

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Setiap individu memerlukan penghasilan untuk memenuhi kebutuhan hidupnya. Selama masih berada di usia produktif, seseorang dapat memenuhi kebutuhan hidupnya melalui pekerjaan. Namun, setiap individu pada akhirnya akan mencapai masa pensiun, di mana aktivitas bekerja harus dihentikan, sehingga sumber penghasilan yang mendukung kesejahteraan pribadi dan keluarga pun terhenti. Salah satu solusi terbaik agar seorang pekerja tetap memperoleh penghasilan setelah pensiun adalah dengan mengikuti program dana pensiun. Program ini dirancang untuk merencanakan masa depan dan bertujuan meningkatkan kesejahteraan pekerja yang telah pensiun, dengan menyediakan manfaat berupa uang atau dana pensiun (Izzati & Kartikasari, 2022).

Menurut Undang-Undang Presiden Republik Indonesia No 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun, Dana Pensiun adalah badan hukum yang mengelola dan menjalankan program yang menjanjikan manfaat pensiun yang pembayarannya disesuaikan dengan umur tertentu. Program pendanaan pensiun bertujuan untuk menjamin ketersediaan dana yang cukup untuk memenuhi manfaat pensiun, khususnya bagi peserta dan pihak yang berhak menerima manfaat pensiun serta manfaat lainnya, dengan cara pengumpulan dana yang terstruktur dan tepat waktu. Dana yang dikumpulkan dalam pendanaan pensiun disebut dengan *normal cost*. *Normal cost* merupakan pembayaran tahunan yang dilakukan oleh pensiunan untuk membantu memenuhi biaya manfaat pensiun. Sedangkan manfaat pensiun adalah jumlah dana yang harus terkumpul pada waktu tertentu untuk memastikan pembayaran manfaat pensiun di masa depan (Nursal, 2023).

Program dana pensiun telah banyak diterapkan oleh berbagai instansi dan perusahaan, salah satu perusahaan besar yang menerapkan program dana pensiun adalah Badan Usaha Milik Negara (BUMN). Skema pensiun yang digunakan oleh BUMN dikelompokkan menjadi dua kategori yaitu, skema Dana Pensiun Lembaga Keuangan (DPLK) yang bekerja sama dengan lembaga keuangan seperti bank atau perusahaan asuransi dan skema Dana Pensiun Pemberi Kerja (DPPK) yang diselenggarakan oleh pemberi kerja dimana pemberi kerja berperan sebagai pengelola dana pensiun dan bertanggung jawab terhadap pemenuhan manfaat pensiun. Pelaksanaan program dana pensiun tidak semua BUMN memiliki skema pensiun yang sama seperti pada PT Pertamina, PT Perusahaan Listrik Negara dan PT Telkom Indonesia yang memiliki skema pensiun yang berbeda. Dalam penelitian ini, fokus diarahkan pada program dana pensiun PT Pertamina, sebagai salah satu perusahaan terbesar di Indonesia memiliki tanggung jawab besar dalam memastikan kesejahteraan karyawan melalui pengelolaan dana pensiun.

Pengelolaan dana pensiun di PT Pertamina menggunakan skema Dana Pensiun Pemberi Kerja (DPPK) yang diselenggarakan melalui metode Program Pensiun Manfaat Pasti (PPMP) yang diberikan langsung oleh Dana Pensiun Pertamina (DP Pertamina). Penerapan skema ini memungkinkan PT Pertamina menentukan kebijakan yang lebih optimal dalam pengelolaan dana pensiun. Namun, dalam pelaksanaan dana pensiun di PT Pertamina masih menghadapi berbagai permasalahan yang perlu diatasi, permasalahan terkait program dana pensiun disebabkan karena beberapa faktor, antara lain kelalaian pendiri, rendahnya kualitas sumber daya manusia, tata kelola investasi yang tidak berjalan optimal, sampai tunggakan pembayaran iuran akibat tidak lancarnya pembayaran oleh pemberi kerja (Ginting, 2023). Otoritas Jasa Keuangan (OJK) mengidentifikasi beberapa penyebab dana pensiun yang masuk dalam kategori tingkat pendanaan ketiga. Pertama, pemberi kerja tidak memenuhi kewajiban untuk menyetor premi. Hal ini terjadi meskipun dana pensiun telah menerima iuran dari peserta. Total iuran yang belum disetorkan oleh pemberi kerja mencapai Rp3,61 triliun. Kedua, tingkat bunga aktuarial yang ditetapkan terlalu tinggi, sehingga dana pensiun mencari investasi dengan imbal hasil yang setara dengan bunga tersebut. Ketiga, tingkat imbal hasil pada dana pensiun BUMN tergolong rendah, bahkan di bawah rata-rata pasar sebesar enam persen (OJK, 2023).

Optimalisasi program dana pensiun dibutuhkan agar perencanaan dan pengelolaan dana pensiun dapat memenuhi kewajiban jangka panjangnya. Salah satu aspek penting dalam pengelolaan dana pensiun adalah perhitungan valuasi aktuarial, yang digunakan untuk menentukan jumlah kewajiban yang harus dicadangkan guna memenuhi manfaat pensiun di masa depan. Pada program dana pensiun, salah satu aspek penting yang perlu diperhatikan adalah metode valuasi aktuarial (*actuarial cost method*). Metode ini digunakan untuk menentukan besaran iuran normal serta kewajiban aktuarial (*actuarial liability*) yang harus dipenuhi dalam sebuah program dana pensiun (Rembet & Sari, dkk., 2023). Metode valuasi aktuarial menurut Standar Praktik Aktuarial Dana Pensiun (SPA-DP) No. 3.02 menjelaskan bahwa, secara umum, metode valuasi aktuarial terbagi menjadi dua kelompok utama, yaitu *Accrued Benefit Cost Method* dan *Projected Benefit Cost Method*. Metode yang termasuk dalam kelompok *Accrued Benefit Cost Method* adalah *Projected Unit Credit*, sedangkan kelompok *Projected Benefit Cost Method* mencakup metode *Attained Age Normal*, *Entry Age Normal*, dan *Individual Level Premium* (PAI, 2019).

Beberapa penelitian telah membandingkan pendanaan pensiun dengan menggunakan metode *Accrued Benefit Cost* dan *Projected Benefit Cost*. Seperti yang dilakukan oleh Wilandari, dkk. (2016), membandingkan perhitungan dana pensiun menggunakan metode *Attained Age Normal* dan *Projected Unit Credit*. Sementara itu, Permana, dkk. (2016) menggunakan metode *Projected Unit Credit* dan *Entry Age Normal*. Wardhani, dkk. (2014) juga melakukan penelitian dengan

membandingkan metode *Projected Unit Credit* dan *Individual Level Premium*. Penelitian terkait penggunaan *Projected Benefit Cost* telah dilakukan oleh Izzati & Kartikasari (2022), yang menghitung Implementasi Metode Perhitungan Aktuaria Program Dana Pensiun Menggunakan Flask. Penelitian-penelitian tersebut memberikan kesimpulan bahwa metode *Projected Benefit Cost* lebih baik dibandingkan dengan metode *Accrued Benefit Cost*. Berdasarkan penelitian tersebut, penelitian ini dilakukan dengan menggunakan *Projected Benefit Cost Method*.

Valuasi aktuaria melibatkan proyeksi manfaat pensiun berdasarkan asumsi-asumsi tertentu, seperti umur peserta, tingkat gaji, dan, yang paling penting, suku bunga. Suku bunga berperan sebagai faktor diskonto yang sangat memengaruhi nilai kini dari kewajiban jangka panjang. Pada dana pensiun BUMN PT Pertamina terdapat penetapan tingkat bunga aktuaria yang terlalu tinggi, sehingga sulit untuk melakukan penentuan investasi dengan imbal hasil yang setara. Oleh karena itu, pemilihan model suku bunga yang tepat sangat penting dalam menghasilkan perhitungan aktuaria yang realistis dan dapat diandalkan.

Perhitungan valuasi aktuaria pada penelitian sebelumnya masih mengasumsikan tingkat suku bunga tetap sepanjang waktu, padahal pada kenyataannya, suku bunga tidak bersifat statis. Hal ini menjadi dasar perlunya penggunaan tingkat suku bunga stokastik untuk memperkirakan tingkat suku bunga dengan memperhitungkan fluktuasi yang terjadi pada tingkat suku bunga. Salah satu model stokastik yang banyak digunakan dalam keuangan dan aktuaria adalah *Hull-White Model*. Model suku bunga ini termasuk dalam kategori suku bunga *no-arbitrage* yang dapat disesuaikan dengan struktur suku bunga yang berlaku saat ini. *Hull-White* model juga dikenal sebagai model *Hull-White Extended Vasicek*, karena model ini merupakan pengembangan dari model *Vasicek* (Hull, 1946). Model *Hull-White* dipilih karena fleksibilitasnya dalam menyesuaikan dengan struktur suku bunga saat ini dan kemampuannya untuk memodelkan fluktuasi suku bunga secara stokastik. Namun, penerapan metode ini masih hanya terbatas pada penentuan suku bunga opsi dan suku bunga obligasi, sehingga perlu adanya pengembangan lebih lanjut dalam penerapannya.

Berdasarkan uraian latar belakang dan penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian yang berjudul “**Penerapan Suku Bunga Stokastik *Hull-White Model* dalam Perhitungan Valuasi Aktuaria Program Dana Pensiun pada PT Pertamina (Persero)**”. Penelitian ini diharapkan dapat berkontribusi dalam pengelola dana pensiun dan pengambil keputusan untuk mengoptimalkan strategi pengelolaan dana pensiun serta meningkatkan akurasi perhitungan manfaat pensiun untuk PT Pertamina (Persero).

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana tingkat akurasi simulasi suku bunga stokastik *Hull-White* model dalam perhitungan suku bunga pada valuasi Aktuaria?
2. Bagaimana hasil perhitungan besaran *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* menggunakan *Projected Benefit Cost Method* program dana pensiun dengan metode *Attained Age Normal*, *Entry Age Normal*, dan *Individual Level Premium* pada PT Pertamina (Persero) dengan tingkat suku bunga stokastik *Hull-White* model?
3. Bagaimana metode valuasi aktuaria yang paling sesuai dalam mengoptimalkan strategi pengelolaan dana pensiun PT Pertamina (Persero) dan pengaruh tingkat suku bunga stokastik *Hull-White* model?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengetahui tingkat akurasi simulasi suku bunga stokastik *Hull-White* model dalam perhitungan suku bunga pada valuasi Aktuaria.
2. Mengetahui hasil perhitungan besaran *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* menggunakan *Projected Benefit Cost Method* program dana pensiun dengan metode *Attained Age Normal*, *Entry Age Normal*, dan *Individual Level Premium* pada PT Pertamina (Persero) dengan tingkat suku bunga stokastik *Hull-White* model.
3. Mengetahui metode valuasi aktuaria yang paling sesuai dalam mengoptimalkan strategi pengelolaan dana pensiun PT Pertamina (Persero) dan pengaruh tingkat suku bunga stokastik *Hull-White* model.

1.4 Landasan Teori

1.4.1 Dana Pensiun

Dana pensiun merupakan sebuah rencana keuangan yang bertujuan memberikan manfaat di masa depan melalui pembayaran iuran pada program pensiun. Program ini diatur berdasarkan Undang-Undang Nomor 11 Tahun 1992 tentang dana pensiun, yang mengharuskan dana pensiun berbentuk badan hukum dan bertugas mengelola dana peserta untuk memberikan manfaat saat peserta telah memasuki masa pensiun (Sanyoto, 2023). Program dana pensiun bertujuan untuk memberikan perlindungan sosial dan keuangan kepada pekerja atau karyawan setelah mereka memasuki masa pensiun.

Dana pensiun ditetapkan sebagai badan hukum sesuai dengan Pasal 1 angka 1 Undang-Undang Dana Pensiun, yang menyatakan bahwa dana pensiun adalah badan hukum yang mengelola program dengan janji memberikan manfaat pensiun kepada pesertanya. Status hukum dana pensiun sebagai badan hukum yang menyelenggarakan program pensiun telah diakui sejak diberlakukannya undang-undang dana pensiun. Hal ini menunjukkan pengakuan negara terhadap keberadaan dana pensiun di Indonesia (Marwa, 2020). Dana pensiun merupakan entitas

berbadan hukum yang bertugas mengelola dan menyelenggarakan program pensiun yang menjamin pemberian manfaat pensiun kepada para pesertanya. Tujuan utamanya adalah menyediakan perlindungan sosial dan finansial bagi pekerja atau karyawan saat mereka memasuki masa pensiun.

1.4.1.1 Jenis Program Dana Pensiun

Menurut Undang-Undang Nomor 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun, terdapat dua jenis pendanaan pensiun yang berlaku di Indonesia. Berdasarkan jumlah dan saat pembayaran iuran (Nuhung., dkk, 2020):

- a. Program Pensiun Manfaat Pasti (PPMP). Program pensiun manfaat pasti, atau yang sering disebut *defined benefit plan*, adalah program pensiun yang menetapkan formula untuk menentukan besaran manfaat yang akan diterima oleh peserta saat mencapai usia pensiun. Dalam program ini, manfaat pensiun yang diterima peserta ditetapkan terlebih dahulu berdasarkan suatu rumusan, yang umumnya dipengaruhi oleh variabel seperti masa kerja dan penghasilan peserta. Aktuaris kemudian menghitung kontribusi yang harus dibayarkan, di mana kontribusi perusahaan biasanya lebih besar dibandingkan kontribusi dari peserta. Risiko investasi dalam program ini sepenuhnya ditanggung oleh perusahaan.
- b. Program Pensiun Iuran Pasti (PPIP). Program pensiun iuran pasti, atau *defined contribution plan*, adalah program pensiun yang menetapkan besaran iuran yang dibayarkan oleh peserta (pegawai) dan perusahaan (pemberi kerja). Manfaat pensiun yang akan diterima oleh peserta dihitung berdasarkan akumulasi dari iuran yang telah dibayarkan, ditambah dengan hasil pengembangan atau investasinya.

1.4.1.2 Jenis Manfaat Pensiun

Menurut Undang-Undang Nomor 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun, manfaat pensiun adalah pembayaran berkala yang wajib diberikan oleh penyelenggara kepada peserta pensiun sesuai dengan waktu dan mekanisme yang telah diatur dalam peraturan dana pensiun. Terdapat empat jenis manfaat pensiun, antara lain (Miyasari, 2023):

- a. Manfaat pensiun normal, yaitu manfaat pensiun yang diberikan kepada peserta setelah mencapai atau melewati usia pensiun normal.
- b. Manfaat pensiun dipercepat, yaitu manfaat pensiun yang dibayarkan kepada peserta pada usia tertentu sebelum mencapai usia pensiun normal.
- c. Manfaat pensiun cacat, yaitu manfaat pensiun yang diberikan kepada peserta yang mengalami disabilitas atau cacat.
- d. Manfaat pensiun tertunda, yaitu manfaat yang diberikan kepada peserta yang berhenti bekerja sebelum mencapai usia pensiun normal. Pembayaran manfaat dilakukan ketika peserta mencapai usia pensiun normal sesuai ketentuan dalam peraturan dana pensiun.

1.4.2 Integral Ito

Proses Ito merupakan proses *Wiener* umum dimana untuk parameter a dan b adalah fungsi dari nilai variabel yang bersangkutan x dan waktu t , yaitu (Hull, 1945):

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW(t) \quad (1)$$

Perubahan pada interval waktu yang kecil antara t dan $t + \Delta t$, variabelnya berubah dari x ke $x + \Delta x$, dimana

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

Hubungan ini melibatkan estimasi dalam skala kecil. Diasumsikan bahwa tingkat drift dan tingkat varians x bersifat konstan, dengan nilai yang tetap pada waktu t , selama selang waktu antara t dan $t + \Delta t$ (Hull, 1946).

Bentuk umum persamaan diferensial stokastik sebagai berikut:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (3)$$

Atau bisa dibuat dalam bentuk integral stokastik

$$\begin{aligned} \int_0^t dX(s) &= \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s \\ X(t) - X(0) &= \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s \\ X(t) &= X(0) + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s \end{aligned}$$

Pada istilah Integral Ito terdapat Ito *Isometri*, yaitu salah satu konsep kunci dari integral stokastik Ito adalah kemampuannya digunakan untuk menghitung varians dari variabel acak yang dinyatakan dalam bentuk integral Ito. Ini menjadi salah satu aplikasi utama dalam teori tersebut. Terdapat $W: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ menunjukkan proses *Wiener* bernilai *real kanonik* yang ditentukan hingga waktu $T > 0$, dan terdapat $X: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ menjadi proses stokastik yang sesuai dengan filtrasi alami dari proses *Wiener*, Ito *Isometri* dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X(t)dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X(t)^2 dt \right] \quad (4)$$

dimana menunjukkan ekspektasi sehubungan dengan ukuran klasik

1.4.3 Suku Bunga *Hull-White*

Model suku bunga *Hull-white* merupakan model suku bunga masa depan dan termasuk dalam suku bunga *no-arbitrage*, yang mampu disesuaikan dengan struktur suku bunga terkini. Model *Hull-White* juga dikenal sebagai *Hull-White Extended Vasicek* karena merupakan pengembangan dari model *Vasicek*. Persamaan model *Hull-White* dituliskan sebagai berikut (Hull, 1946):

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW(t) \quad (5)$$

atau

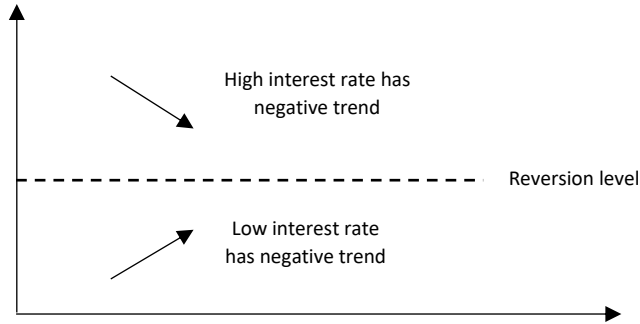
$$dr = a \left[\frac{\theta(t)}{a} - r \right] dt + \sigma dW(t) \quad (6)$$

dimana:

- r : suku bunga
- a : kelajuan r menuju level θ
- θ : level rata-rata (*reversion level*)
- σ : volatilitas tingkat suku bunga.
- $W(t)$: Proses *Wiener* (gerak *Brown*)

Pemodelan dengan menggunakan *Hull-White* model mensimulasikan dengan berfokus pada *mean reversion*, yaitu kecenderungan nilai $r(t)$ berada di sekitar level rata-rata atau dapat dikatakan bahwa tingkat suku bunga bergerak dalam range terbatas. Faktor drift model *Hull-White* model adalah $(\theta - ar(t))$. Oleh karena itu, suku bunga adalah *mean reversion* dengan mean jangka panjang θ . Ketika suku bunga mendekati nol, volatilitas σ juga cenderung mendekati nol, yang menghilangkan pengaruh acak. Akibatnya, suku bunga tetap berada pada nilai positif. Ketika tingkat bunga tinggi maka volatilitasnya tinggi dan ini adalah sifat yang diinginkan karena dapat membantu mencerminkan dinamika pasar yang lebih realisti (Zeytun dan Gupta, 2007).

Sebuah argumen ekonomi yang mendukung konsep *mean reversion* menyatakan bahwa ketika suku bunga berada pada level tinggi, aktivitas ekonomi cenderung melambat, yang menyebabkan penurunan permintaan pinjaman dari peminjam. Akibatnya, suku bunga akan kembali menuju nilai keseimbangannya. Sebaliknya, jika suku bunga rendah, permintaan pinjaman cenderung meningkat. Teori *mean reversion* sangat cocok untuk menjelaskan perilaku tingkat suku bunga, karena tanpa teori ini, suku bunga dapat terus meningkat secara permanen seperti harga saham. Namun, dalam kenyataannya, tingkat suku bunga tidak bersifat permanen dan cenderung bergerak naik atau turun dalam periode tertentu (Choliqa, 2022).



Gambar 1. *Mean Reversion*

Gambar 1. menunjukkan terkait dengan *mean reversion*, ketika suku bunga tinggi, ekonomi akan cenderung melambat. Oleh karena itu, tingkat suku bunga akan bergerak kembali menuju keseimbangan. Sebaliknya, saat suku bunga rendah, permintaan dana dari peminjam cenderung meningkat. Akibatnya, suku bunga akan kembali menyesuaikan menuju nilai keseimbangannya.

Yunizar (2019) berhasil mengembangkan solusi rekursif untuk model suku bunga menggunakan metode *Jackknife*. Model *Hull-White* yang diwakili oleh persamaan (1) merupakan jenis persamaan diferensial stokastik. Penyelesaian model *Hull-White* ini diperoleh dengan terlebih dahulu mengubahnya menjadi bentuk persamaan berikut:

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\theta - ar(t))dt + \sigma dW(t) \\ &= \theta dt - ar(t)dt + \sigma dW(t) \\ dr(t) + ar(t)dt &= \theta dt + \sigma dW(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Untuk menentukan solusi dari kedua ruas pada persamaan (7) dilakukan dengan mengalikan kedua ruas dengan e^{at} , sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} e^{at}(dr(t) + ar(t)dt) &= e^{at}(\theta dt + \sigma dW(t)) \\ e^{at}dr(t) + ae^{at}r(t)dt &= \theta e^{at}dt + \sigma e^{at}dW(t) \end{aligned}$$

Mengikuti aturan dalam penentuan turunan, maka persamaan (7) dimisalkan terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} u &= e^{at} \\ du &= e^{at}dt \\ v &= r(t) \\ dv &= dr(t) \\ d(u \cdot v) &= d(e^{at}r(t)) \end{aligned}$$

Sehingga persamaannya akan berubah menjadi sebagai berikut:

$$d(e^{at}r(t)) = \theta e^{at}dt + \sigma e^{at}dW(t) \quad (8)$$

Kemudian persamaan (4) pada kedua ruas diintegrasikan dengan batas $[0, t]$ yaitu:

$$\begin{aligned}
\int_0^t d(e^{at}r(s)) &= \int_0^t \theta e^{at} ds + \int_0^t \sigma e^{at} dW(s) \\
e^{at}r(t) - e^{a(0)}r(0) &= \int_0^t \theta e^{at} ds + \int_0^t \sigma e^{at} dW(s) \\
e^{at}r(t) - 1 \cdot r(0) &= \int_0^t \theta e^{at} ds + \int_0^t \sigma e^{at} dW(s) \\
e^{at}r(t) &= r(0) + \theta \int_0^t e^{at} ds + \sigma \int_0^t e^{at} dW(s) \\
r(t) &= e^{-at} \left(r(0) + \theta \int_0^t e^{at} ds + \sigma \int_0^t e^{at} dW(s) \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned}
r(t) &= r(0)e^{-at} + \theta e^{-at} \int_0^t e^{at} ds + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{at} dW(s) \\
&= r(0)e^{-at} + \theta e^{-at} \left(\frac{1}{a} e^{at} - \frac{1}{a} e^{a0} \right) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{at} dW(s) \\
&= r(0)e^{-at} + \left(\theta e^{-at} \frac{1}{a} e^{at} - \frac{1}{a} \theta e^{-at} \right) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{at} dW(s) \\
&= r(0)e^{-at} + \left(\theta \frac{1}{a} - \theta \frac{1}{a} e^{-at} \right) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{at} dW(s) \\
&= r(0)e^{-at} + \frac{\theta}{a} (1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{at} dW(s)
\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh solusi rekursif dari model *Hull-White* adalah,

$$r(t) = r(0)e^{-at} + \frac{\theta}{a} (1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{at} dW(s) \tag{10}$$

1.4.4 Metode *Euler-Maruyama*

Metode *Euler-Maruyama* atau juga dikenal sebagai metode *Euler*, digunakan untuk menghitung solusi numerik perkiraan dari persamaan diferensial stokastik (SDE). Metode ini merupakan pengembangan sederhana dari metode *Euler* yang diterapkan pada persamaan diferensial biasa agar dapat digunakan pada persamaan diferensial stokastik. Dinamai sesuai dengan Leonhard Euler dan Gisiro Maruyama, metode ini

memiliki keterbatasan karena generalisasi serupa tidak dapat diterapkan pada metode deterministik secara umum (Allen, 2010).

Rumus umum dari metode *Euler-maruyama* adalah sebagai berikut:

$$X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i)\Delta t + \sigma(t_i, X_i)\sqrt{\Delta t}Z_i \quad (11)$$

dimana, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ dan $Z_i \sim N(0,1)$

Berdasarkan persamaan, metode *Euler-Maruyama* memperkirakan $X(t)$ berada pada titik pasti t_i , $X(t_i) \approx X_i$ pada interval $[0, T]$. Pengaplikasian ke dalam persamaan diferensial stokastik akan diperoleh sebagai berikut:

$$dX(t) = dW(t)$$

dimana $X(0) = W(0) = 0$. Solusi dari $X(t) = W(t)$ adalah proses *Winier*. Metode *Euler-Maruyama* untuk persamaan stokastik adalah (Allen, 2010):

$$X_{i+1} = X_i + \sqrt{\Delta t} Z_i$$

Berdasarkan pada persamaan (1) akan dilakukan diskritasi pada persamaan model *Hull-White* dengan menggunakan metode *Euler* seperti berikut:

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta x$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

sehingga diperoleh

$$dr(t) = (\theta - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\Delta t} &= (\theta - ar(t_i)) + \sigma \frac{\Delta W_i}{\Delta t} \\ r(t_{i+1}) - r(t_i) &= (\theta - ar(t_i))\Delta t + \sigma \Delta W_i \end{aligned} \quad (12)$$

dimana $i = 0, \dots, n-1$, dan $\sqrt{\Delta t}Z_i$ berdistribusi sama dengan $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$. Persamaan (7) dapat di transformasikan ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(t_{i+1}) &= r(t_i) + (\theta - ar(t_i))\Delta t + \sigma \Delta W(t) \\ &= (1 - a\Delta t)r(t_i) + \theta\Delta t + \sigma \Delta W_i \end{aligned} \quad (13)$$

1.4.5 Estimasi Paramater menggunakan Metode *Jackknife*

Metode *Jackknife* pertama kali diperkenalkan oleh Quenouille pada tahun 1949 dengan tujuan untuk mengestimasi bias, sedangkan penggunaan *Jackknife* untuk menduga standar deviasi diperkenalkan oleh Tukey pada tahun 1958. Prinsip dasar dari metode *Jackknife* adalah menghilangkan satu data dalam satu waktu dan

melakukan perhitungan ulang sebanyak jumlah total sampel yang tersedia. Adapun prosedur dari metode *Jackknife* untuk estimasi parameter dengan menghilangkan satu data dapat dijelaskan sebagai berikut (Sprenst, 1989):

Pengambilan sample sebanyak $n - 1$ secara random, dimana

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1j} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nj} \end{bmatrix} \text{ merupakan sampel yang sebenarnya.}$$

Pada *Jackknife* akan dihilangkan satu baris dari vektor, untuk *Jackknife* yang menghilangkan baris pertama pada vektor sebagai berikut:

$$y^1 = \begin{bmatrix} y_2^1 \\ y_3^1 \\ \vdots \\ y_n^1 \end{bmatrix} \text{ dan } X^1 = \begin{bmatrix} 1 & X_{11}^1 & X_{12}^1 & \cdots & X_{1j}^1 \\ 1 & X_{21}^1 & X_{22}^1 & \cdots & X_{2j}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1}^1 & X_{n2}^1 & \cdots & X_{nj}^1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Data yang sudah dihilangkan baris pertama pada vektor disebut data *Jackknife* dan dapat dinotasikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$y^i = \begin{bmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \vdots \\ y_n^i \end{bmatrix}, X^i = \begin{bmatrix} 1 & X_{11}^i & X_{12}^i & \cdots & X_{1j}^i \\ 1 & X_{21}^i & X_{22}^i & \cdots & X_{2j}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{ni}^i & X_{n2}^i & \cdots & X_{nj}^i \end{bmatrix} \text{ dan } e^i = \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ \vdots \\ e_n^i \end{bmatrix}$$

dimana:

y^i : matriks dari variabel terikat data yang sudah dihilangkan baris ke- i yang berukuran $(n - 1) \times 1$

X^i : matriks dari variabel bebas data yang sudah dihilangkan baris ke- i yang berukuran $(n - 1) \times (j + 1)$

y^i : matriks dari variabel galat acak data yang sudah dihilangkan baris ke- i yang berukuran $(n - 1) \times 1$

Estimasi parameter $\hat{\beta}^i$ dicari menggunakan metode kuadrat terkecil guna untuk memperoleh nilai minimum jumlah kuadrat *error* sehingga diperoleh nilai estimasi $\hat{\beta}^i$ sebagai berikut:

$$\hat{\beta}^i = (X^{i'} X^i)^{-1} X^{i'} y^i \quad (15)$$

Langkah selanjutnya, akan dilakukan pengambilan sampel yang sebenarnya kemudian baris kedua dihilangkan dan diestimasi parameternya menggunakan persamaan (9) secara analog diterapkan pada baris ketiga hingga ke- n . Maka diperoleh parameter *Jackknife* $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\beta}^3, \dots, \hat{\beta}^n$. Estimasi parameter *Jackknife*

didapatkan dengan menentukan nilai rata-rata pada setiap parameter $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\beta}^3, \dots, \hat{\beta}^n$ sebagai berikut (Anriani, 2017):

$$\hat{\beta} = \sum_i^n \frac{\hat{\beta}^i}{n} \quad (16)$$

dimana:

$\hat{\beta}$: estimasi dari metode *Jackknife*

$\hat{\beta}^i$: estimasi ke- i dari metode *Jackknife*

n : banyaknya data

Proses estimasi parameter model *Hull-White* menggunakan metode *Jackknife* dilakukan dengan cara menghapus satu pengamatan dari data atau menghilangkan baris pertama dari vektor. Menggunakan persamaan (13)

$$r(t_{i+1}) = (1 - a\Delta t)r(t_i) + \theta\Delta t + \sigma\Delta W_i$$

dimisalkan terlebih dahulu.

$$y_t = r(t_{i+1}) \quad (17)$$

$$a_0 = \theta\Delta t \quad (18)$$

$$y_{t-1} = r(t_i) \quad (19)$$

$$a_1 = (1 - a\Delta t) \quad (20)$$

$$\varepsilon_{t-1} = \sigma\Delta W_i \quad (21)$$

Selanjutnya diubah kedalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \quad (22)$$

Berdasarkan persamaan (17) – (21) dan persamaan (17) dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu:

$$y_2 = a_0 + a_1 y_1 + \varepsilon_1$$

$$y_3 = a_0 + a_1 y_2 + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_0 + a_1 y_{n-1} + \varepsilon_n$$

Dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \sigma\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix} \quad (23)$$

dilakukan pemisalan

$$y = \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \sigma\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix}$$

Sehingga model matriks persamaan (23) dapat disederhanakan menjadi:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (24)$$

Proses untuk melakukan estimasi parameter model *Hull-White* dengan menggunakan metode *Jackknife* adalah dengan menghilangkan satu pengamatan dari data atau menghilangkan baris pertama dari vector. Langkah ini akan dilakukan pengulangan sebanyak jumlah yang ada (sahinler dan Topus, 2007). Langkah pertama melakukan estimasi parameter *Jackknife* yaitu menghapus satu baris ke- i , dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Untuk $i = 1$, dari persamaan (1.24) diperoleh:

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Misalkan

$$y^1 = \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix}$$

sehingga model linier pada persamaan (25) dalam metode *Jackknife* dapat disederhanakan menjadi seperti berikut:

$$y^i = X^i \beta^i + \varepsilon^i \quad (26)$$

Berdasarkan persamaan (15), maka diperoleh penduga parameter dari $\hat{\beta}^i$ yaitu:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^i &= (X^{i'X^i})^{-1} X^{i'} y^i \\ &= \left(\begin{bmatrix} r(t_1) & r(t_2) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} r(t_1) & r(t_2) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Penduga parameter *Jackknife* dapat diperoleh dengan menentukan nilai rata-rata dari setiap penduga parameter $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \hat{\beta}^3, \dots, \hat{\beta}^n$ seperti pada persamaan (16) yaitu:

$$\hat{\beta} = \sum_i^n \frac{\hat{\beta}^i}{n}$$

Untuk memperoleh estimator dari parameter a_0 dan a_1 . Dalam model suku bunga *Hull-White*, parameter yang diestimasi adalah a , θ dan σ . Untuk mendapatkan estimator tersebut, persamaan (20), persamaan (18) dan (21) diubah menjadi bentuk persamaan berikut:

$$a = \frac{1 - a_1}{\Delta t} \quad (28)$$

$$\theta = \frac{a_0}{\Delta t} \quad (29)$$

$$\sigma = \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \varepsilon_t \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} (y - X\hat{\beta}) \right) \quad (30)$$

1.4.6 Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) adalah metrik evaluasi yang sering digunakan dalam statistik dan *machine learning* untuk menilai akurasi prediksi dalam model regresi. MAPE menghitung rata-rata persentase perbedaan antara nilai prediksi model dan nilai aktual dari data yang diamati.

Secara matematis, MAPE dapat dihitung menggunakan persamaan berikut (Nabillah & Ranggadara, 2020):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{r_t - \hat{r}_t}{r_t} \right| \quad (31)$$

dimana

- r_t : nilai aktual pada periode waktu t
- $\hat{r}_t$: nilai ramalan untuk periode waktu t
- n : banyak periode

Skala akurasi peramalan adalah sebagai berikut (Nabillah & Ranggadara, 2020):

Tabel 1. Range nilai MAPE

Range MAPE	Keterangan
< 10%	Kompetensi Model Peramalan Sangat Baik
10% – 20%	Kompetensi Model Peramalan Baik
20% – 50%	Kompetensi Model Peramalan Layak
> 50%	Kompetensi Model Peramalan Buruk

dengan nilai akurasi yang bisa diperoleh,

$$Accuracy = 1 - MAPE = 1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{r_t - \hat{r}_t}{r_t} \right| \quad (32)$$

1.4.7 Tabel Mortalitas dan Simbol Komutasi

Tabel mortalitas adalah representasi ringkas yang menunjukkan probabilitas hidup atau mati dari individu dalam suatu populasi pada usia tertentu. Tabel mortalitas (*life tables*) digunakan untuk menganalisis perubahan tingkat kematian dalam populasi, khususnya terkait jaminan sosial, dari waktu ke waktu. Dalam tabel ini, terdapat perbedaan risiko kematian antara laki-laki dan perempuan. Laki-laki cenderung memiliki risiko kematian lebih tinggi karena pola hidup mereka yang umumnya lebih rentan terhadap kebiasaan tidak sehat dibandingkan perempuan. Formula tabel mortalita sebagai berikut (Sarina., dkk, 2023).

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (33)$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} \quad (34)$$

Probabilitas bahwa seseorang dengan usia x akan tetap hidup hingga mencapai usia $x + n$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (35)$$

Probabilitas bahwa seseorang berusia x akan meninggal dalam n tahun ke depan dinyatakan dengan notasi ${}_n q_x$, yang memenuhi persamaan:

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x \quad (36)$$

dimana,

- d_x : Banyaknya orang yang meninggal antara usia x dan $x + 1$ tahun
- ${}_n d_x$: Banyaknya orang yang meninggal antara usia x dan $x + n$ tahun
- l_x : Banyaknya orang yang hidup tepat usia x tahun
- l_{x+1} : Banyaknya orang yang hidup tepat usia $x + 1$ tahun
- l_{x+n} : Banyaknya orang yang hidup tepat usia $x + n$ tahun

Perhitungan dalam tabel mortalita sering disederhanakan dengan menggunakan simbol komutasi. Beberapa simbol komutasi yang digunakan antara lain (Izzati, 2022):

$$D_x = v^x l_x \quad (37)$$

$$\text{dengan } v = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \dots + D_w = \sum_{i=0}^{w-x} D_{x+i} \quad (38)$$

dengan w adalah usia tertinggi yang dicapai.

1.4.8 Anuitas Hidup

Anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan secara terus-menerus atau pada interval yang tetap. Dalam anuitas hidup, pembayaran berkala bergantung pada hidup atau matinya seseorang, dengan pembayaran hanya dilakukan jika penerima anuitas masih hidup saat jatuh tempo pembayaran. Pembayaran yang dilakukan pada awal interval disebut anuitas awal (*annuity due*), sementara yang dilakukan pada akhir interval disebut anuitas akhir (*annuity immediate*). Penelitian ini akan fokus membahas anuitas diskrit yang dibayarkan di awal (*annuity due*). Berdasarkan durasi waktunya, anuitas due diskrit dibagi menjadi dua jenis, yaitu (Miyasari, 2023):

a. Anuitas Seumur Hidup diskrit diawal

Anuitas seumur hidup dimuka adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan pada awal setiap periode kepada peserta program pensiun, yang akan terus diberikan hingga peserta tersebut meninggal dunia. Berikut adalah persamaan untuk anuitas seumur hidup diskrit yang dibayarkan di awal periode.

$$\ddot{a}_r = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_x \quad (39)$$

b. Anuitas hidup diskrit diawal berjangka n tahun

Anuitas hidup diskrit dimuka dengan jangka waktu n tahun adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan pada awal setiap periode kepada peserta program pensiun, yang berlangsung selama n tahun atau hingga peserta meninggal dunia, tergantung pada mana yang terjadi lebih dahulu.

$$\ddot{a}_r = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_{r-x} p_x \quad (40)$$

Jika pembayaran dilakukan pada awal periode sebanyak m kali dalam setahun dengan jumlah pembayaran sebesar 1, maka rumusnya adalah sebagai berikut (Rahmawati dan Rosita, 2022):

$$\ddot{a}_r^{(m)} = \ddot{a}_r - \frac{m-1}{12m} \quad (41)$$

1.4.9 Fungsi Dasar Aktuaria Dana Pensiun

1.4.9.1 Survival function

Fungsi keberlangsungan hidup adalah fungsi yang menggambarkan probabilitas seorang karyawan akan tetap bekerja sepanjang masa kerja aktifnya hingga mencapai usia pensiun yang diperbolehkan. Probabilitas keberlangsungan hidup ini dinyatakan sebagai ${}_np_x$ dengan rumus (Islam., dkk, 2016):

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (42)$$

1.4.9.2 Fungsi Suku Bunga

Fungsi tingkat suku bunga adalah fungsi yang digunakan untuk menentukan nilai sekarang dari pembayaran yang akan diterima di masa depan dengan cara mendiskontokannya. Faktor diskonto dilambangkan dengan v . Untuk mengakumulasikan satu unit mata uang pada akhir tahun, sejumlah pokok sebesar v akan diinvestasikan di awal tahun dengan tingkat suku bunga tahunan i (Islam., dkk, 2016).

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} \quad (43)$$

Fungsi tingkat suku bunga yang berfluktuasi sesuai dengan model stokastik dinyatakan menggunakan persamaan berikut (Nastiti, 2015):

$$v^n = \prod_{t=1}^n \frac{1}{(1+r_t)} \quad (44)$$

1.4.9.3 Fungsi Gaji

Dalam suatu program pensiun yang manfaatnya bergantung pada besarnya gaji karyawan, diperlukan perumusan notasi gaji serta prosedur untuk memperkirakan gaji di masa depan. Nilai kumulatif gaji karyawan dari usia mulai bekerja y hingga usia $x - 1$ dinyatakan dengan notasi S_x , dengan syarat $x > y$ (Miyasari, 2023):

$$S_x = \sum_{t=y}^{x-1} s_t \quad (45)$$

Jika diasumsikan bahwa tingkat kenaikan gaji karyawan adalah s per tahun, maka gaji terakhir karyawan sebelum pensiun pada usia $r - 1$, berdasarkan gaji saat usia x , dapat dihitung menurut Aitken (1994) sebagai berikut:

$$s_{r-1} = (1+s)^{r-1-x} s_x \quad (46)$$

Dengan demikian, perkiraan gaji karyawan pada usia x dapat dinyatakan menggunakan persamaan berikut:

$$s_x = s_y \frac{(SS)_x}{(SS)_y} (1 + s)^{(x-y)} \quad (47)$$

1.4.10 Fungsi Manfaat

Fungsi manfaat digunakan untuk menentukan besarnya manfaat pensiun yang diterima oleh peserta program pensiun saat mencapai masa pensiun (Winklevoss, 1993). Misalnya, b_x adalah jumlah manfaat yang akan diterima oleh peserta yang berusia x tahun jika tetap bekerja selama satu tahun ke depan. Jumlah manfaat ini disebut sebagai Fungsi Akumulasi Manfaat (*Benefit Accrual Function*). B_x adalah fungsi manfaat terhimpun (*Accrual Benefit Function*), yaitu jumlah manfaat pensiun yang diberikan kepada peserta program yang telah bekerja sejak usia masuk kerja y tahun hingga usia $x-1$ tahun (Caraka, 2016).

Formula manfaat rata-rata karir untuk fungsi satuan manfaat pensiun pada usia x tahun adalah.

$$b_x = k s_x \quad (48)$$

Sementara itu, rumus untuk manfaat *Career Average* atau fungsi manfaat terhimpun adalah sebagai berikut:

$$B_x = k S_x \quad (49)$$

Dengan k sebagai persentase yang ditetapkan, maka b_x merupakan persentase dari gaji setiap tahun selama masa kerja.

1.4.11 Present Value of Future Benefit

Nilai sekarang manfaat pensiun atau *Present Value of Future Benefit* (PVFB) adalah nilai sekarang dari manfaat pensiun yang akan diterima peserta setelah pensiun, di mana pembayaran PVFB dilakukan secara berkala setiap tahun hingga peserta meninggal dunia (Winklevoss, 1993). PVFB dirumuskan secara sistematis sebagai berikut:

$${}^r(PVFB)_x = B_r \ddot{a}_r^{(12)} v^{r-x} {}_{r-x}p_x$$

Untuk mengetahui manfaat dihitung dari kondisi sekarang dan diproyeksikan, maka digunakan B_x sebagai manfaat pensiun tahunan yang diharapkan pada usia pensiun. Sehingga PVFB dirumuskan secara sistematis sebagai berikut:

$${}^r(PVFB)_x = B_x \ddot{a}_r^{(12)} v^{r-x} {}_{r-x}p_x \quad (50)$$

1.4.12 Present Value of Future Normal Cost

Iuran normal atau *Normal Cost* (NC) merupakan iuran tahunan yang dibayarkan oleh peserta kepada dana pensiun selama masa aktif bekerja, sesuai dengan metode yang digunakan (Izzati & Kartikasari, 2022). Iuran normal peserta dari usia masuk e hingga usia pensiun r disebut *Present Value of Future Normal Cost* (PVFNC), yang didefinisikan sebagai berikut:

$${}^r(PVFNC)_x = \sum_{t=x}^{r-1} (NC)_t v^{t-x} {}_{r-x}p_x \quad (51)$$

1.4.13 Normal Cost

Iuran normal yang dihitung menggunakan metode *Projected Benefit Cost* terbagi ke dalam tiga definisi fungsi, yaitu:

1.4.13.1 Metode Attained Age Normal

Metode *Attained Age Normal* (AAN) adalah metode perhitungan di mana nilai sekarang dari manfaat pensiun peserta dialokasikan mulai dari usia saat peserta terdaftar dalam program dana pensiun hingga mencapai usia pensiun normal. Dalam metode ini, iuran normal cenderung meningkat seiring berjalannya waktu. Iuran normal menggunakan metode AAN dirumuskan sebagai berikut:

$${}^{AAN} {}^r(NC)_x = \frac{{}^r(PVFB)_e}{\frac{N_x^T - N_r^T}{D_x^T}} \quad (52)$$

1.4.13.2 Metode Entry Age Normal

Metode *Entry Age Normal* (EAN) adalah metode perhitungan di mana nilai sekarang dari manfaat pensiun yang akan diterima hingga usia pensiun sama dengan nilai sekarang dari iuran normal saat peserta pertama kali bergabung dalam program pensiun. Pada metode ini, iuran normal tetap konstan sepanjang tahun berjalan. Iuran normal menggunakan metode EAN dirumuskan sebagai berikut:

$${}^{EAN} {}^r(NC)_x = \frac{v^{x-e} {}_{x-e}p_e}{\frac{N_e^T - N_r^T}{D_e^T}} {}^r(PVFB)_x \quad (53)$$

1.4.13.3 Metode Individual Level Premium

Metode *Individual Level Premium* (ILP) adalah metode perhitungan di mana nilai manfaat pensiun, yang didasarkan pada total masa kerja, dialokasikan secara merata untuk setiap tahun hingga mencapai usia pensiun normal. Iuran normal dengan metode ILP dirumuskan sebagai berikut:

$${}^{ILP}r(NC)_x = B_x \ddot{a}_r \left(\frac{D_r^T}{N_e^T - N_r^T} \right) \quad (54)$$

1.4.14 Actuarial Liability

Kewajiban aktuarial atau *Actuarial Liability* (AL) adalah jumlah pembayaran yang harus dimiliki oleh dana pensiun agar manfaat pensiun peserta dapat terpenuhi dan diterima setelah peserta pensiun (Izzati & Kartikasari, 2022). Secara dasar, kewajiban aktuarial merupakan selisih antara PVFB dan PVFNC yang dihitung pada saat peserta berusia x , yang dirumuskan sebagai berikut:

$$r(AL)_x = r(PVFB)_x - r(PVFNC)_x \quad (55)$$

Untuk menghitung kewajiban aktuarial *Projected Benefit Cost*, terdapat tiga metode yang digunakan, yaitu:

1.4.14.1 Metode Attained Age Normal

Perhitungan kewajiban aktuarial dengan metode AAN dirumuskan sebagai berikut:

$${}^{AAN}r(AL)_x = r(PVFB)_e - {}^{AAN}r(NC)_x \frac{N_x^T - N_r^T}{D_x^T} \quad (56)$$

1.4.14.2 Metode Entry Age Normal

Perhitungan kewajiban aktuarial dengan metode EAN dirumuskan sebagai berikut:

$${}^{EAN}r(AL)_x = \frac{\frac{N_e^T - N_x^T}{D_e^T}}{\frac{N_e^T - N_r^T}{D_e^T}} r(PVFB)_x \quad (57)$$

1.4.14.3 Metode Individual Level Premium

Perhitungan kewajiban aktuarial dengan metode ILP dirumuskan sebagai berikut:

$${}^{ILP}r(AL)_x = {}^{ILP}r(NC)_x \left(\frac{N_e^T - N_x^T}{D_x^T} \right) \quad (58)$$

1.4.15 Mean Squared Error (MSE)

Mean Squared Error (MSE) adalah metrik evaluasi yang sering digunakan dalam statistik dan *machine learning* untuk menilai keakuratan model regresi dalam memprediksi nilai numerik. MSE menghitung rata-rata dari kuadrat selisih antara nilai yang diprediksi oleh model dan nilai aktual dari data yang diamati. Secara matematis, MSE dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut (Suparman, 2012):

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N} \quad (59)$$

dimana N adalah jumlah sampel data, y_i adalah nilai aktual dari data ke- n , dan $\hat{y}_i$ adalah nilai prediksi untuk data ke- n .

MSE menghitung perbedaan antara nilai prediksi model dan nilai sebenarnya, kemudian mengkuadratkan perbedaan tersebut agar semua nilai menjadi positif. Hasil kuadrat dari perbedaan ini dijumlahkan, lalu dibagi dengan jumlah total sampel untuk mendapatkan rata-rata.

Semakin kecil nilai MSE, semakin baik kemampuan model regresi dalam memprediksi nilai numerik. Oleh karena itu, MSE cocok digunakan untuk memilih model regresi yang paling akurat.

1.4.16 Koefisien Determinasi (R^2)

Koefisien determinasi, yang sering disimbolkan dengan R^2 (*R-Square*), adalah ukuran penting dalam analisis regresi. Nilai R^2 dapat dihitung dengan mengkuadratkan koefisien korelasi (r), yaitu $R^2 = r^2$. Koefisien ini berfungsi untuk mengukur sejauh mana variabel independen (x) dapat menjelaskan variasi pada variabel dependen (y). Dengan kata lain, R^2 menunjukkan seberapa baik variabel independen memprediksi variabel dependen. Koefisien determinasi dapat di rumuskan sebagai berikut (Fauziyah, 2018):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \quad (60)$$

dimana,

SS_{res} = selisih antara nilai aktual y_i dan nilai prediksi $\hat{y}_i$

SS_{tot} = selisih antara nilai aktual y_i dan rata-rata nilai aktual $\bar{y}_i$

Semakin tinggi nilai R^2 , semakin baik kemampuan variabel independen dalam memprediksi variabel dependen. Nilai R^2 berkisar antara 0 hingga 1, atau dalam persentase, antara 0% hingga 100%.

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Pendekatan dan Jenis Penelitian

Penelitian ini menerapkan pendekatan kuantitatif dengan menggunakan metode *Projected Benefit Cost Method* untuk menghitung *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* dalam pendanaan pensiun PT Pertamina (Persero) menggunakan asumsi suku bunga stokastik *Hull-White* model. Fokus utama pendekatan ini adalah pada pengumpulan, pengolahan, dan interpretasi data kuantitatif guna menghasilkan generalisasi, membangun model, atau membuat prediksi berdasarkan analisis data yang objektif.

2.2 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan sejak Oktober 2024. Penelitian ini menggunakan sumber literatur yang tersedia secara langsung di perpustakaan resmi dan laboratorium matematika Universitas Hasanuddin serta beberapa yang tersedia di internet.

2.3 Objek Penelitian

Objek pada penelitian ini adalah data gaji pegawai PT Pertamina (Persero) dan tingkat suku bunga bulanan Bank Indonesia.

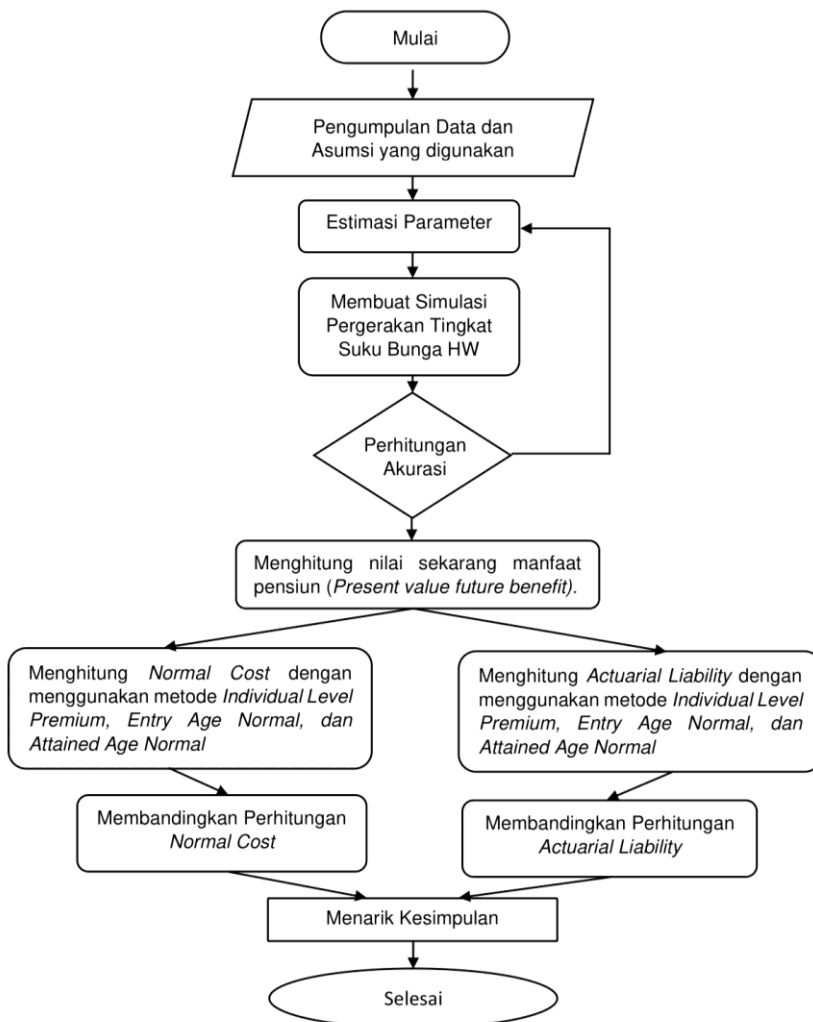
2.4 Prosedur Penelitian

Akan dijabarkan secara rinci prosedur penelitian sebagai berikut:

1. Mengumpulkan Data
Peneliti mengumpulkan data dari berbagai literatur yang telah dipublikasikan sebelumnya. Literatur tersebut mencakup buku, jurnal, artikel, serta sumber-sumber ilmiah lain yang relevan dengan topik penelitian. Selain itu, data juga diperoleh dari literatur yang bersumber dari internet resmi sesuai dengan objek penelitian.
2. Penentuan Spesifikasi Penelitian
Setelah dilakukan pengumpulan data, akan ditentukan spesifikasi penelitian. Dalam hal ini spesifikasi penelitian adalah penerapan suku bunga stokastik *Hull-White* model untuk menghitung *Normal Cost* dan *Actuarial Liability* dalam pendanaan pensiun PT Pertamina (Persero). Penelitian ini juga mencakup penentuan metode valuasi aktuarial yang paling sesuai dalam mengoptimalkan strategi pengelolaan dana pensiun PT Pertamina (Persero).
3. Analisis Data
 - a) Melakukan estimasi parameter model *Hull-White* dengan metode *Jackknife*.
 - b) Membuat simulasi pergerakan tingkat suku bunga model *Hull-White*
 - c) Menghitung akurasi pergerakan tingkat suku bunga model *Hull-White* melalui *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE)
 - d) Menentukan nilai sekarang pendanaan pensiun *PVFB* dan *PFVNC*.

- e) Menghitung *Normal Cost* dengan metode *Attained Age Normal*, *Entry Age Normal*, dan *Individual Level Premium*.
- f) Menghitung *Actuarial Liability* dengan metode *Attained Age Normal*, *Entry Age Normal*, dan *Individual Level Premium*.
- g) Membandingkan hasil perhitungan aktuaria metode *Attained Age Normal*, metode *Entry Age Normal*, dan metode *Individual Level Premium* serta pengaruh tingkat suku bunga stokastik *Hull-White* model terhadap akurasi perhitungan.
- h) Penarikan Kesimpulan.

2.5 Alur kerja



Gambar 2. Alur kerja penelitian