

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori titik tetap adalah salah satu cabang penting dalam matematika yang berkaitan dengan eksistensi, sifat, dan aplikasi titik tetap dari suatu pemetaan. Titik tetap berarti titik yang dipetakan ke dirinya sendiri [1]. Pada tahun 1922 Banach [5] membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraktif dalam ruang metrik lengkap yang dikenal dengan teorema titik tetap Banach/ Prinsip Kontraksi Banach. Teorema titik tetap Banach menjamin adanya titik tetap tunggal pada pemetaan kontraktif dalam ruang metrik. Teorema titik tetap inilah yang menjadi dasar dalam pengembangan teori titik tetap oleh berbagai ilmuwan seperti pada tahun 1996 Kannan [7]. Dari banyaknya penelitian tentang titik tetap, dapat kita ketahui bahwa pengembangan teori titik tetap dapat dikembangkan ke dalam ruang nya, diantaranya ruang metrik, ruang metrik terdistribusi, ruang S-metrik, dll. selanjutnya Matthews [9] memperkenalkan ruang baru yang disebut ruang metrik terdistribusi. Sedghi, dkk [14] memperkenalkan ruang baru yang disebut ruang S-metrik. Selanjutnya Mlaiki, dkk [10] memperkenalkan ruang baru yang disebut ruang S_b -metrik.

Selain perkembangan dari ruang nya, beberapa peneliti menggeneralisasikan prinsip Banach dengan mengubah jenis kontraksi dan penambahan kondisi yang memenuhi keberadaan titik tetap seperti Pada tahun 2022, Thaibema, dkk [16] membuktikan teorema titik tetap menggunakan kontraksi rasional F pada ruang perluasan S-metrik. Pada tahun 2022. Salujam [13] membuktikan teorema titik tetap untuk kontraksi $F(S; T)$ di ruang perluasan S-metrik. Pada tahun 2023. Gangwar, dkk [4] membuktikan teorema titik tetap menggunakan kontraksi multivalued baru di ruang perluasan S-metrik. Pada tahun 2023. Ekiz, dkk [3] membuktikan titik tetap menggunakan ruang perluasan S-Metrik terkontrol. Pada tahun 2023. Duduka, dkk [2] membuktikan teorema titik tetap menggunakan pemetaan kontraktif hampir lemah yang umum (ψ, ϕ) di ruang perluasan S-metrik.

Berdasarkan penelitian pada tahun 2023. Reham, dkk [12] yang berjudul "Some Fixed Point Results in Extended S-Metric Space of Type (α, β) " memperkenalkan ruang baru dari ruang perluasan S-metrik yang disebut ruang perluasan S-metrik tipe (α, β) yang tidak terdistribusi dan penelitian ini membuktikan eksistensi dan keberadaan titik tetap tunggal pada kontraksi Banach. Namun tipe ini belum diperluas menjadi tipe (α, β, γ) atau tipe (Alfa, Beta, Gamma) dan masih belum terdistribusi. Oleh karena itu, dalam penelitian ini yang akan dilakukan adalah mendefinisikan ruang baru yang disebut ruang

perluasan S-metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi untuk membuktikan titik tetap tunggal pada ruang tersebut dengan menggunakan kontraksi banach dan digeneralisasikan kontraksinya serta mengaplikasikan teorema titik tetap tersebut untuk penentuan akar polinomial. Berdasarkan hal tersebut maka penulis mengambil judul **Titik Tetap Pada Ruang Perluasan S-Metrik Tipe (Alfa, Beta, Gamma) Terdislokasi Dan Aplikasinya**.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah

1. Bagaimana mendefinisikan ruang perluasan S-metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi?
2. Bagaimana membuktikan beberapa teorema titik tetap dalam ruang perluasan S-metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi?
3. Bagaimana mengaplikasikan teorema titik tetap tunggal pada ruang S-metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi?

1.3 Tujuan Penelitian dan Manfaat Penelitian

1. Tujuan penelitian ini adalah
 - a. Mendefinisikan ruang perluasan S-metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi.
 - b. Membuktikan beberapa teorema titik tetap dalam ruang perluasan S-metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi.
 - c. Mengaplikasikan teorema titik tetap tunggal pada ruang S-metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi.
2. Manfaat penelitian ini adalah
 - a. Sebagai pengembangan disiplin ilmu pengetahuan dalam hal ini teori tentang titik tetap dalam ruang metrik.
 - b. Teorema yang diperoleh dari penelitian ini diharapkan dapat diaplikasikan dalam penyelesaian penentuan akar polinomial.

1.4 Teori

Berikut ini akan dikemukakan beberapa definisi yang diperlukan dalam pembahasan.

1.4.1 Ruang Metrik dan Beberapa perluasannya

Pada Subbab 1.4.1 ini disajikan definisi ruang metrik dan beberapa perluasan ruang metrik beserta contohnya, yang akan digunakan dalam tesis ini.

Definisi 1.4.1 (Ruang Metrik) [1].

Misalkan X merupakan suatu himpunan tak kosong dan misalkan $r : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ merupakan fungsi dan untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

1. $r(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$,
2. $r(x, y) = r(y, x)$,
3. $r(x, z) \leq r(x, y) + r(y, z)$.

Maka r disebut metrik pada X dan pasangan (X, r) disebut ruang metrik.

Contoh 1.4.1. Misalkan $X = R$ dan $r : R \times R \rightarrow [0, +\infty)$ dengan $r(x, y) = \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+\sqrt{|x-y|}}$.

Akan ditunjukkan r adalah metrik pada X .

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z \in R$.

1. Misalkan $r(x, y) = 0$, maka $\frac{\sqrt{|x-y|}}{1+\sqrt{|x-y|}} = 0$, jika dan hanya jika $x = y$.

2. Jelas bahwa

$$r(x, y) = \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+\sqrt{|x-y|}} = \frac{\sqrt{|y-x|}}{1+\sqrt{|y-x|}} = r(y, x).$$

3. Akan ditunjukkan $r(x, z) \leq r(x, y) + r(y, z)$.

$$r(x, z) = \frac{\sqrt{|x-z|}}{1+\sqrt{|x-z|}}$$

Dengan menggunakan fungsi $f(t) = \frac{t}{1+t}$ yang monoton naik dan $\sqrt{|x-y+y-z|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} r(x, z) &= \frac{\sqrt{|x-y+y-z|}}{1+\sqrt{|x-y+y-z|}} \\ &\leq \frac{\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}}{1+\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}} \\ &\leq \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+\sqrt{|x-y|}} + \frac{\sqrt{|y-z|}}{1+\sqrt{|y-z|}} \\ &= r(x, y) + r(y, z). \end{aligned}$$

Jadi, $r(x, z) \leq r(x, y) + r(y, z)$.

Berdasarkan penjabaran di atas maka terbukti bahwa r merupakan metrik pada X dan (X, r) merupakan ruang metrik.

Definisi 1.4.2 (Ruang Metrik Terdislokasi) [9].

Misalkan X merupakan suatu himpunan tak kosong dan misalkan $r : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ merupakan fungsi dan untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

1. $r(x, y) = 0$, maka $x = y$,
2. $r(x, y) = r(y, x)$,

$$3. r(x, z) \leq r(x, y) + r(y, z).$$

Maka r disebut metrik terdislokasi pada X dan pasangan (X, r) disebut ruang metrik terdislokasi.

Jelas dari definisi ruang metrik bahwa setiap ruang metrik adalah ruang metrik terdislokasi tetapi kebalikannya belum tentu berlaku. Hal ini dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 1.4.2. Misalkan $X = R$, dan $r: R \times R \rightarrow [0, +\infty)$ dengan $r(x, y) = x^2 + y^2$. Akan ditunjukkan r adalah metrik terdislokasi pada X .

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z \in R$.

1. Misalkan $r(x, y) = 0$ maka $x^2 + y^2 = 0$ hanya berlaku untuk $x = y = 0$, namun jika $x = y$ belum tentu $r(x, y) = 0$.
2. Jelas $r(x, y) = r(y, x)$.
3. Akan ditunjukkan

$$r(x, y) \leq r(x, z) + r(z, y).$$

$$r(x, y) = x^2 + y^2 \leq x^2 + 2z^2 + y^2 = (x^2 + z^2) + (z^2 + y^2) = r(x, z) + r(z, y).$$

$$\text{Jadi, } r(x, y) \leq r(x, z) + r(z, y).$$

Berdasarkan penjabaran di atas maka terbukti bahwa r merupakan metrik terdislokasi pada X , namun r bukan metrik pada X .

Definisi 1.4.3 (Ruang S-Metrik) [14].

Misalkan X merupakan himpunan tak kosong dan Sebuah fungsi $r: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ disebut *S-metrik* jika untuk setiap $x, y, z, a \in X$ memenuhi

$$(i). \quad r(x, y, z) = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = y = z,$$

$$(ii). \quad r(x, y, z) \leq r(x, x, a) + r(y, y, a) + r(z, z, a).$$

dan pasangan (X, r) disebut *ruang S-metrik*.

Contoh 1.4.3 Misalkan $X = R$ dan $r: X^3 \rightarrow [0, \infty)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$r(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|.$$

Akan ditunjukkan r adalah *S-metrik* pada X .

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z, a \in R$.

1. Misalkan $r(x, y, z) = 0$, berarti $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 0$ jika dan hanya jika untuk $x = y = z$.
2. Akan ditunjukkan

$$r(x, y, z) \leq r(x, x, a) + r(y, y, a) + r(z, z, a).$$

$$\begin{aligned}
& r(x, x, a) + r(y, y, a) + r(z, z, a) \\
&= (|x - x| + |x - a| + |a - x|) + (|y - y| + |y - a| + |a - y|) \\
&\quad + (|z - z| + |z - a| + |a - z|) \\
&= |x - a| + |x - a| + |y - a| + |y - a| + |z - a| + |z - a| \\
&= |x - a| + |a - y| + |y - a| + |a - z| + |z - a| + |a - x| \\
&\geq |x - y| + |y - z| + |z - x| \\
&= r(x, y, z).
\end{aligned}$$

Jadi, $r(x, y, z) \leq r(x, x, a) + r(y, y, a) + r(z, z, a)$.

Berdasarkan penjabaran di atas maka terbukti bahwa r merupakan S -metrik pada X dan (X, r) merupakan ruang S -metrik

Definisi 1.4.4 (Ruang Perluasan S -metrik tipe (α, β) . [12].

Misalkan X merupakan himpunan tak kosong dan $\alpha, \beta: X^3 \rightarrow [1, \infty)$ merupakan fungsi. Suatu fungsi $r_{\alpha\beta}: X^3 \rightarrow [0, \infty)$ disebut *perluasan S -metrik tipe (α, β)* pada X , jika untuk setiap $x, y, z, a \in X$ memenuhi

$$(i). \quad r_{\alpha\beta}(x, y, z) = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = y = z,$$

$$(ii). \quad r_{\alpha\beta}(x, y, z) \leq \alpha(x, y, z)r_{\alpha\beta}(x, x, a) + \beta(x, y, z)r_{\alpha\beta}(y, y, a) + r_{\alpha\beta}(z, z, a).$$

dan pasangan $(X, r_{\alpha\beta})$ disebut *ruang perluasan S -metrik tipe (α, β)* .

Catatan:

Jika $\alpha, \beta = 1$, maka jelas setiap ruang S -metrik merupakan ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) . Namun, ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) belum tentu ruang S -metrik. Hal ini diperlihatkan pada contoh berikut:

Contoh 1.4.4 Misalkan $X = R$, dan $r_{\alpha\beta}: X^3 \rightarrow [0, \infty)$ yang didefinisikan sebagai

$$r_{\alpha\beta}(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|.$$

Selanjutnya definisikan $\alpha, \beta: X^3 \rightarrow [1, \infty)$ sebagai

$$\alpha(x, y, z) = 2 + |xyz|,$$

$$\beta(x, y, z) = 2 + |x - y - z|.$$

Akan ditunjukkan r adalah perluasan S -metrik tipe (α, β) pada X .

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z, a \in R$.

1. Misalkan $r_{\alpha\beta}(x, y, z) = 0$, berarti $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 0$ jika dan hanya jika untuk $x = y = z = 0$.

2. Akan ditunjukkan

$$r_{\alpha\beta}(x, y, z) \leq \alpha(x, y, z)r_{\alpha\beta}(x, x, a) + \beta(x, y, z)r_{\alpha\beta}(y, y, a) + r_{\alpha\beta}(z, z, a).$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \alpha(x, y, z)r_{\alpha\beta}(x, x, a) + \beta(x, y, z)r_{\alpha\beta}(y, y, a) + r_{\alpha\beta}(z, z, a) \\
&= (2 + |xyz|)(|x - x| + |x - a| + |a - x|) + (2 + |x - y - z|)(|y - y| + |y - a| \\
&\quad + |a - z|) + (|z - z| + |z - a| + |a - z|) \\
&\geq (|x - x| + |x - a| + |a - x|) + (|y - y| + |y - a| + |a - z|) \\
&\quad + (|z - z| + |z - a| + |a - z|) \\
&= |x - a| + |x - a| + |y - a| + |y - a| + |z - a| + |z - a| \\
&= |x - a| + |a - y| + |y - a| + |a - z| + |z - a| + |a - x| \\
&\geq |x - y| + |y - z| + |z - x| \\
&= r_{\alpha\beta}(x, y, z).
\end{aligned}$$

Jadi, $r_{\alpha\beta}(x, y, z) \leq \alpha(x, y, z)r_{\alpha\beta}(x, x, a) + \beta(x, y, z)r_{\alpha\beta}(y, y, a) + r_{\alpha\beta}(z, z, a)$.

Berdasarkan penjabaran di atas maka terbukti bahwa $r_{\alpha\beta}$ merupakan perluasan S -metrik tipe (α, β) pada X dan $(X, r_{\alpha\beta})$ merupakan ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) , namun r bukan S -metrik pada X .

1.4.2 Titik Tetap dan Fungsi Kontraksi

Pada Subbab 1.4.2 akan diberikan Definisi dan contoh dari Titik tetap pemetaan kontraktif di dalam ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) .

Definisi 1.4.5 (Titik Tetap) [2].

Misalkan X adalah himpunan tak kosong. $x \in X$ disebut titik tetap dari fungsi $T: X \rightarrow X$ jika $Tx = x$.

Definisi 1.4.6 (Kontraksi Banach pada Ruang Perluasan S -Metrik Tipe (α, β))[12].

Misalkan $(X, r_{\alpha\beta})$ merupakan ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) . Fungsi $T: X \rightarrow X$ dikatakan kontraksi jika terdapat konstan $\lambda \in (0, 1)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

$$r_{\alpha\beta}(Tx, Ty, Tz) \leq \lambda r_{\alpha\beta}(x, y, z).$$

Contoh 1.4.6 Misalkan $X = \mathbb{R}$, dan $r_{\alpha\beta}: X^3 \rightarrow [0, \infty)$ yang didefinisikan sebagai

$$r_{\alpha\beta}(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|.$$

Dari contoh 1.4.4 $r_{\alpha\beta}$ adalah perluasan S -metrik tipe (α, β) .

Misalkan fungsi $T: X \rightarrow X$ yang didefinisikan $Tx = \frac{1}{4}x$.

Akan ditunjukkan T fungsi kontraksi banach.

Bukti:

$$r_{\alpha\beta}(Tx, Ty, Tz) = r_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}y, \frac{1}{4}z\right),$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left| \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \right| + \left| \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z \right| + \left| \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}x \right| \right), \\
&= \frac{1}{4}|x - y| + \frac{1}{4}|y - z| + \frac{1}{4}|z - x|, \\
&= \frac{1}{4}(|x - y| + |y - z| + |z - x|), \\
&< \frac{1}{2}r_{\alpha\beta}(x, y, z).
\end{aligned}$$

Maka terbukti T merupakan fungsi kontraksi banach dengan $\lambda = \frac{1}{2}$.

Teorema 1.4.1[12] Misalkan $(X, r_{\alpha\beta})$ merupakan ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) lengkap. Fungsi $T : X \rightarrow X$ adalah fungsi kontraksi banach seperti pada Definisi 1.4.6. Maka T mempunyai titik tetap yang tunggal di dalam X .

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

Jenis yang digunakan adalah studi kepustakaan yaitu mengumpulkan berbagai informasi yang berkaitan dengan topik atau masalah yang dibahas dalam penelitian. Informasi tersebut dapat berupa definisi maupun teorema-teorema yang berkaitan dengan perkembangan ruang metrik maupun titik tetap yang diperoleh melalui buku, jurnal, dan sumber-sumber lain.

2.2 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Universitas Hassanuddin dengan waktu penelitian Februari-November 2024.

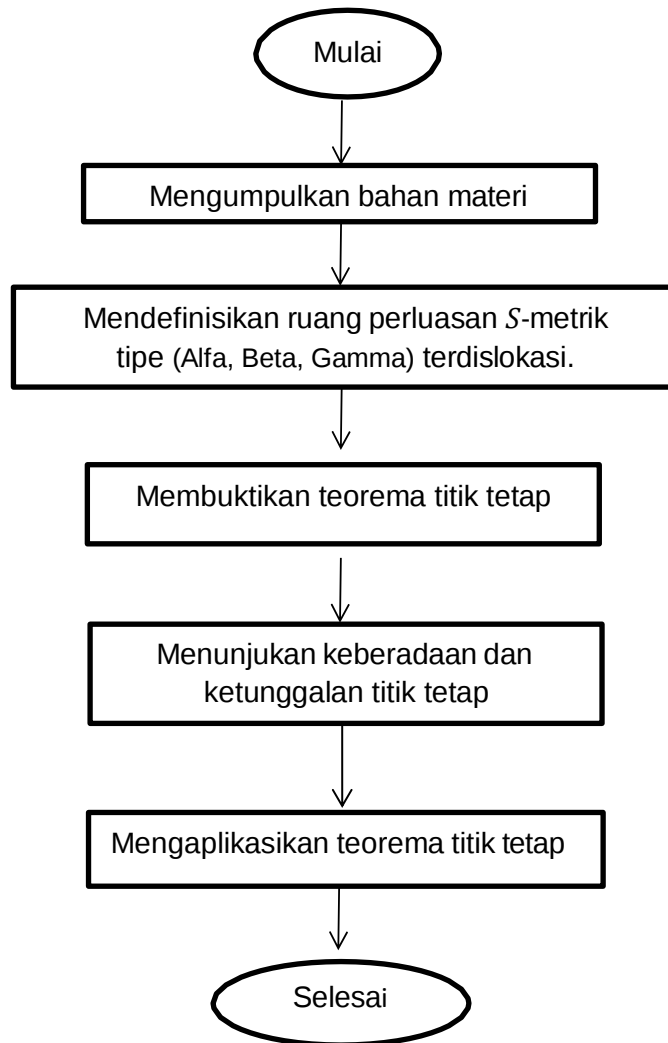
2.3 Langkah-Langkah Penelitian

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Mengumpulkan bahan atau materi yang berkaitan dengan titik tetap di ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) , ruang metrik terdislokasi dan teori titik tetap yang menggunakan kontraksi banach.
- b. Mendefinisikan ruang metrik yang terbaru dengan menggabungkan ruang perluasan S -metrik tipe (α, β) dan ruang metrik terdislokasi.
- c. Membuktikan beberapa teorema titik tetap dalam ruang perluasan S -metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi.
- d. Menunjukkan keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang perluasan S -metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi.
- e. Mengaplikasikan teorema titik tetap tunggal pada ruang perluasan S -metrik tipe (Alfa, Beta, Gamma) terdislokasi untuk penyelesaian penentuan akar polinomial.

2.4 Alur Kerja

Alur kerja dalam penelitian ini ditungkan dalam bentuk diagram air sebagai berikut:



Gambar 2.1. Flowchart Langkah-langkah penelitian