

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Transformasi Fourier (TF) dan ilmu yang terkait berkembang sangat pesat karena kegunaannya di berbagai bidang sains dan teknik. Transformasi Fourier memungkinkan kita untuk menganalisis komponen frekuensi dari sinyal, yang sangat berguna untuk sinyal yang stasioner atau memiliki struktur frekuensi tetap. Menurut Saribulut, et al. (2013), transformasi Fourier adalah salah satu metode matematika yang memiliki banyak manfaat, diantaranya digunakan untuk menganalisa dan melakukan dekomposisi sinyal-sinyal dalam domain frekuensi. Transformasi Fourier menghasilkan representasi spektral dari sinyal, memberikan informasi tentang amplitudo dan fase komponen frekuensinya. Namun, TF bersifat global, yang berarti ia memberikan informasi tentang frekuensi dalam seluruh sinyal, tetapi tidak mempertahankan informasi waktu di mana komponen frekuensi tertentu muncul. Oleh karena itu, TF tidak efektif untuk menganalisis sinyal non-stasioner, yang frekuensinya berubah sepanjang waktu.

Berbeda dengan Transformasi Fourier yang hanya menggunakan basis waktu atau frekuensi yang tetap, salah satu kegunaan Transformasi Fourier Fraksional (TFFr) khususnya pada pengolahan sinyal yaitu mampu menganalisa frekuensi pada sinyal frekuensi tinggi [Almeida, 1994] yang memungkinkan kontrol lebih besar atas representasi sinyal dalam domain waktu dan frekuensi. TFFr adalah transformasi parameter yang menggabungkan keuntungan dari transformasi waktu dan frekuensi. Ini dilakukan dengan memperkenalkan parameter yang memodifikasi tingkat pergeseran antara domain waktu dan frekuensi. TFFr telah banyak diterapkan dalam pengolahan citra dan sinyal [Yetik, et al., 2003]. TFFr tergantung dari sudut θ tertentu [Sutrisna, 2019], ketika transformasi Fourier fraksional tergantung pada sudut θ , ini berarti memiliki suatu bentuk modifikasi transformasi Fourier yang mengintegrasikan variabel θ dalam ekspresi eksponen atau struktur integral. Dengan kata lain, jika transformasi Fourier fraksional tergantung pada θ , maka hasil transformasi tersebut akan bervariasi tergantung pada nilai θ yang diambil. Sebagai contoh, untuk sinyal non-stasioner,

TFFr bisa lebih berguna karena ia memungkinkan kita untuk lebih fleksibel dalam menggambarkan komponen frekuensi yang berubah seiring waktu dengan memilih parameter transformasi yang lebih tepat. TFFr merupakan salah satu bentuk generalisasi dari transformasi Fourier [Anisa, 2023].

Fungsi ambiguitas memainkan peran penting dalam analisis sinyal non-stasioner dan teori pemrosesan dalam distribusi frekuensi waktu. Fungsi ambiguitas memperkenalkan informasi yang lebih mendalam dibandingkan dengan Transformasi Fourier, karena memberikan korelasi silang antara sinyal dan versi tergeser dari dirinya sendiri dalam kedua domain, waktu dan frekuensi. Fungsi ini berguna terutama dalam situasi dimana komponen sinyal berinteraksi dengan cara yang kompleks. Fungsi ambiguitas dapat memberikan gambaran tentang lokasi dan struktur sinyal yang lebih tepat, terutama ketika sinyal tersebut mengalami perubahan yang cepat dalam waktu. Kita dapat menggunakan fungsi ambiguitas untuk menghitung jarak antar target dan radar, kecepatan target, resolusi jarak dan resolusi kecepatan radian [Chen, et al., 2014].

Dalam fungsi ambiguitas diterapkan prinsip ketidakpastian, dimana ada ketidakpastian dalam menentukan posisi waktu dan frekuensi suatu komponen sinyal. Prinsip ketidakpastian dalam konteks transformasi Fourier menyatakan bahwa ada keterkaitan yang timbal-balik antara ketepatan suatu fungsi dalam domain waktu (posisi atau lokasi dalam ruang) dengan ketepatan fungsi tersebut dalam domain frekuensi (momentum atau energi) [Mustard, 1991]. Prinsip ketidakpastian terkenal karena pertama kali diajukan oleh Werner Heisenberg dalam konteks mekanika kuantum, tetapi juga diterapkan dalam berbagai bidang lain, seperti teori sinyal, statistik, dan matematika salah satunya yaitu yang dikenal dengan prinsip ketidakpastian Donoho-Stark. Prinsip ketidakpastian Donoho-Stark menyatakan bahwa dalam representasi sinyal menggunakan basis transformasi tertentu (misalnya, wavelet atau basis lainnya), ada trade-off antara ketepatan dalam domain waktu dan frekuensi. Ini berarti bahwa untuk mendapatkan representasi yang baik dalam satu domain (misalnya, waktu atau frekuensi), kita harus mengorbankan ketepatan di domain lainnya. Donoho dan Stark menunjukkan bahwa ketika menggunakan transformasi seperti wavelet untuk menganalisis sinyal, harus mengakui bahwa ada batasan dalam representasi yang baik di kedua domain tersebut. Hal ini mirip dengan ketidakpastian Hei-

senberg, namun lebih menekankan pada bagaimana transformasi sinyal (misalnya melalui Fourier atau wavelet) mempengaruhi kemampuan kita untuk mengukur dan menganalisis sinyal dalam dua domain yang berbeda. Prinsip ini lebih berfokus pada kompleksitas representasi sinyal, sementara prinsip Heisenberg lebih terkait dengan keterbatasan dasar dalam pengukuran variabel fisik. Donoho dan Stark memberikan banyak contoh menarik dan aplikasi dari prinsip ketidakpastian mereka, di antaranya adalah anomali bahwa prinsip ketidakpastian menyiratkan bahwa sinyal yang tidak pasti sering kali dapat dipulihkan dengan pasti [Smith, 1990].

Dalam konteks analisis sinyal, Transformasi Fourier (TF), Transformasi Fourier Fraksional (TFFr), Fungsi Ambiguitas, dan Prinsip Ketidakpastian saling terkait karena semuanya berhubungan dengan bagaimana menggambarkan sinyal dalam domain waktu dan frekuensi. Masing-masing konsep ini memiliki generalisasi atau perluasan yang meningkatkan kemampuan untuk menganalisis sinyal, terutama sinyal non-stasioner dan sinyal dengan struktur yang lebih kompleks. Dalam beberapa tahun terakhir, banyak minat dalam mempelajari generalisasi dan sifat-sifat TFFr, terutama dalam kaitannya dengan fungsi ambiguiti. Beberapa peneliti sebelumnya telah menggeneralisasi jenis transformasi yang berbeda dengan menggunakan kernel TFFr. Seperti pada Nur (2024) mengusulkan distribusi Wigner-Ville fraksional, yang merupakan perluasan dari distribusi Wigner-Ville klasik dalam domain TFFr serta sifat-sifat penting dan aplikasinya juga dibahas. Dalam Lone (2022) dan Ranjan (2020) berfokus pada transformasi shearlet fraksional dan transformasi-S fraksional. Sementara Nurkifayah (2024) dan Sahay (2020) berfokus pada fungsi ambiguitas pecahan dan aplikasinya serta pertidaksamaan. Namun hingga saat ini, belum ada penelitian yang dilaporkan mengenai eksplorasi prinsip-prinsip ketidakpastian yang terkait dengan fungsi ambiguiti fraksional.

Berdasarkan uraian di atas, maka dalam penelitian ini mengkaji lebih lanjut mengenai prinsip ketidakpastian Donoho-Stark untuk fungsi ambiguiti fraksional (FAFr). Dalam hal ini dibuktikan prinsip ketidakpastian Donoho-Stark pada fungsi ambiguiti fraksional yang terkait dengan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti fraksional.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana membuktikan prinsip ketidakpastian Donoho-Stark pada fungsi ambiguiti fraksional dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti fraksional.

1.3. Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$. Adapun prinsip ketidakpastian yang dibahas yaitu prinsip ketidakpastian Donoho-Stark.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk membuktikan prinsip ketidakpastian Donoho-Stark pada fungsi ambiguiti fraksional dengan menggunakan relasi antara transformasi Fourier dengan fungsi ambiguiti fraksional.

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian tugas akhir ini yaitu :

1. Memberikan informasi dan pengetahuan baru sekaligus menjadi literatur tambahan bagi penulis dalam menyelesaikan tugas akhir.
2. Memberikan gambaran umum terkait fungsi ambiguiti fraksional dan prinsip ketidakpastian Donoho-Stark khususnya bagi para peneliti dan masyarakat pemerhati dalam menemukan referensi.

1.6. Sistematika Penulisan Tesis

Sistematika penulisan tesis ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini, meliputi: jenis penelitian, waktu dan tempat penelitian, prosedur atau tahapan penelitian, dan diagram alur penelitian.

BAB III HASIL

Bab ini memuat data penelitian dan hasil-hasil dari kajian yang telah dilakukan.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini memuat nilai penting dari hasil yang diperoleh. Menguraikan dan memberikan jawaban atas pertanyaan yang dikemukakan pada Bab Pendahuluan.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi kesimpulan dan saran berdasarkan hasil bab-bab sebelumnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini dibahas beberapa teori yang mendasari tulisan ini, pembahasan yang ada menjadi landasan dasar untuk fungsi ambiguiti fraksional dan sifat-sifatnya. Pada tulisan ini, dibahas terlebih dahulu tentang ruang Lebesgue untuk transformasi Fourier, transformasi Fourier fraksional, fungsi ambiguiti dan fungsi ambiguiti fraksional.

2.1. Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue adalah salah satu konsep fundamental dalam matematika yang terkait dengan teori integral, analisis fungsional, dan teori probabilitas. Secara umum, ruang Lebesgue merujuk pada himpunan fungsi yang dapat diukur dan diintegrasikan dengan metode integral Lebesgue.

2.1.1. Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$ dapat didefinisikan sebagai suatu ruang dari fungsi terukur dengan pangkat 1 dari nilai mutlaknya dapat diintegrasikan.

Definisi 1 (Ruang $L^1(\mathbb{R})$) Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)| d\tau < \infty \right\}, \quad (2.1)$$

Ruang $L^1(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm yang dinyatakan sebagai

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)| d\tau. \quad (2.2)$$

Contoh 1. Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -3 < x < 3 \\ 0, & x \text{ selainnya,} \end{cases} \quad (2.3)$$

Ditunjukkan apakah fungsi f tersebut termasuk ruang fungsi $L^1(\mathbb{R})$

Solusi 1. Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.1), diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-3} 0 dt + \int_{-3}^3 |1| dt + \int_{-3}^{\infty} 0 dt \\ &= 0 + |_{-3}^3 + 0 \\ &= 0 + 3 - (-3) + 0 \\ &= 6 < \infty\end{aligned}$$

Karena $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 6 < \infty$ maka $f \in L^1(\mathbb{R})$.

2.1.2. Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^2)$

Ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^2)$ adalah ruang fungsi yang dapat diintegrasikan dalam pengertian Lebesgue pada ruang dua dimensi $\mathbb{R}^2$. Secara lebih formal, ruang ini terdiri dari fungsi-fungsi yang memenuhi kondisi tertentu mengenai integrabilitasnya.

Definisi 2 (Ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$) Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}^2$, maka ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$L^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)| d\tau < \infty \right\}, \quad (2.4)$$

dimana $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $d\tau = d\tau_1 d\tau_2$.

Ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$ dilengkapi dengan norm yang dinyatakan sebagai

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)| d\tau. \quad (2.5)$$

Contoh 2. Misalkan $f(x) = e^{-|x_1+x_2|}$, $x \in \mathbb{R}^2$, dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^1(\mathbb{R}^2)$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 2. Berdasarkan definisi ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$ pada persamaan (2.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^2} |e^{-|x_1+x_2|}| d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x_1+x_2|} d\mathbf{x} \\
 &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 e^{x_1+x_2} dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 e^{x_1} e^{x_2} dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x_1} e^{-x_2} dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{x_1} dx_1 \int_{-\infty}^0 e^{x_2} dx_2 + \int_0^{\infty} e^{-x_1} dx_1 \int_0^{\infty} e^{-x_2} dx_2 \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{-a}^0 e^{x_1} dx_1 \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{-b}^0 e^{x_2} dx_2 + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-x_1} dx_1 \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d e^{-x_2} dx_2 \\
 &= \left(\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{x_1} \Big|_{-a}^0 \right) \left(\lim_{b \rightarrow -\infty} e^{x_2} \Big|_{-b}^0 \right) + \left(\lim_{c \rightarrow \infty} -e^{-x_1} \Big|_0^c \right) \left(\lim_{d \rightarrow \infty} -e^{-x_2} \Big|_0^d \right) \\
 &= \left(\lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^{-a}) \right) \left(\lim_{b \rightarrow -\infty} (e^0 - e^{-b}) \right) \\
 &\quad + \left(\lim_{c \rightarrow \infty} (-e^{-c} + e^0) \right) \left(\lim_{d \rightarrow \infty} (-e^{-d} + e^0) \right) \\
 &= (1 - 0)(1 - 0) + (0 + 1)(0 + 1) \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Karena $\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 2 < \infty$ maka $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2.1.3. Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$

Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$ adalah ruang fungsi yang kuadrat terintegrasi pada garis bilangan real $\mathbb{R}$. Secara lebih spesifik, ruang ini berisi fungsi-fungsi yang memiliki integral kuadrat terhingga. Artinya, fungsi-fungsi dalam ruang $L^2(\mathbb{R})$ adalah fungsi-fungsi yang nilai kuadrat dari fungsi tersebut, jika diintegrasikan sepanjang $\mathbb{R}$, menghasilkan nilai yang terbatas.

Definisi 3 (Ruang $L^2(\mathbb{R})$) Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^2(\mathbb{R})$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau < \infty \right\}, \quad (2.6)$$

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dilengkapi dengan norm yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Contoh 3. Misalkan $f(x) = e^{-|2x|}$, $x \in \mathbb{R}$, ditunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 3. Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.6), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^0 |f(x)|^2 dx + \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^0 |e^{-(2x)}|^2 dx + \int_0^{\infty} |e^{-(2x)}|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{4x} dx + \int_0^{\infty} e^{-4x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^0 e^{4x} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-4x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-t}^0 \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} e^{-4x} \Big|_0^t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} e^{4(0)} - \frac{1}{4} e^{-4t} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4} e^{-4t} + \frac{1}{4} e^{-4(0)} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-4t} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4} e^{-4t} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} - 0 - 0 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Karena $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} < \infty$ maka $f \in L^1(\mathbb{R})$.

2.1.4. Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^2)$

Ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^2)$ adalah ruang fungsi yang kuadrat terintegrasi pada ruang dua dimensi $\mathbb{R}^2$. Secara spesifik, ruang ini berisi fungsi-fungsi yang memiliki integral kuadrat terhingga ketika diintegrasikan atas seluruh ruang $\mathbb{R}^2$.

Definisi 4 (Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$) Misalkan f adalah fungsi yang terintegralkan pada $\mathbb{R}^2$, maka ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$, didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 d\tau < \infty \right\}, \quad (2.8)$$

Ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$ dilengkapi dengan norma yang dirumuskan

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

Contoh 4. Misalkan $f(x) = e^{-|x_1+x_2|}$, $x \in \mathbb{R}^2$, dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f(x)$ termasuk dalam ruang fungsi $L^2(\mathbb{R}^2)$ dengan cara menunjukkan bahwa hasil integralnya konvergen.

Solusi 6. Berdasarkan definisi ruang $L^2(\mathbb{R}^2)$ pada persamaan (2.8), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{-|x_1+x_2|} \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{-|x_1+x_2|} \right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \left(e^{x_1+x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(e^{-(x_1+x_2)} \right)^2 dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 e^{2x_1} e^{2x_2} dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-2x_1} e^{-2x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2x_1} dx_1 \int_{-\infty}^0 e^{2x_2} dx_2 + \int_0^{\infty} e^{-2x_1} dx_1 \int_0^{\infty} e^{-2x_2} dx_2 \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 e^{2x_1} dx_1 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 e^{2x_2} dx_2 \\ &\quad + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-2x_1} dx_1 \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d e^{-2x_2} dx_2 \\ &= \left(\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{2x_1} \Big|_{-a}^0 \right) \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{2x_2} \Big|_{-b}^0 \right) \\ &\quad + \left(\lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-2x_1} \Big|_0^c \right) \left(\lim_{d \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-2x_2} \Big|_0^d \right) \\ &= \left(\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^{-a} \right) \right) \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^{-b} \right) \right) \\ &\quad + \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-c} + \frac{1}{2} e^0 \right) \right) \left(\lim_{d \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-d} + \frac{1}{2} e^0 \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \left(0 + \frac{1}{2} \right) \left(0 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.2. Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz adalah salah satu ketaksamaan fundamental dalam analisis dan aljabar linier, memberikan batas atas untuk nilai absolut dari produk

dalam dua vektor dalam hal norma-norma vektor tersebut.

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz menyatakan bahwa untuk semua vektor x dan y dalam ruang hasil kali dalam

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (2.10)$$

dimana $\langle x, y \rangle$ adalah hasil kali dalam dan untuk $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

2.3. Ketaksamaan Hölder

Ketaksamaan Hölder adalah generalisasi dari ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan berlaku untuk integrasi fungsi-fungsi yang diambil dari ruang L^p . Ketaksamaan ini memberikan batas atas untuk integral dari produk dua fungsi dalam hal norma L^p dan L^q dari fungsi-fungsi tersebut.

Misalkan f dan g adalah fungsi nilai real yang dapat diintegrasikan pada interval tertentu dan $1 \leq p, q < \infty$ adalah dua bilangan yang memenuhi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Maka, integral f dan g memenuhi ketaksamaan Hölder:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.4. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah alat matematis yang sangat penting dan diterapkan luas dalam ilmu pengetahuan dan teknik modern. Transformasi Fourier adalah transformasi integral linier yang mengubah suatu sinyal dari domain waktu (*space domain*) menjadi domain frekuensi (*frequency domain*). Transformasi ini memungkinkan kita untuk menganalisis sinyal atau fungsi dalam domain frekuensi. Transformasi ini umumnya digunakan pada bidang pemrosesan sinyal digital atau analisis sinyal.

Definisi 5 (Transformasi Fourier) Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, transformasi Fourier dari f didefinisikan oleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.12)$$

dengan $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$.

Karena $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ maka Persamaan (2.12) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\omega t)dt - i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\omega t)dt.\end{aligned}$$

Contoh 5.

Diberikan fungsi rectangular pulse

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{X}{2} < t < \frac{X}{2} \\ 0, & \text{selainnya,} \end{cases} \quad (2.13)$$

dengan $X > 0$.

Penyelesaian.

Berdasarkan Definisi 5, maka tranformasi Fourier dari $f(t)$ yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{X}{2}} (0)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} (1)e^{-i\omega t}dt + \int_{\frac{X}{2}}^{\infty} (0)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} e^{-i\omega t}dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \\ &= -\frac{1}{i\omega} (e^{-i\frac{\omega X}{2}} - e^{i\frac{\omega X}{2}}) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega X}{2}\right).\end{aligned}$$

Jadi $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{2}{\omega} \left(\sin\left(\frac{\omega X}{2}\right)\right)$.

Sifat-sifat transformasi Fourier adalah sebagai berikut.

1. Linieritas

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}$ maka

$$\mathcal{F}\{f + g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \quad (2.14)$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f+g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f+g)(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega).
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f+g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

2. Perkalian konstanta

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan untuk setiap $k \in \mathbb{C}$ maka

$$\mathcal{F}\{kf\}(\omega) = k\mathcal{F}\{f\}(\omega). \quad (2.15)$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\mathcal{F}\{kf\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (kf(t))e^{-i\omega t} dt.$$

Karena k adalah sebuah konstanta, maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{kf\}(\omega) &= k \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= k\mathcal{F}\{f\}(\omega).
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{kf\}(\omega) = k\mathcal{F}\{f\}(\omega)$.

3. Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan translasi $(\tau_k f)(t) = f(t-k)$, maka

$$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k} \mathcal{F}\{f\}(\omega). \quad (2.16)$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_k f)e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)e^{-i\omega t} dt.
\end{aligned}$$

Misalkan $u = t-k$, $t = u+k$, $dt = du$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+k)} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} e^{-i\omega k} du \\
&= e^{-i\omega k} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du \\
&= e^{-i\omega k} \mathcal{F}\{f\}(\omega).
\end{aligned} \quad (2.17)$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k} \mathcal{F}\{f\}(\omega)$.

4. Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $(\mathbb{M}_{\omega_0} f)(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$, maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \quad (2.18)$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{M}_{\omega_0} f) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)$.

5. Translasi dan modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $k, \omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t - k)$ maka

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\}(\omega) = e^{-i(\omega - \omega_0)k} \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \quad (2.19)$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t - k) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - k) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt. \end{aligned}$$

Ambil $u = t - k, t = u + k, dt = du$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega - \omega_0)(u+k)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega - \omega_0)u} e^{-i(\omega - \omega_0)k} du \\ &= e^{-i(\omega - \omega_0)k} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega - \omega_0)u} du \\ &= e^{-i(\omega - \omega_0)k} \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(t)\}(\omega) = e^{-i(\omega - \omega_0)k} \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)$.

Definisi 6 (Invers Transformasi Fourier) Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.20)$$

2.5. Transformasi Fourier Fraksional

Transformasi Fourier fraksional adalah sebuah generalisasi dari transformasi Fourier biasa dengan sebuah parameter θ . Transformasi Fourier yang berorde θ adalah sebuah pangkat θ dari operator transformasi Fourier. $\theta = \frac{\pi}{2}$ adalah orde transformasi Fourier fraksional dari transformasi Fourier biasa.

Untuk $1 \leq s \leq \infty$, kami menggunakan notasi $L^s(\mathbb{R})$ untuk mempresentasikan ruang yang dapat diukur pada bilangan $\mathbb{R}$ dengan norma

$$\|f\|_{L^s(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^s dt \right)^{1/s} < \infty, \quad s \in [1, \infty),$$

dan

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Khususnya, jika $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ kontinu maka

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Hasil kali dalam dari $L^2(\mathbb{R})$ kemudian didefinisikan sebagai

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (2.21)$$

dimana $\overline{g(t)}$ adalah konjugat kompleks dari $g(t)$.

Diperkenalkan transformasi Fourier dari sebuah fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ yang diberikan oleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\omega} dt. \quad (2.22)$$

Definisi 7 Diberikan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, Transformasi Fourier fraksional dengan parameter θ didefinisikan berikut

$$\mathcal{F}^\theta\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K^\theta(\omega, t) dt, \quad (2.23)$$

dengan kernelnya $K^\theta(\omega, t)$ didefinisikan

$$K^\theta(\omega, t) = \begin{cases} C_\theta e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - it\omega \csc \theta}, & \theta \neq n\pi \\ \delta(t - \omega), & \theta = 2n\pi \\ \delta(t + \omega), & \theta = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2.24)$$

dimana δ adalah fungsi Direc Delta dan

$$C_\theta = \frac{e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi \sin \theta}} = \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}}, \quad \overline{C_\theta} = \sqrt{\frac{1 + i \cot \theta}{2\pi}}. \quad (2.25)$$

Hal ini jelas bahwa

$$|C_\theta| = \sqrt{\frac{\csc \theta}{2\pi}}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad (2.26)$$

Definisi 8 Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $\mathcal{F}^\theta \{f\} \in L^1(\mathbb{R})$. Maka invers transformasi Fourier fraksional dari fungsi f adalah

$$\begin{aligned} f(t) &= (\mathcal{F}^\theta)^{-1}(\mathcal{F}^\theta \{f\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega) K_{-\theta}(\omega, t) d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^\theta \{f\}(\omega) \overline{C_\theta} e^{-i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} + i t \omega \csc \theta} d\omega. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Rumus (2.27) memberitahu kita cara memulihkan fungsi asli dalam hal TFFr-nya.

Lemma 2.5.1 (Rumus Parseval TFFr (Bahri M. & Abdul Karim S. A., 2023)) *Jika dua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, maka hubungan berikut ini berlaku:*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \mathcal{F}_\theta \{f\}, \mathcal{F}_\theta \{g\} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.28)$$

khususnya,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}_\theta \{f\}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (2.29)$$

Contoh 6. Diberikan fungsi dalam bentuk $f(t) = e^{-t^2}$, maka bentuk transformasi Fourier fraksional dari fungsi $f(t)$ adalah

$$\mathcal{F}^\theta \{f(t)\}(\omega) = \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2 - i \cot \theta}} e^{\frac{\omega^2}{2} (i \cot \theta - \frac{\csc^2 \theta}{2 - i \cot \theta})}. \quad (2.30)$$

Bukti. Perhatikan bahwa, berdasarkan definisi TFFr diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^\theta \{f(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (C_\theta e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - it\omega \csc \theta}) dt \\
&= C_\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i \cot \theta}{2} t^2 + \frac{i \cot \theta}{2} \omega^2 - t^2 - it\omega \csc \theta} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{i \cot \theta}{2} - 1)t^2 - it\omega \csc \theta} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i \cot \theta}{2})t^2 - it\omega \csc \theta} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i \cot \theta}{2})(t^2 - i(\frac{2}{-2+i \cot \theta})t\omega \csc \theta)} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i \cot \theta}{2})(t^2 - (\frac{2}{2i+\cot \theta})t\omega \csc \theta)} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i \cot \theta}{2})(t^2 - (\frac{2t\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta}))} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i \cot \theta}{2})((t - \frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2 - (\frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2)} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i \cot \theta}{2})(t - \frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2 - (\frac{-2+i \cot \theta}{2})(\frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} e^{-(-\frac{2+i \cot \theta}{2})(\frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{-2+i \cot \theta}{2})(t - \frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2} dt \\
&= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} e^{-i(\frac{2i+\cot \theta}{2})(\frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{2+i \cot \theta}{2})(t - \frac{\omega \csc \theta}{2i+\cot \theta})^2} dt.
\end{aligned}$$

Karena integral gaussian $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ku} du = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$, maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^\theta \{f(t)\}(\omega) &= C_\theta e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2}} e^{-i(\frac{\omega^2 \csc^2 \theta}{2(2i+\cot \theta)})} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{2-i \cot \theta}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{1-i \cot \theta}{2\pi}} e^{\frac{i\omega^2 \cot \theta}{2} - (\frac{\omega^2 \csc^2 \theta}{2(2-i \cot \theta)})} \sqrt{\frac{2\pi}{2-i \cot \theta}} \\
&= \sqrt{\frac{1-i \cot \theta}{2-i \cot \theta}} e^{\frac{\omega^2}{2}(i \cot \theta - \frac{\csc^2 \theta}{2-i \cot \theta})}.
\end{aligned}$$

2.6. Fungsi Ambiguiti

Ambiguiti merupakan suatu keadaan atau situasi yang tidak jelas atau tidak pasti, di mana informasi atau pesan yang disampaikan dapat diinterpretasikan dalam lebih dari satu cara. Fungsi ambiguiti didefinisikan sebagai transformasi Fourier dari fungsi korelasi silang dari sinyal dengan versi yang bergeser dalam waktu. Ini adalah konsep yang berguna dalam berbagai aplikasi yang melibatkan analisis sinyal dalam domain waktu dan frekuensi.

Definisi 9 (Fungsi Ambiguiti) Misal diberikan dua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Fungsi ambiguiti dari f dan g didefinisikan sebagai

$$A_{f,g}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-i\omega t} dt \quad (2.31)$$

Beberapa sifat dasar dari fungsi ambiguiti dirangkum sebagai berikut. Misalkan lambang τ_a adalah operator translasi yang didefinisikan sebagai $\tau_k f(t) = f(t - k)$, dan $\mathbb{M}_{\omega_0}$ adalah operator modulasi yang didefinisikan sebagai $\mathbb{M}_{\omega_0} f(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$. Maka sifat-sifat berikut berlaku:

1. Konjugasi kompleks

$$\overline{A_{f,g}(x, \omega)} = A_{g,f}(-x, -\omega). \quad (2.32)$$

2. Sifat translasi

$$A_{\tau_k f, \tau_k g}(x, \omega) = e^{-i\omega_0 k} A_{f,g}(x, \omega). \quad (2.33)$$

3. Sifat modulasi

$$A_{\mathbb{M}_{\omega_0} f, \mathbb{M}_{\omega_0} g}(x, \omega) = e^{-i\omega_0 t} f(t) A_{f,g}(x, \omega - \omega_0). \quad (2.34)$$

4. Formula Moyal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} A_{f_1, g_1}(x, \omega) \overline{A_{f_2, g_2}(x, \omega)} dx d\omega = (f_1, f_2) \overline{(g_1, g_2)}. \quad (2.35)$$

5. Sifat invers

$$f(x) = \frac{1}{2\pi g(0)} \int_{\mathbb{R}} A_{f,g}\left(\frac{x}{2}, \omega\right) e^{i\omega x} d\omega, \quad (2.36)$$

dengan $\overline{g(0)} \neq 0$.

2.7. Fungsi Ambiguiti Fraksional

Fungsi ambiguiti fraksional (FAFr) dapat didefinisikan dengan cara menggantikan kernel dari transformasi Fourier dengan kernel dari transformasi Fourier fraksional kedalam definisi fungsi ambiguiti.

Definisi 10 Jika dua fungsi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, maka fungsi ambiguiti fraksional dapat didefinisikan berikut

$$\mathcal{A}_{f,g}^{\theta}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} K^{\theta}(t, \omega) dt, \quad (2.37)$$

dengan $K^{\theta}(t, \omega) = C_{\theta} e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - i t \omega \csc \theta}$.

Diasumsikan

$$h_{f,g}(t, x) = f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)}, \quad (2.38)$$

maka Persamaan (2.37) dapat ditulis kembali

$$\mathcal{A}_{f,g}^\theta(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{f,g}(t, x) K^\theta(\omega, t) dt. \quad (2.39)$$

2.8. Relasi antara Fungsi Ambiguiti Fraksional dan Transformasi Fourier

Hubungan atau relasi antara fungsi ambiguiti fraksional (FAFr) dan transformasi Fourier (TF) ini sangat berguna untuk menurunkan beberapa teorema prinsip ketidakpastian yang terkait dengan fungsi ambiguiti fraksional. Relasi tersebut diuraikan berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f,g}^\theta(x, \omega) &= C_\theta \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - it\omega \csc \theta} dt \\ &= C_\theta \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{it^2 \frac{\cot \theta}{2}} e^{i\omega^2 \frac{\cot \theta}{2}} e^{-it\omega \csc \theta} dt \\ &= C_\theta e^{i\omega^2 \frac{\cot \theta}{2}} \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{it^2 \frac{\cot \theta}{2}} e^{-it\omega \csc \theta} dt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Kalikan kedua ruas dengan $C_\theta^{-1} e^{-i\omega^2 \frac{\cot \theta}{2}}$ ke persamaan (2.40), diperoleh

$$C_\theta^{-1} e^{-i\omega^2 \frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{A}_{f,g}^\theta(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{it^2 \frac{\cot \theta}{2}} e^{-it\omega \csc \theta} dt. \quad (2.41)$$

Misalkan

$$h_{f,g}^\theta(x, t) = f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{it^2 \frac{\cot \theta}{2}}, \quad (2.42)$$

maka persamaan (2.41) dapat ditulis kembali menjadi

$$C_\theta^{-1} e^{-i\omega^2 \frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{A}_{f,g}^\theta(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} h_{f,g}^\theta(x, t) e^{-it\omega \csc \theta} dt. \quad (2.43)$$

Dengan menerapkan definisi transformasi Fourier pada ruas kanan persamaan (2.43) maka diperoleh

$$C_\theta^{-1} e^{-i\omega^2 \frac{\cot \theta}{2}} \mathcal{A}_{f,g}^\theta(x, \omega) = \mathcal{F}\{h_{f,g}^\theta\}(\omega \csc \theta). \quad (2.44)$$

Persamaan (2.44) merupakan relasi antara fungsi ambiguiti fraksional dan transformasi Fourier.

2.9. Prinsip Ketidakpastian pada Transformasi Fourier

Prinsip ketidakpastian pada transformasi Fourier adalah konsep yang menghubungkan ketidakpastian antara dua domain transformasi Fourier yang saling terkait, yaitu domain waktu dan domain frekuensi. Prinsip ketidakpastian dalam konteks transformasi Fourier mengungkapkan trade-off antara resolusi waktu dan resolusi frekuensi. Artinya, jika kita ingin memperoleh representasi sinyal yang sangat terlokalisasi dalam waktu (misalnya, mengetahui dengan tepat kapan peristiwa terjadi), maka representasi frekuensinya akan menjadi lebih tersebar atau lebih tidak terlokalisasi. Sebaliknya, jika kita ingin mendapatkan representasi frekuensi yang sangat terlokalisasi (misalnya, mengetahui dengan tepat frekuensi komponen sinyal), maka representasi waktu sinyal akan menjadi lebih kabur. Prinsip ini secara matematis dapat ditulis dalam bentuk berikut, yang menghubungkan ketidakpastian waktu dan ketidakpastian frekuensi:

$$\Delta t \times \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

Dimana :

Δt adalah ketidakpastian dalam domain waktu

$\Delta \omega$ adalah ketidakpastian dalam domain frekuensi

ω adalah frekuensi angular, yaitu $\omega = 2\pi f$, dimana f adalah frekuensi.

Salah satu generalisasi pada transformasi Fourier adalah prinsip ketidakpastian Donoho-Stark.

2.9.1. Prinsip ketidakpastian Donoho-Stark

Prinsip ketidakpastian Donoho-Stark adalah konsep yang diusulkan oleh David Donoho dan Philip Stark dalam konteks teori pengukuran, yang mengemukakan bahwa dalam beberapa situasi, ketidakpastian dari suatu hasil pengukuran tidak hanya bergantung pada alat ukur atau teknik pengukuran yang digunakan, tetapi juga pada struktur matematis dari objek yang diukur itu sendiri. Prinsip ini berkaitan dengan ketidakpastian dalam mewakili sinyal dalam domain waktu dan frekuensi, bergantung pada konsep ϵ -terlokalisasi suatu fungsi pada himpunan terukur $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Kita mulai dengan mengingat kembali definisi ini yang diikuti dengan pernyataan teorema klasik.

Definisi 11 Diberikan $\epsilon \geq 0$, fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ adalah ϵ -terlokalisasi pada himpunan

terukur $U \subseteq \mathbb{R}^d$ jika,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus U} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \epsilon \|f\|_2. \quad (2.45)$$

Teorema 1 (Prinsip Ketidakpastian Donoho-Stark) Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \neq 0$, adalah ϵ_T -terlokalisasi pada $T \subseteq \mathbb{R}^d$, dan ϵ_E -terlokalisasi pada $E \subseteq \mathbb{R}^d$ dengan T, E himpunan terukur di $\mathbb{R}^d$, dan $\epsilon_T + \epsilon_E < 1$, maka

$$|T||E| \leq (1 - \epsilon_T - \epsilon_E)^2. \quad (2.46)$$

Berikut diberikan Teorema Prinsip Ketidakpastian Donoho-Stark pada Transformasi Fourier.

Teorema 2 (Prinsip ketidakpastian Donoho-Stark pada TF) Diberikan E dan T subset terukur dari $\mathbb{R}$. Diberikan $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ dengan $1 \leq p \leq 2$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika f adalah ϵ_E -terlokalisasi di E dalam norma $L^1(\mathbb{R})$ dan $\mathcal{F}\{f\}$ adalah ϵ_T -terlokalisasi di T dalam norma $L^p(\mathbb{R})$, maka berlaku

$$\|\mathcal{F}\{f\}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \frac{|E|^{\frac{1}{q}} |T|^{\frac{1}{q}}}{(1 - \epsilon_E)(1 - \epsilon_T)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (2.47)$$

Prinsip ketidakpastian ini akan digeneralisasi ke fungsi ambiguiti fraksional.