . Relasi E disebut sebagai relasi ekuivalensi apabila relasi tersebut memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Contoh 1.6.1.10 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan n adalah bilangan bulat yang fixed. Definisikan relasi $\equiv_n$ pada $\mathbb{Z}$ yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x \equiv_n y$ jika dan hanya jika $n \mid (x - y)$ atau $x - y = nk$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan $\equiv_n$ adalah relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}$.

- Ambil $x \in \mathbb{Z}$ sebarang. Tinjau bahwa, $x - x = 0 = 0 \cdot n$. Oleh karena itu, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, berlaku $x \equiv_n x$. Oleh karena itu, $\equiv_n$ refleksif.

- b. Ambil $x, y \in \mathbb{Z}$ sebarang. Misalkan $x \equiv_n y$. Ini berarti terdapat $q \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $qn = x - y$. Sehingga, $(-q)n = y - x$ yang berarti $n \mid (y - x)$ atau $y \equiv_n x$. Oleh karena itu, $\equiv_n$ simetris.
- c. Ambil $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sebarang. Misalkan $x \equiv_n y$ dan $y \equiv_n z$. Ini berarti terdapat $q, r \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $qn = x - y$ dan $rn = y - z$. Dengan menjumlahkan kedua persamaan diperoleh
- $$qn + rn = (x - y) + (y - z) \Leftrightarrow (q + r)n = x - z$$
- Karena $q + r \in \mathbb{Z}$ ini berarti $n \mid x - z$. Sehingga diperoleh $x \equiv_n z$. Oleh karena itu, $\equiv_n$ bersifat transitif.

Dari a, b , dan c diperoleh kesimpulan bahwa relasi $\equiv_n$ bersifat refleksif, simetris, dan transitif sehingga $\equiv_n$ adalah relasi ekuivalensi.

■

Definisi 1.6.1.13 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan E adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A . Untuk setiap $x \in A$, misal

$$[x] = \{y \in A \mid yEx\}.$$

Himpunan $[x]$ disebut sebagai kelas ekuivalensi yaitu himpunan semua elemen A yang berelasi terhadap x atas relasi ekuivalensi E .

Contoh 1.6.1.11 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan relasi ekuivalensi $\equiv_n$ pada $\mathbb{Z}$ seperti yang diberikan pada contoh 1.6.1.10. Tinjau bahwa kelas ekuivalensi $2 \in \mathbb{Z}$ diberikan sebagai berikut

$$[2] = \{y \in \mathbb{Z} \mid 2 \equiv_n y \Leftrightarrow n \mid 2 - y\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 2 = nk + yf, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definisi 1.6.1.14 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan E relasi ekuivalensi pada himpunan A . Didefinisikan partisi dari A sebagai himpunan

$$\mathcal{P} = \{[x] \mid x \in A\}.$$

Contoh 1.6.1.12 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal diberikan relasi ekuivalensi $\equiv_n$ pada himpunan $\mathbb{Z}$ pada contoh 1.6.1.10. Misalkan $n = 6 \in \mathbb{Z}$, maka diperoleh partisi himpunan $\mathbb{Z}$ sebagai berikut:

$$\mathcal{P} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\} = \mathbb{Z}_6.$$

Definisi 1.6.1.15 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Relasi $f \subseteq A \times B$ disebut fungsi atau pemetaan dari A ke B jika memenuhi :

- $\mathcal{D}(f) = A$.
- Untuk setiap $(x, y), (x', y') \in f$, jika $x = x'$ maka $y = y'$.

Digunakan notasi $f: A \rightarrow B$ untuk menotasikan fungsi dari himpunan A ke himpunan B . Untuk $(x, y) \in f$ dinotasikan sebagai $f(x) = y$.

Contoh 1.6.1.13 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal diberikan $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dengan

$$f = \{(n, 2n + 3) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Tinjau bahwa $\mathcal{D}(f) = \{n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$. Ambil $n, m \in \mathbb{Z}$ sembarang. Misalkan $n = m$. Tinjau bahwa,

$$n = m \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow 2n + 3 = 2m + 3.$$

Sehingga diperoleh $f(n) = f(m)$. Oleh karena itu, f merupakan fungsi.

Definisi 1.6.1.16 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan f fungsi dari himpunan A ke himpunan B . Maka,

- f disebut satu-satu atau injektif jika untuk setiap $x, y \in A$, jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$.
- f disebut pada atau surjektif jika $\mathcal{I}(f) = B$.
- f disebut bijektif jika injektif dan surjektif.

Definisi 1.6.1.17 (Prinsip Induksi Matematika) (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $S \subseteq \mathbb{Z}^\#$. Misalkan $n_0 \in S$. Jika S memenuhi untuk setiap $n \geq n_0$ dimana $n \in \mathbb{Z}^\#$, jika $n \in S$ maka $n + 1 \in S$, maka berlaku

$$\{n \in \mathbb{Z}^\# \mid n \geq n_0\} \subseteq S.$$

1.6.2 Grup, Gelanggang, dan Lapangan

Pada subbab berikut ini akan dibahas mengenai grup, gelanggang atau ring, lapangan, gelanggang atau ring regular, homomorfisma ring, dan teorema isomorfisma ring.

Definisi 1.6.2.1 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Grup adalah pasangan terurut $(G, *)$ dimana G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G apabila sifat-sifat berikut terpenuhi :

- Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = a = e * a$.
- Untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = e = b * a$.

Contoh 1.6.2.1 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Tinjau himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan operasi biner $+$. Maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena,

- Ambil $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sebarang. Perhatikan bahwa, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Pilih $0 \in \mathbb{Z}$, tinjau bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $0 + x = x = x + 0$.

- c. Ambil $x \in \mathbb{Z}$ sebarang, pilih $(-x) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga diperoleh $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

Berdasarkan a, b , dan c diperoleh $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

■

Teorema 1.6.2.1 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal $(G, *)$ grup. Maka pernyataan berikut berlaku :

- Terdapat dengan tunggal $e \in G$ sedemikian sehingga $e * a = a = a * e$ untuk setiap $a \in G$.
- Untuk setiap $a \in G$, terdapat dengan tunggal $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = e = b * a$.

Bukti:

- Misalkan $(G, *)$ grup. Misalkan $e_1 \in G$ adalah identitas di G . Misalkan terdapat identitas lain di G sebut saja $e_2 \in G$. Akan ditunjukkan $e_1 = e_2$. Karena e_1 identitas maka diperoleh $e_1 * e_2 = e_2$. Dan karena e_2 identitas maka diperoleh $e_1 * e_2 = e_1$. Sehingga diperoleh bahwa, $e_1 = e_2$. Oleh karena itu, elemen identitas di grup itu tunggal.
- Ambil $x \in G$ sebarang. Berdasarkan definisi 1.6.2.1 aksioma bagian c, terdapat $y \in G$ sedemikian sehingga $a * b = e = b * a$. Misalkan terdapat $c \in G$ sedemikian sehingga $a * c = e = c * a$ berlaku. Akan ditunjukkan $b = c$. Tinjau bahwa,

$$\begin{aligned}
 b &= b * e \\
 &= b * (a * c) \\
 &= (b * a) * c \\
 &= e * c \\
 &= c.
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, b bersifat tunggal.

■

Definisi 1.6.2.2 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal $(G, *)$ grup. Jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku

$$a * b = b * a.$$

Maka $(G, *)$ disebut sebagai grup komutatif atau abelian. Grup yang bersifat nonkomutatif disebut sebagai grup abelian.

Contoh 1.6.2.2 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $(\mathbb{Z}, +)$ grup. Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b = b + a$ maka diperoleh $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup abelian.

Definisi 1.6.2.3 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Gelanggang atau ring adalah triple terurut $(R, +, \cdot)$ dengan R adalah himpunan tak kosong serta $+$ dan $\cdot$ adalah operasi yang memenuhi aksioma berikut:

- a. Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- b. Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x + y = y + x$.
- c. Terdapat $0 \in R$ sedemikian sehingga $x + 0 = x = 0 + x$ untuk setiap $x \in R$.
- d. Untuk setiap $x \in R$ terdapat $-x \in R$ sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- e. Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- f. Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Contoh 1.6.2.3 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ adalah ring dengan $\mathbb{Z}_n$ adalah himpunan bilangan bulat modulo n , $+_n$ adalah penjumlahan modulo n , dan $\cdot_n$ adalah perkalian modulo n .

Definisi 1.6.2.4 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Ring R disebut komutatif jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x \cdot y = y \cdot x$. Ring yang tidak komutatif disebut sebagai ring nonkomutatif.

Contoh 1.6.2.4 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif karena perkalian dari bilangan bulat bersifat komutatif.

Definisi 1.6.2.5 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan R ring. Elemen $e \in R$ disebut sebagai identitas jika untuk setiap $x \in R$ berlaku $x \cdot e = x = e \cdot x$.

Contoh 1.6.2.5 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring. Karena $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ maka $1 \in \mathbb{Z}$ adalah elemen identitas di $\mathbb{Z}$. Ring $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ dengan $\mathbb{E}$ adalah himpunan bilangan bulat genap tidak memiliki elemen identitas.

Definisi 1.6.2.6 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misalkan R adalah ring dengan elemen identitas 1. Elemen $u \in R$ disebut sebagai unit apabila terdapat $v \in R$ sedemikian sehingga $u \cdot v = 1 = v \cdot u$.

Definisi 1.6.2.7 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Ring R dengan unsur identitas 1 disebut sebagai ring pembagi jika untuk setiap elemen tak nol di R memiliki unit.

Definisi 1.6.2.8 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Ring pembagi R yang komutatif disebut sebagai lapangan.

Contoh 1.6.2.6 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Himpunan $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, dan $\mathbb{Z}$ adalah lapangan atas operasi $+$ dan $\cdot$ standar pada masing-masing himpunan.

Definisi 1.6.2.9 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Ring R dikatakan berhingga apabila himpunan R memiliki berhingga anggota dan dikatakan tak berhingga apabila himpunan R memiliki tidak berhingga anggota.

Contoh 1.6.2.7 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Ring $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ merupakan ring berhingga dan ring $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring tidak berhingga.

Definisi 1.6.2.10 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Misal diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dan $(R', +', \cdot')$ dan $f: R \rightarrow R'$. Maka f disebut homomorfisma dari R ke R' jika

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + ' f(b) \\ f(a \cdot b) &= f(a) \cdot ' f(b) \end{aligned}$$

untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 1.6.2.11 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Homomorfisma f dari ring R ke ring R' disebut :

- Monomorfisma jika f satu-satu.
- Epimorfisma jika f pada.
- Isomorfisma jika f satu-satu dan pada.

Definisi 1.6.2.12 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) Ring R dan R' disebut isomorfis jika terdapat isomorfisma dari R ke R' . Dinotasikan $R \cong R'$ jika R dan R' isomorfis.

Teorema 1.6.2.2 (Malik, Mordeson, & Sen, 1997) (Teorema Isomorfisma Ring Pertama) Misalkan f adalah homomorfisma dari ring R ke R' . Maka $f(R)$ adalah ideal dari R' dan

$$R/\text{Ker}(f) \cong f(R).$$

Definisi 1.6.2.14 (Fraleigh, 1994) Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Polinomial $f(x)$ dengan koefisien R didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $a_n \neq 0$. Himpunan polinomial $f(x)$ dengan koefisien R di notasikan sebagai $R[x]$ dengan penjumlahan dan perkalian didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) + \left(\sum_{i=0}^m b_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i. \\ f(x) \cdot g(x) &= \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^m b_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i, c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k. \end{aligned}$$

Jika R adalah ring dengan identitas perkalian 1 maka dituliskan $1x^i$ sebagai x^i .

Teorema 1.6.2.3 (Fraleigh, 1994) Jika R adalah ring. Maka $(R[x], +, \cdot)$ dimana $+$ dan $\cdot$ merupakan penjumlahan dan perkalian polinomial membentuk ring yang dinamakan ring polinomial.

1.6.3 Hypergrup, Hyperring, dan Multiplicative Hyperring

Pada subbbab berikut diberikan landasan teori mengenai hypergrup dan sifat-sifatnya, hyperring dengan sifat-sifatnya serta multiplicative hyperring dan sifat-sifatnya. Diberikan pula beberapa materi mengenai regular multiplicative hyperring dan himpunan elemen pembangun hyperideal regular.

Definisi 1.6.3.1 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Misalkan H himpunan tak kosong dan $\mathcal{P}^*(H)$ adalah koleksi himpunan bagian dari H yang tak kosong. Hyperoperasi didefinisikan sebagai pemetaan berikut:

$$f: H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$$

Contoh 1.6.3.1 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2022) Misalkan $H = \{A, B, O, AB\}$ maka $\otimes: H \times H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ yang didefinisikan pada tabel berikut merupakan hyperoperasi.

$\otimes$	O	A	B	AB
O	$\{O\}$	$\{O, A\}$	$\{O, B\}$	$\{A, B\}$
A	$\{O, A\}$	$\{O, A\}$	$\{O, A, B, AB\}$	$\{A, B, AB\}$
B	$\{O, B\}$	$\{O, A, B, AB\}$	$\{O, B\}$	$\{A, B, AB\}$
AB	$\{A, B\}$	$\{A, B, AB\}$	$\{A, B, AB\}$	$\{A, B, AB\}$

Tabel 1 Hyperoperasi pada himpunan H

Definisi 1.6.3.2 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Misalkan H himpunan tak kosong dan $\circ: H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ adalah hyperoperasi. Pasangan $(H, \circ)$ disebut sebagai hypergroupoid. Dengan untuk setiap $A, B \in \mathcal{P}^*(H)$ dan $x \in H$ berlaku

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b, A \circ x = A \circ \{x\}, \text{ dan } x \circ B = \{x\} \circ B.$$

Contoh 1.6.3.2 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2022) Misalkan $H = \{A, B, O, AB\}$ dan $\otimes: H \times H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ seperti yang didefinisikan pada contoh 1.6.3.1 maka diperoleh $(H, \otimes)$ membentuk hypergroupoid.

Definisi 1.6.3.3 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Hypergroupoid $(H, \circ)$ disebut sebagai semihypergrup jika untuk setiap $x, y, z \in H$ berlaku $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ yang berarti

$$\bigcup_{u \in x \circ y} u \circ z = \bigcup_{v \in y \circ z} x \circ v.$$

Contoh 1.6.3.3 Misalkan $S = \{H, h\}$ dimana H dinotasikan sebagai induk yang memiliki gen dominan yang menyebabkan penyakit huntington. Penyakit huntington adalah penyakit genetik dimana penderita memiliki kelainan pada saraf otak yang membuat penderita kesulitan dalam koordinasi gerak anggota tubuh, kesulitan dalam konsentrasi, memiliki daya ingat yang rendah, mudah merasa depresi serta perubahan kepribadian yang ekstrem. Misalkan $\circ: S \times S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ adalah hyperoperasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$\circ$	H	h
H	$\{H\}$	$\{H, h\}$
h	$\{H, h\}$	$\{h\}$

Tabel 2 Hyperoperasi pada himpunan S

Tinjau bahwa,

$$(H \circ H) \circ H = \{H\} \circ H = \{H\} = H \circ \{H\} = H \circ (H \circ H).$$

$$(H \circ H) \circ h = \{H\} \circ h = \{H, h\} = H \circ \{H, h\} = H \circ (H \circ h).$$

$$(H \circ h) \circ H = \{H, h\} \circ H = \{H, h\} = H \circ \{H, h\} = H \circ (h \circ H).$$

$$(H \circ h) \circ h = \{H, h\} \circ h = \{H, h\} = H \circ \{h\} = H \circ (h \circ h).$$

$$(h \circ H) \circ H = \{H, h\} \circ H = \{H, h\} = h \circ \{H\} = h \circ (H \circ H).$$

$$(h \circ H) \circ h = \{H, h\} \circ h = \{H, h\} = h \circ \{H, h\} = h \circ (H \circ h).$$

$$(h \circ h) \circ H = \{h\} \circ H = \{H, h\} = h \circ \{H, h\} = h \circ (h \circ H).$$

$$(h \circ h) \circ h = \{h\} \circ h = \{h\} = h \circ \{h\} = h \circ (h \circ h).$$

Sehingga diperoleh untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ yang menunjukkan bahwa $(S, \circ)$ membentuk semihypergrup.

Definisi 1.6.3.4 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Hypergroupoid $(H, \circ)$ disebut sebagai quasihypergrup jika untuk setiap $a \in H$ diperoleh $a \circ H = H = H \circ a$. Kondisi ini disebut juga sebagai aksioma reproduksi.

Definisi 1.6.3.5 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Hypergroupoid $(H, \circ)$ yang memenuhi semihypergrup dan quasihypergrup disebut sebagai hypergrup.

Contoh 1.6.3.4 Misal diberikan semihypergrup $(S, \circ)$ pada contoh 1.6.3.3. Tinjau bahwa

$$H \circ S = H \circ \{H, h\} = \{H, h\} = S$$

$$S \circ H = \{H, h\} \circ H = \{H, h\} = S \tag{9}$$

dan

$$h \circ S = h \circ \{H, h\} = \{H, h\} = S$$

$$S \circ h = \{H, h\} \circ h = \{H, h\} = S. \quad (10)$$

Sehingga dari persamaan (9) dan (10) diperoleh $H \circ S = S = S \circ H$ dan $h \circ S = S = S \circ h$. Oleh karena itu, diperoleh $(S, \circ)$ membentuk quasihypergrup sedemikian sehingga $(S, \circ)$ membentuk hypergrup.

Definisi 1.6.3.6 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) $(R, +, \cdot)$ adalah hyperring jika:

- $(R, +)$ adalah hypergrup.
- $(R, \cdot)$ adalah semihypergrup.
- $(R, +, \cdot)$ bersifat strongly distributive yaitu untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ dan $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Contoh 1.6.3.5 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Misal diberikan himpunan $H = \{0, 1\}$. Definiskan hyperoperasi $+$ dan $\cdot$ pada H sebagai berikut

$+$	0	1
0	$\{0\}$	$\{0, 1\}$
1	$\{0, 1\}$	$\{1\}$

Tabel 3 Hyperoperasi penjumlahan pada himpunan H

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{0\}$
1	$\{0\}$	$\{0, 1\}$

Tabel 4 Hyperoperasi perkalian pada himpunan H

Maka $(H, +, \cdot)$ membentuk hyperring.

Definisi 1.6.3.7 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) $(R, +, \circ)$ disebut multiplicative hyperring jika:

- $(R, +)$ adalah grup abelian.
- $(R, \circ)$ adalah semihypergrup.
- Untuk setiap $a, b, c \in R$ diperoleh $a \cdot (b + c) \subseteq a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a \subseteq b \cdot a + c \cdot a$.
- Untuk setiap $a, b \in R$, diperoleh $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Jika syarat pada c. berbentuk $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, maka disebut strongly distributive multiplicative hyperring.

Contoh 1.6.3.6 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur satuan. Definiskan hyperoperasi perkalian di R sebagai berikut

$$a \circ b = \{a \cdot b, k \cdot a \cdot b\}.$$

Untuk setiap $a, b \in R$ dan $k \in \mathbb{Z}$. Jika $\text{char}(R) = 0$ atau $\text{char}(R)$ tidak membagi $k - 1$, maka diperoleh $(R, +, \circ)$ membentuk multiplicative hyperring komutatif.

Teorema 1.6.3.1 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Jika $(R, +, \circ)$ adalah multiplicative hyperring maka untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$a \cdot (b - c) \subseteq a \cdot b - a \cdot c \text{ dan } (b - c) \cdot a \subseteq b \cdot a - c \cdot a.$$

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah strongly distributive multiplicative hyperring maka untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \text{ dan } (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$

Bukti:

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah multiplicative hyperring. Berdasarkan definisi 1.6.3.7 dari sifat c dan d diperoleh bahwa

$$a \cdot (b - c) = a \cdot (b + (-c)) \subseteq a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

dan

$$(b - c) \cdot a = (b + (-c)) \cdot a \subseteq b \cdot a + (-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah strongly distributive multiplicative hyperring. Maka berdasarkan definisi 1.6.3.7 diperoleh bahwa

$$a \cdot (b - c) = a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

dan

$$(b - c) \cdot a = (b + (-c)) \cdot a = b \cdot a + (-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$

■

Definisi 1.6.3.8 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Multiplicative hyperring $(R, +, \cdot)$ disebut unitary jika memuat elemen u sedemikian sehingga $a \cdot u = u \cdot a = \{a\}$ untuk setiap $a \in R$.

Definisi 1.6.3.9 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Himpunan tak kosong $H \subseteq R$ adalah hyperideal dari multiplicative hyperring $(R, +, \cdot)$ jika $H - H \subseteq H$ dan untuk setiap $x, y \in H$ dan $r \in R$ berlaku $x \cdot r \cup r \cdot x \subseteq H$.

Definisi 1.6.3.10 (Davvaz & Leoranu-Fotea, 2007) Homomorfisma dari dua multiplicative hyperring $(R, +, \circ)$ dan $(R', +', \circ')$ adalah pemetaan $f: R \rightarrow R'$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in R$ diperoleh $f(x + y) = f(x) +' f(y)$

dan $f(x \circ y) \subseteq f(x) \circ' f(y)$. Homomorfisma hyperring disebut homomorfisma kuat jika $f(x \circ y) = f(x) \circ' f(y)$.

Definisi 1.6.3.11 (Ameri & Kordi, 2016) Misalkan $(R, +, \circ)$ adalah multiplicative hyperring. Maka, elemen $e \in R$ disebut identitas kiri jika $a \in e \circ a$ untuk setiap $a \in R$. Elemen $e \in R$ disebut identitas kanan jika $a \in a \circ e$ untuk setiap $a \in R$. Elemen $e \in R$ disebut elemen identitas apabila merupakan identitas kiri dan kanan.

Definisi 1.6.3.12 (Ameri & Kordi, 2016) Misalkan $(R, +, \circ)$ adalah multiplicative hyperring. Elemen $e \in R$ disebut identitas skalar kiri jika $\{a\} = e \circ a$ untuk setiap $a \in R$. Elemen $e \in R$ disebut identitas skalar kanan jika $\{a\} = a \circ e$ untuk setiap $a \in R$. Elemen $e \in R$ disebut identitas skalar jika merupakan identitas skalar kanan dan kiri.

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dibahas mengenai metodologi penelitian yang mencakup metode penelitian, lokasi dan waktu penelitian, serta prosedur penelitian.

2.1 Metodologi Penelitian

Penelitian yang dilakukan bersifat pengembangan teori keilmuan terkhususnya di bidanga Matematika Alkanar dengan menggunakan metode studi literatur yaitu dengan cara mengunmpulkan dan mengkaji beberapa buku, jurnal, atau literatur lainnya terkait multiplicative hyperring polinomial dan relasi fundamental.

2.2 Lokasi dan Waktu Penelitian

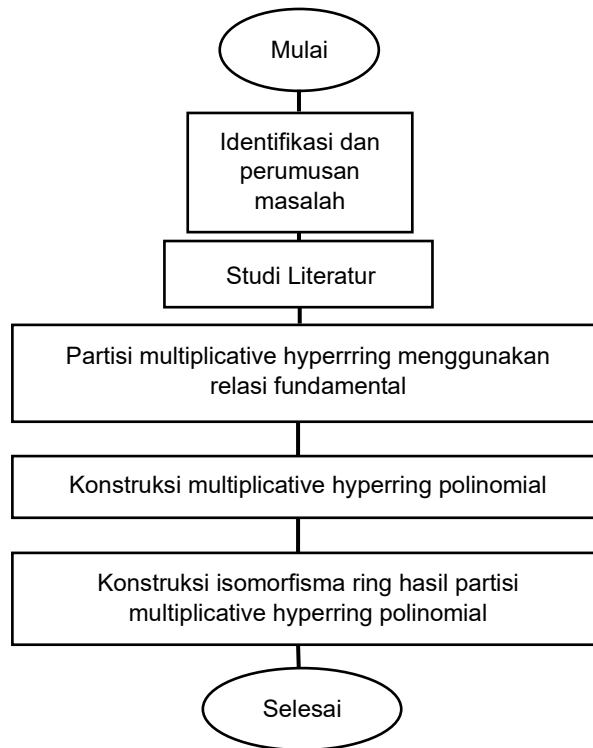
Lokasi penelitian ini bertempat di Laboratorium Aljabar, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Kota Makassar, Provinsi Sulawesi Selatan dengan waktu penelitian berlangsung mulai 6 September 2024.

2.3 Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- i. Mengidentifikasi dan merumuskan masalah yang menjadi fokus penelitian.
- ii. Melakukan studi literatur terhadap referensi-referensi jurnal penelitian dan buku yang berkaitan dengan topik yang diteliti sebagai tahap melengkapi pengetahuan dasar peneliti untuk keperluan pelaksana penelitian.
- iii. Mempartisi multiplicative hyperring menggunakan relasi fundamental.
- iv. Mengonstruksi struktur polinomial pada multiplicative hyperring.
- v. Mempartisi multiplicative hyperring polinomial menggunakan relasi fundamental.
- vi. Mengonstruksi isomorfisma pada ring hasil partisi multiplicative hyperring polinomial.

Langkah-langkah dalam penelitian ini dapat digambarkan melalui diagram alur penelitian sebagai berikut:



Gambar 1 Diagram Alur Penelitian