

BAB 1

PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang latar belakang penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan kajian teori.

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain, dimana matematika selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan karena kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Teori graf merupakan salah satu topik matematika yang masih sangat muda bila dibandingkan dengan topik matematika yang lain. Oleh karena itu saat ini banyak peneliti yang tertarik untuk mendalami teori graf.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736, melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Saat itu Euler memikirkan kemungkinan untuk melintasi semua jembatan di kota Königsberg, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dan solusi yang ditawarkan saat ini dikenal dengan teori graf.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf yang semakin berkembang. Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan titik atau sisi atau keduanya dari suatu graf ke suatu himpunan bilangan (umumnya himpunan bilangan bulat positif atau non negatif) yang diperkenalkan oleh Sedláček (1963). Pelabelan dengan domain titik disebut pelabelan titik, pelabelan dengan domain sisi disebut pelabelan sisi, serta pelabelan dengan domain gabungan titik dan sisi disebut pelabelan total.

Hartsfield dan Ringel (1990) memperkenalkan konsep pelabelan antiajaib pada suatu graf. Hartsfield memperkenalkan pelabelan antiajaib sebagai pelabelan sisi antiajaib-titik (*vertex-antimagic edge labeling*), yaitu suatu pelabelan sisi yang menghasilkan bobot dari setiap titik pada graf G berbeda, dimana bobot dari suatu titik adalah jumlah dari label sisi-sisi yang terkait (*incident*) dengan titik tersebut. Hartsfield dan Ringel memaparkan bahwa setiap graf pohon memenuhi pelabelan sisi antiajaib-titik dan lebih lanjut Hartsfield dan Ringel juga memaparkan bahwa setiap graf lengkap memiliki pelabelan sisi antiajaib-titik.

Miler dan Bača (2015) memperkenalkan suatu konsep tentang pelabelan total antiajaib total. Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik dan sisi dari G berturut-turut adalah $V(G)$ dan $E(G)$. Suatu pelabelan f disebut sebagai pelabelan total antiajaib sisi (pelabelan total antiajaib titik) pada G jika f memetakan himpunan titik dan sisi dari G ke himpunan $\{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ sehingga bobot setiap sisi (bobot setiap titik) dari G berbeda, dengan bobot suatu sisi pada graf G merupakan jumlah dari label

sisi tersebut ditambah dengan label dari setiap titik yang terkait dengan sisi tersebut, sedangkan bobot suatu titik pada graf G merupakan jumlah dari label titik tersebut ditambah dengan label dari semua sisi yang terkait dengan titik tersebut. Jika pelabelan f secara bersamaan merupakan pelabelan total antiajaib sisi dan pelabelan total antiajaib titik pada G maka f merupakan pelabelan total antiajaib total pada G .

Beberapa penelitian mengenai pelabelan total antiajaib sisi yang telah dilakukan antara lain, Silaban dan Sugeng (2008) memaparkan bahwa graf lintasan dan graf lingkaran memiliki pelabelan total antiajaib sisi. Bača dan kawan-kawan (2010) memaparkan bahwa graf reguler memiliki pelabelan total antiajaib sisi. Miller dan kawan-kawan (2011) memaparkan bahwa semua graf memiliki pelabelan (super) total antiajaib sisi dan semua graf memiliki pelabelan (super) total antiajaib titik. Nalliah dan Arumugam (2017) memaparkan bahwa graf gabung dari dua graf bintang memiliki pelabelan antiajaib sisi. Zhihe Liang (2017) memaparkan bahwa graf bipartite lengkap memiliki pelabelan antiajaib sisi. Ghaleppa dan kawan-kawan (2024) memaparkan bahwa graf $rK_{m,n}$ dan graf mP_n memiliki pelabelan total antiajaib sisi. Selanjutnya beberapa penelitian mengenai pelabelan total antiajaib total (*totally antimagic total labeling*) telah dilakukan. Miler dan Bača (2015) memaparkan bahwa graf lintasan, graf siklus, graf bintang, graf roda, graf pertemanan (*friendship graph*) $\mathcal{F}_n$, dan graf kipas (*fan graph*) F_n memiliki pelabelan total antiajaib total. Ajayi dan Akwu (2016) memaparkan bahwa graf tangga, graf prisma, dan graf petersen diperumum memiliki pelabelan total antiajaib total. Kemudian Ahmad dan Babujee (2021) memaparkan bahwa graf bipartit lengkap memiliki pelabelan total antiajaib total. Namun belum ada peneliti yang membahas tentang pelabelan total antiajaib total pada graf hasil operasi amalgamasi penuh dari l -copy graf reguler ($l \geq 1$) terhadap graf lintasan. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk memberikan pelabelan total antiajaib total pada graf hasil operasi amalgamasi titik penuh dari l -copy graf reguler ($l \geq 1$) dan graf lintasan dan menuangkan dalam bentuk tulisan tesis dengan judul "Pelabelan Total Antiajaib Total Dari Graf Hasil Operasi Amalgamasi Penuh Graf Reguler dan Graf Lintasan".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan label titik dan sisi pada graf hasil operasi amalgamasi titik penuh dari l -copy graf reguler ($l \geq 1$) terhadap graf lintasan sehingga memuat pelabelan total antiajaib total?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya membahas mengenai pelabelan total antiajaib total pada graf hasil operasi amalgamasi titik penuh dari l -copy graf reguler terhadap graf lintasan, dengan setiap titik pada l -copy graf reguler merupakan titik tetap dari l -copy graf reguler dan salah satu titik ujung dari graf lintasan merupakan titik tetap dari graf lintasan. Dalam penelitian ini dibatasi pada graf reguler terhubung yang memiliki pelabelan total (super) antiajaib sisi terurut.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bahwa graf hasil operasi amalgamasi titik penuh dari l -copy graf reguler terhadap graf lintasan memiliki pelabelan total antiajaib total.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini adalah menambah informasi mengenai pelabelan total antiajaib total dari graf hasil operasi amalgamasi titik penuh pada l -copy graf reguler terhadap graf lintasan.

1.6 Kajian Teori

Pada sub bab ini diberikan beberapa definisi dasar dan konsep dasar pada teori graf, terminologi graf, operasi amalgamasi graf, jenis-jenis graf, serta penjelasan mengenai pelabelan pada graf yang digunakan pada bab selanjutnya.

1.6.1 Konsep Dasar Graf

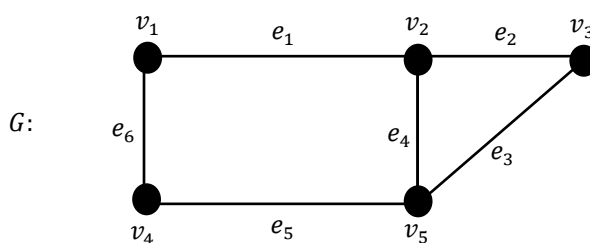
Berikut ini diberikan definisi dan konsep dasar dari suatu graf.

Definisi 1. Suatu graf G adalah pasangan himpunan $G = (V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan (yang mungkin kosong) pasangan tak terurut dari elemen-elemen di $V(G)$. Elemen di $V(G)$ disebut titik (vertex) dan elemen di $E(G)$ disebut sisi (edge). Pada suatu graf, $V(G)$ dan $E(G)$ disebut sebagai himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G (Balakrishnan & Ranganathan, 2012).

Banyaknya anggota dari $V(G)$ disebut *order* yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya anggota dari $E(G)$ disebut *size* yang dinotasikan dengan $|E(G)|$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan sisi yang menghubungkan u dan v biasanya ditulis $e = \{u, v\}$. Namun dalam penelitian ini, sisi $e = \{u, v\}$ hanya akan ditulis sebagai $e = uv$.

Contoh 1.

Diberikan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_5$, $e_4 = v_2v_5$, $e_5 = v_4v_5$, dan $e_6 = v_1v_4$, sehingga graf G dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Graf G

Karena $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 6$, maka *order* dari graf G adalah lima dan *size* dari graf G adalah enam.

1.6.2 Terminologi Graf

Terdapat beberapa terminologi (istilah) yang dipakai dalam memahami graf. Berikut ini beberapa terminologi (istilah) dalam graf yang akan digunakan dalam pengerjaan tugas akhir ini.

Definisi 2. Titik u dan v pada graf G disebut bertetangga (adjacent) jika terdapat suatu sisi e pada G yang menghubungkan titik u dan v di G . Lebih lanjut, titik u dan titik v disebut terkait (incident) dengan sisi e (Wilson, 1996).

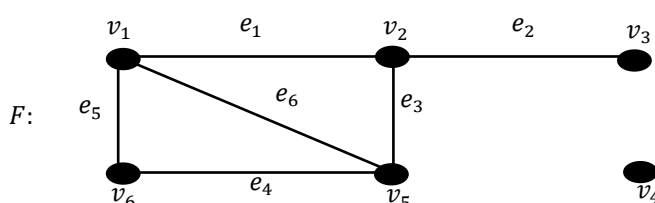
Definisi 3. Sisi e dan f pada graf G disebut sisi yang bertetangga (adjacent edges) jika kedua sisi tersebut terkait (incident) dengan suatu titik yang sama di G (Wilson, 1996).

Definisi 4. Derajat dari suatu titik v di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v dan dinotasikan dengan $\deg(v)$. Notasi $\Delta(G)$ merupakan notasi yang menyatakan derajat maksimum dari titik pada graf G dan $\delta(G)$ merupakan notasi dari derajat minimum dari titik pada graf G (Hasmawati, 2020).

Definisi 5. Suatu jalan pada graf G adalah barisan selang seling titik dan sisi dari G yaitu $W: v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_p, v_p$ yang dimulai dengan titik dan diakhiri dengan titik dengan v_0 dan v_p sebagai titik ujung dari W dan $e_i = v_{i-1}v_i, i = 0, 1, 2, \dots, p$. Jalan disebut tertutup jika $v_0 = v_p$. Jika $v_i \neq v_j$ untuk setiap $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$, maka W disebut lintasan. Graf yang hanya terdiri atas satu lintasan dengan n titik disebut sebagai graf lintasan dan dinotasikan dengan P_n . Panjang dari lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut (Balakrishnan & Ranganathan, 2012).

Contoh 2.

Diberikan graf F dengan $V(F) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(F) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_2v_5$, $e_4 = v_5v_6$, $e_5 = v_1v_6$, dan $e_6 = v_1v_5$, sehingga graf F dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2. Graf F

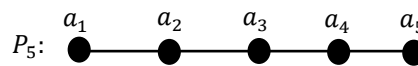
Sehingga, berdasarkan graf F pada Contoh 2. diperoleh:

- (i) Titik v_1 dan titik v_2 bertetangga, sedangkan titik v_1 dan v_3 tidak bertetangga.
- (ii) Sisi $e_1 = v_1v_2$ terkait dengan titik v_1 dan v_2 , sedangkan sisi e_1 tidak terkait dengan titik v_3 dan v_4 .
- (iii) Derajat dari setiap titik graf F pada Contoh 2. adalah $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_5) = 3$, $\deg(v_6) = 2$, $\deg(v_3) = 1$, dan $\deg(v_4) = 0$. Sehingga derajat maksimum dari graf F adalah $\Delta(F) = 3$ dan derajat minimum dari graf F adalah $\delta(F) = 0$.

- (iv) Graf F memiliki suatu lintasan $v_1 - v_3: v_1, e_1, v_2, e_2, v_3$ dengan panjang lintasan adalah dua. Lintasan lain pada graf F adalah $v_1 - v_6: v_1, e_1, v_2, e_3, v_5, e_4, v_6$ dengan panjang lintasan adalah tiga.

Contoh 3.

Diberikan graf P_5 dengan $V(P_5) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ dan $E(P_5) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_5\}$ sehingga P_5 dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. Graf P_5

Pada Gambar 3. merupakan graf lintasan P_5 yang memiliki lima titik dan panjang lintasan adalah empat.

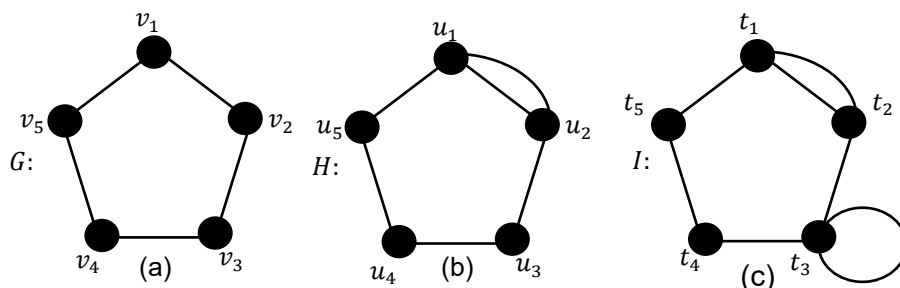
1.6.3 Jenis-Jenis Graf

Beberapa graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus dari setiap graf. Pada sub bab ini akan dipaparkan beberapa jenis graf yang berkaitan dengan penelitian ini.

Definisi 6. Suatu graf merupakan graf sederhana (simple graph) jika tidak mengandung gelang (loop) dan sisi ganda (multiple edges). Gelang (loop) adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama, sedangkan sisi ganda (multiple edges) adalah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama (Balakrishnan & Ranganathan, 2012).

Contoh 4.

Diberikan (a) graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$, (b) graf H dengan $V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan $E(H) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_5u_1, u_2u_1\}$ dan (c) graf I dengan $V(I) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ dan $E(I) = \{t_1t_2, t_2t_3, t_3t_4, t_4t_5, t_5t_1, t_2t_1, t_3t_3\}$, sehingga G , H , dan I dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. (a) Graf sederhana, (b) Graf tak sederhana, dan (c) Graf tak sederhana

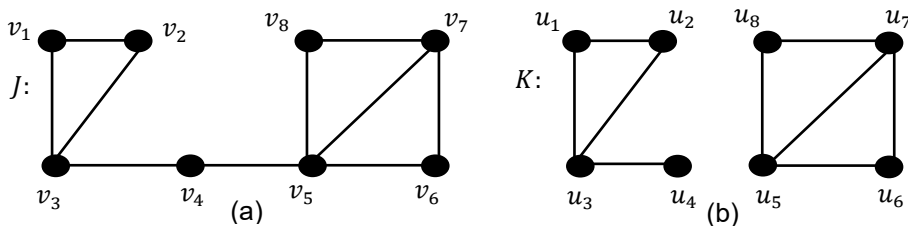
Pada Contoh 4., graf G merupakan graf sederhana karena dari Gambar 4. (a) terlihat bahwa graf G tidak memiliki gelang (loop) dan sisi ganda (multiple edges). Graf H bukan merupakan graf sederhana karena dari Gambar 4. (b) terlihat bahwa graf H

memiliki sisi berganda, yaitu sisi u_1u_2 dan sisi u_2u_1 yang sama-sama memiliki titik awal u_1 dan titik akhir u_2 . Graf I pada Gambar 4. (c) juga bukan merupakan graf sederhana karena memiliki gelang (loop), yaitu sisi t_3t_3 yang berawal dan berakhir di titik t_3 , selain itu graf I juga memiliki sisi berganda, yaitu sisi t_1t_2 dan sisi t_2t_1 .

Definisi 7. Suatu graf G disebut sebagai graf terhubung (connected graph) jika hanya jika untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$, terdapat suatu lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut di G (Wilson, 1996).

Contoh 5.

Diberikan (a) graf G dengan $V(J) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan $E(J) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8, v_6v_7, v_7v_8\}$, (b) graf K dengan $V(K) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ dan $E(K) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, u_3u_4, u_5u_6, u_5u_7, u_5u_8, u_6u_7, u_7u_8\}$, sehingga J dan K dapat digambarkan sebagai berikut.



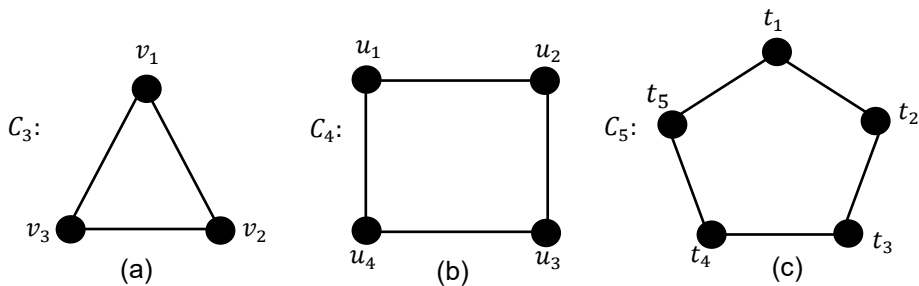
Gambar 5. (a) Graf terhubung, (b) Graf tak terhubung

Pada Contoh 5., graf J yang ditunjukkan pada Gambar 5. (a) merupakan graf terhubung karena untuk setiap dua titik pada graf J terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Graf K yang ditunjukkan pada Gambar 5. (b) bukan merupakan graf terhubung karena terdapat titik u_4 dan titik u_5 pada graf K namun tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Definisi 8. Misalkan $P_k: v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ adalah lintasan dengan order k dengan panjang $k - 1$ pada graf G . Siklus C_k pada G dengan panjang k adalah subgraf dengan himpunan titik $V(C_k) = V(P_k)$ dan himpunan sisi $E(C_k) = E(P_k) \cup \{v_kv_1\}$. Graf yang hanya terdiri atas satu siklus disebut graf siklus (Hasmawati, 2020).

Contoh 6.

Diberikan (a) graf C_3 dengan $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(C_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$, (b) graf C_4 dengan $V(C_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $E(C_4) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1\}$ dan (c) graf C_5 dengan $V(C_5) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ dan $E(C_5) = \{t_1t_2, t_2t_3, t_3t_4, t_4t_5, t_5t_1\}$, sehingga graf C_3 , C_4 , dan C_5 dapat digambarkan sebagai berikut.



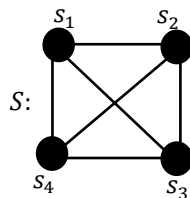
Gambar 6. (a) Graf siklus C_3 , (b) Graf siklus C_4 , (c) Graf siklus C_5

Pada Gambar 6. (a) merupakan graf siklus C_3 dengan panjang tiga, Gambar 6. (b) merupakan graf siklus C_4 dengan panjang empat, dan Gambar 6. (c) merupakan graf siklus C_5 dengan panjang lima. Pada graf siklus setiap titiknya berderajat dua.

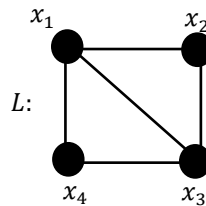
Definisi 9. Suatu graf G disebut sebagai graf reguler jika dan hanya jika derajat dari setiap titik pada graf G adalah sama. Lebih lanjut graf r -reguler adalah graf yang setiap titiknya berderajat r . Graf r -reguler dengan n titik memiliki sisi sebanyak $\frac{rn}{2}$ (Chartrand, 2004).

Contoh 7.

Diberikan graf S dengan $V(S) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ dan $E(S) = \{s_1s_2, s_2s_3, s_3s_4, s_4s_1, s_1s_3, s_2s_4\}$, dan graf L dengan $V(L) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E(L) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_3\}$, sehingga graf G dan L dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7. Graf S



Gambar 8. Graf L

Gambar 7. Adalah graf S yang merupakan graf 3-reguler dengan *order* empat. Gambar 8. yaitu graf L bukan merupakan graf reguler karena titik x_1 dan titik x_3 masing-masing berderajat tiga sedangkan titik x_2 dan x_4 berderajat dua, sehingga terdapat titik yang derajatnya tidak sama.

Beberapa jenis dari graf reguler antara lain graf siklus, yaitu graf yang setiap titiknya berderajat dua dan graf lengkap (*complete graph*) yaitu graf yang setiap titiknya bertetangga. Suatu graf lengkap dengan *order* n dan *size* m memiliki derajat setiap titiknya yaitu $n - 1$, sehingga banyaknya sisi (*size*) pada graf lengkap adalah $m = \frac{(n-1)n}{2}$. Graf lengkap dengan n titik disimbolkan dengan K_n (Chartrand, 2004).

Pada Gambar 7., graf G merupakan graf lengkap dengan empat titik karena setiap titiknya bertetangga, sehingga graf $G = K_4$.

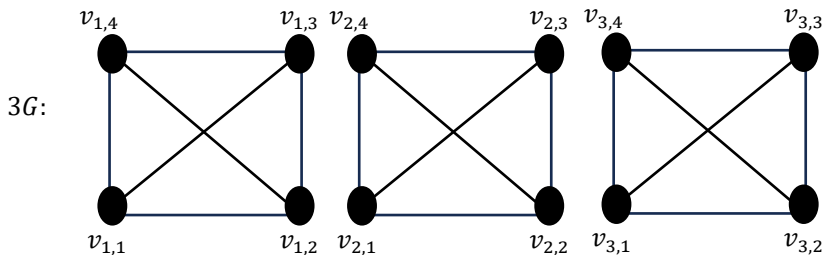
1.6.4 Operasi Pada Graf

Pada sub bab ini, operasi dalam graf yang akan dijelaskan adalah operasi gabung dan operasi amalgamasi.

Definisi 10. Misalkan diberikan dua buah graf, yaitu graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi berturut-turut adalah $V(G)$ dan $E(G)$ dan graf H dengan himpunan titik dan himpunan sisi berturut-turut adalah $V(H)$ dan $E(H)$. Gabungan dari graf G dan graf H yang dinotasikan dengan $G \cup H$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Lebih lanjut graf $\bigcup_{k=1}^l G^k$ dengan $G^1 = G^2 = \dots = G^l = G$ yang dinotasikan dengan lG atau l -copy graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(lG) = \bigcup_{k=1}^l V(G^k)$ dan himpunan sisi $E(lG) = \bigcup_{k=1}^l E(G^k)$ dengan $l \in \mathbb{Z}^+$ (Chartrand, 2004).

Contoh 8.

Diberikan graf G^1, G^2 , dan G^3 ($G^1 = G^2 = G^3 = G$) dengan himpunan titik dan himpunan sisi berturut-turut $V(G^k) = \{v_{kj} | k = 1, 2, 3 \text{ dan } j = 1, 2, 3, 4\}$ dan $E(G^k) = \{v_{kj}v_{kj+1}, v_{k,4}v_{k,1}, v_{k,1}v_{k,3}v_{k,2}v_{k,4} | k = 1, 2, 3 \text{ dan } j = 1, 2, 3\}$ maka 3-copy graf G yang dinotasikan dengan graf $3G$ adalah graf dengan himpunan titik $V(3G) = \{v_{kj} | k = 1, 2, 3 \text{ dan } j = 1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan sisi $E(3G) = \{v_{kj}v_{kj+1}, v_{k,4}v_{k,1}, v_{k,1}v_{k,3}v_{k,2}v_{k,4} | k = 1, 2, 3 \text{ dan } j = 1, 2, 3\}$ dan dapat ditunjukkan pada Gambar 9 sebagai berikut.



Gambar 9. 3-copy graf G atau graf $3G$

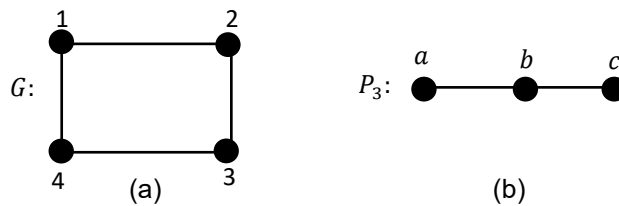
Definisi 11. Misalkan G adalah graf terhubung dengan titik tetap $v \in V(G)$ dan H adalah graf terhubung dengan titik tetap $u \in V(H)$. Operasi amalgamasi titik dari graf G terhadap graf H yang dinotasikan dengan $Amal(G; H: v = u)$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil semua titik dan sisi pada graf G dan H serta menggabungkan titik v dan u ($v = u$) menjadi satu titik (Hasmawati, 2020).

Definisi 12. Misalkan G adalah graf terhubung berorder n dengan titik-titik $v_i \in V(G)$ dengan setiap i berbeda ($i = 1, 2, \dots, n$) dan graf terhubung H^j dengan $j = 1, 2, \dots, k$ dan $k \leq n$ dengan masing-masing titik tetap dari H^j adalah u_j ($j = 1, 2, \dots, k; k \leq n$). Operasi Amalgamasi multi titik dari graf G terhadap graf-graf $H^1, H^2, \dots, H^k$ adalah operasi yang dilakukan dengan mengambil semua titik dan sisi graf dari G dan graf $H^1, H^2, \dots, H^k$ dengan menggabungkan titik v_x dan u_x ($v_x = u_x$) menjadi satu titik dengan $x = 1, 2, \dots, k$. Amalgamasi multi titik dari graf G dengan order n terhadap graf $H^1, H^2, \dots, H^k$ dinotasikan dengan $Multi\ Amal(G^n; H^1, H^2, \dots, H^k: v_x = u_x | 1 \leq x \leq k)$. Jika $k = n$, graf $Multi\ Amal(G^n; H^1, H^2, \dots, H^k: v_x = u_x | 1 \leq x \leq k)$ disebut sebagai amalgamasi titik

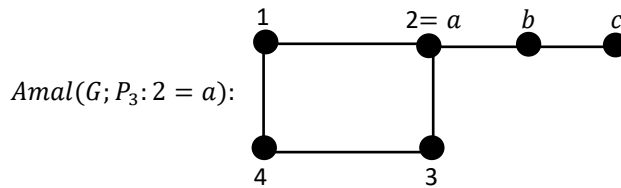
penyuh dan dinotasikan dengan $Amalpenyuh(G^n; H^1, H^2, \dots, H^n; v_i = u_i | 1 \leq i \leq n)$. Lebih lanjut jika $H^i = H^j = H$ untuk setiap i dan j maka graf amalgamasi titik penyuh hanya dinotasikan dengan $Amalpenyuh(G; nH; v_i = u_i | 1 \leq i \leq n)$ (Hasmawati, 2020).

Contoh 9.

Diberikan graf G dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $E(G) = \{12, 23, 34, 41\}$ dan graf P_3 dengan $V(P_3) = \{a, b, c\}$ dan $E(P_3) = \{ab, bc\}$ yang masing-masing ditunjukkan pada Gambar 10. (a) dan (b). Hasil operasi amalgamasi titik dari graf G terhadap graf P_3 dengan titik 2 pada graf G adalah titik tetap dari graf G , dan titik a pada graf P_3 adalah titik tetap dari graf P_3 yang dinotasikan dengan graf $Amal(G; P_3; 2 = a)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik 2 dan titik a menjadi satu titik, sehingga himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $Amal(G; P_3; 2 = a)$ masing-masing adalah $V(Amal(G; P_3; 2 = a)) = \{1, 2 = a, 3, 4, b, c\}$ dan $E(Amal(G; P_3; 2 = a)) = \{12, 23, 34, 41, 2b, bc\}$ yang ditunjukkan pada Gambar 11. sebagai berikut.

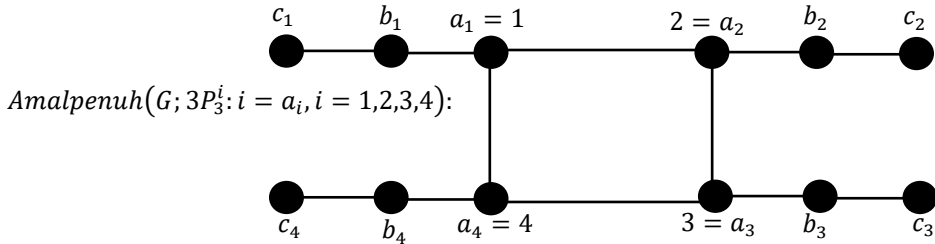


Gambar 10. (a) Graf G , (b) Graf P_3



Gambar 11. Graf $Amal(G; P_3; 2 = a)$

Hasil operasi amalgamasi titik penyuh dari graf G terhadap graf P_3 dengan titik tetap dari graf G adalah setiap titik dari graf G dan titik tetap dari graf P_3 adalah salah satu titik ujung dari graf P_3 yang dinotasikan dengan $Amalpenyuh(G; 3P_3; i = a_i | 1 \leq i \leq 4)$ adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik 1 dan titik a_1 menjadi satu titik, titik 2 dan titik a_2 menjadi satu titik, titik 3 dan titik a_3 menjadi satu titik, serta titik 4 dan titik a_4 menjadi satu titik, sehingga himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $Amalpenyuh(G; 3P_3; i = a_i | 1 \leq i \leq 4)$ masing-masing adalah $V(Amalpenyuh(G; 3P_3; i = a_i | 1 \leq i \leq 4)) = \{i = a_i, b_i, c_i | i = 1, 2, 3, 4\}$ dan $E(Amalpenyuh(G; 3P_3; i = a_i | 1 \leq i \leq 4)) = \{12, 23, 34, 41, ib_i, b_i c_i | i = 1, 2, 3, 4\}$ yang ditunjukkan pada Gambar 12. sebagai berikut.



Gambar 12. Graf $Amalpenuh(G; 3P_3^i: i = a_i, i = 1, 2, 3, 4)$

1.6.5 Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

Dalam sub bab ini akan diberikan definisi dari fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

Definisi 13. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (satu-satu) jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ (Andriani, 2019).

Definisi 14. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif (pada) jika untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$, sedemikian sehingga $f(x) = y$ (Andriani, 2019).

Definisi 15. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif jika f adalah fungsi injektif dan f adalah fungsi surjektif (Andriani, 2019).

Lemma 1. Misalkan $f: A \rightarrow B; |A| = m, |B| = n$ berhingga, $m, n \in \mathbb{N}$. Jika $|R(f)| = |A|$ dan $R(f) = B$, maka f adalah fungsi bijektif (Taemnanu, 2022).

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa f adalah bijektif, akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsi injektif dan f adalah fungsi surjektif. Diketahui $f: A \rightarrow B$, misalkan $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dan $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ berhingga dengan $m, n \in \mathbb{N}$.

- f fungsi injektif (satu-satu)

Misalkan $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, maka $R(f) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)\}$. Ambil sebarang $x_i, x_j \in A$ dengan $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq m$. Karena $|R(f)| = |A|$ dan $i \neq j$ akibatnya:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \neq \dots \neq f(x_m)$$

Jadi $f(x_i) \neq f(x_j)$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq m$ dengan $i \neq j$.

$\therefore$ Jadi, f adalah fungsi injektif.

- f fungsi surjektif (pada)

Misalkan $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dan $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Karena $R(f) = B$, $|R(f)| = m$, dan $|B| = n$ akibatnya $m = n$. Ambil sebarang $y \in B$. Karena $y \in B$, akibatnya $y \in R(f)$. Sehingga terdapat $x \in A$ dan $f(x) = y$.

$\therefore$ Jadi, f adalah fungsi surjektif.

Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah fungsi bijektif karena telah memenuhi sifat-sifat fungsi injektif dan surjektif.

1.6.6 Pelabelan Graf

Dalam sub bab ini akan diberikan definisi dari pelabelan total antiajaib, pelabelan total antiajaib-titik, pelabelan total antiajaib-sisi, dan pelabelan total antiajaib total, serta bobot titik dan bobot sisi dari suatu graf.

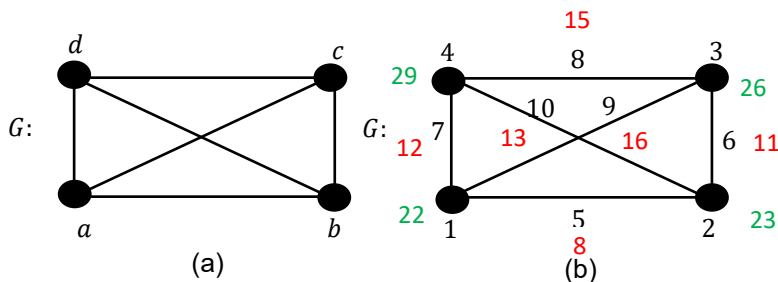
Definisi 16. Misalkan G adalah suatu graf. Pelabelan total (total labeling) dari G adalah pemetaan bijektif f yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi dari G ke himpunan $\{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$. Bobot suatu titik v dari graf G adalah jumlah dari label titik v dan label semua sisi yang terkait dengan titik v tersebut, yaitu $wt(v) = f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(uv)$. Bobot suatu sisi $e = uv$ dari graf G adalah jumlah dari label titik u , label titik v , dan label sisi $e = uv$, yaitu $wt(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$. Lebih lanjut, jika f memetakan titik-titik pada graf G ke bilangan asli terkecil yaitu mulai dari 1 sampai dengan banyaknya titik pada graf G , maka f disebut sebagai super dan f disebut terurut (ordered) jika $f(u) < f(v)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$ sedemikian sehingga $wt(u) \leq wt(v)$ (Miler & Bača, 2019).

Definisi 17. Suatu pelabelan total (total labeling) pada graf G disebut sebagai pelabelan total antiajaib-titik (vertex-antimagic total labeling) pada graf G jika bobot semua titik pada graf G berbeda. Suatu pelabelan total pada graf G disebut sebagai pelabelan total antiajaib-sisi (edge-antimagic total labeling) pada graf G jika bobot semua sisi pada graf G berbeda (Ahmed & Babujee, 2021).

Definisi 18. Jika suatu pelabelan total pada graf G memenuhi pelabelan total antiajaib-titik (bobot semua titik pada graf G berbeda) dan memenuhi pelabelan total antiajaib-sisi (bobot semua sisi pada graf G berbeda) maka graf G memiliki pelabelan total antiajaib total (totally antimagic total labeling) (Miler & Bača, 2015).

Contoh 10.

Diberikan graf G dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{ab, bc, cd, da\}$ yang ditunjukkan pada Gambar 13. sebagai berikut.



Gambar 13. (a) Graf G , (b) Pelabelan Total Antiajaib Total Pada Graf G

Pada Gambar 13. (a), merupakan graf G . Kemudian f memetakan himpunan titik dan himpunan sisi graf G ke suatu himpunan bilangan asli, yaitu $f(V \cup E) \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$. Sehingga, label setiap titik dari graf G pada gambar 13. adalah:

$$f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 4$$

dan label setiap sisi dari graf G pada Gambar 13. adalah:

$$f(ab) = 5, f(bc) = 6, f(cd) = 8, f(da) = 7, f(ac) = 9, f(bd) = 10.$$

Sehingga, bobot setiap titik dari graf G adalah:

$$wt(a) = f(a) + f(ab) + f(da) + f(ac) = 1 + 5 + 7 + 9 = 22$$

$$wt(b) = f(b) + f(ab) + f(bc) + f(bd) = 2 + 5 + 6 + 10 = 23$$

$$wt(c) = f(c) + f(bc) + f(cd) + f(ac) = 3 + 6 + 8 + 9 = 26$$

$$wt(d) = f(d) + f(da) + f(cd) + f(bd) = 4 + 7 + 8 + 10 = 29$$

dan bobot setiap sisi dari graf G adalah:

$$wt(ab) = f(a) + f(b) + f(ab) = 1 + 2 + 5 = 8$$

$$wt(bc) = f(b) + f(c) + f(bc) = 2 + 3 + 6 = 11$$

$$wt(cd) = f(c) + f(d) + f(cd) = 3 + 4 + 8 = 15$$

$$wt(da) = f(a) + f(d) + f(da) = 1 + 4 + 7 = 12$$

$$wt(ac) = f(a) + f(c) + f(ac) = 1 + 3 + 9 = 13$$

$$wt(bd) = f(b) + f(d) + f(bd) = 2 + 4 + 10 = 16.$$

Diperoleh bobot setiap titik dari graf G berbeda, dan bobot setiap sisi dari graf G juga berbeda, sehingga pelabelan f pada graf G merupakan pelabelan total antiajaib total (*totally antimagic total labeling*). Karena f memetakan himpunan titik dari G ke $\{1,2,3,4\}$ maka f adalah super dan $f(u) < f(v)$ sedemikian sehingga $wt(u) < wt(v)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$, ini berarti f terurut (*ordered*) atau dengan kata lain f adalah pelabelan (*super*) total antiajaib total dan terurut pada G .

BAB 2

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini, akan dijelaskan mengenai jenis penelitian dan tahapan penelitian yang digunakan dalam penelitian ini.

2.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan sejumlah buku dan jurnal yang berkaitan dengan masalah dan tujuan penelitian. Beberapa langkah yang dilakukan dengan cara menelaah, mencermati, dan membandingkan sumber kepustakaan untuk memperoleh informasi.

2.2 Tahapan Penelitian

Pada penelitian ini terdapat beberapa tahapan dalam menentukan pelabelan total antiajaib total dari hasil operasi amalgamasi penuh dari l -copy graf r -reguler terhubung dengan n titik ($n \geq 3, r \geq 2, l \geq 1$) terhadap graf P_m dengan m titik ($m \geq 2$), yaitu sebagai berikut:

- 1) Mendefinisikan graf hasil operasi amalgamasi penuh dari l -copy graf reguler terhadap graf lintasan P_m .
- 2) Memberikan label titik dan sisi dari beberapa hasil operasi amalgamasi penuh dari l -copy graf reguler terhubung terhadap graf lintasan P_m .
- 3) Mempertahankan pola pemberian label titik dan label sisi dari beberapa hasil operasi amalgamasi penuh dari l -copy graf reguler terhubung terhadap graf lintasan P_m .
- 4) Mendefinisikan fungsi pelabelan total antiajaib total pada hasil operasi amalgamasi penuh pada l -copy graf reguler terhubung dan graf lintasan P_m .
- 5) Menghitung bobot titik dan sisi serta menunjukkan bobot dari setiap titik berbeda dan bobot dari setiap sisi berbeda.

2.3 Diagram Alir Penelitian

