

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dinamika populasi merupakan suatu kajian mengenai perubahan dalam suatu populasi yang terjadi karena adanya interaksi antara individu ataupun dengan lingkungannya (Syarif dkk., 2022). Populasi memiliki peran penting dalam ekologi, memengaruhi keseimbangan ekosistem dan keberlanjutan lingkungan. Pengetahuan dan pemahaman terkait dinamika populasi sangat diperlukan dalam upaya konservasi dan pengelolaan sumber daya alam agar tetap terjaga. Dalam ilmu matematika, dinamika populasi dimodelkan menggunakan persamaan diferensial dengan melibatkan satuan waktu, baik kontinu maupun diskrit (Yusrianto dkk., 2019). Salah satu model matematika yang mempelajari dan menggambarkan dinamika populasi adalah model mangsa pemangsa, yaitu model Lotka-Volterra. Model ini mengasumsikan dua spesies berbeda sedang terjadi interaksi, salah satu spesies merupakan mangsa dan spesies lainnya merupakan pemangsa yang bertahan hidup dengan memangsa (Syarif dkk., 2022). Dalam dinamika populasi, proses pemangsaan dinyatakan dalam bentuk fungsi respons. Fungsi respons dalam ekologi diartikan sebagai jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan. Pada tahun 1953, C.S. Holling memperkenalkan tiga jenis fungsi respons yang dikenal sebagai fungsi respons Holling tipe I, tipe II, dan tipe III (Mortoja dkk., 2018).

Fenomena kompleks seperti efek Allee yang muncul dalam beberapa kasus dapat mengubah perilaku dan pertumbuhan populasi, serta memperkenalkan tantangan baru dalam pemodelan matematika. Efek ini pertama kali diperkenalkan oleh Warder Clyde Allee pada tahun 1931 (Allee, 1931). Efek Allee didefinisikan sebagai hubungan positif antara setiap komponen kebugaran individu dengan jumlah atau kepadatan populasi. Efek ini merupakan fenomena biologi yang menunjukkan korelasi antara laju pertumbuhan dan kepadatan populasi. Efek Allee diuraikan menjadi dua, yaitu efek Allee komponen dan demografis. Efek Allee komponen menggambarkan hubungan positif antara komponen terukur apa pun dari kebugaran individu dan kepadatan populasi. Di samping itu, efek Allee demografis menggambarkan hubungan positif antara total kebugaran individu (biasanya diukur berdasarkan tingkat pertumbuhan populasi per kapita) dan kepadatan populasi (Kuperman & Abramson, 2021).

Pengembangan model matematika untuk menjelaskan efek Allee telah dilakukan dalam beberapa tahun terakhir. Pada tahun 1999, Courchamp dkk. melakukan penelitian untuk mengetahui bagaimana efek Allee memengaruhi dinamika populasi. Model matematika yang dikonstruksi melibatkan persamaan diferensial yang menggambarkan hubungan antara tingkat reproduksi, tingkat kematian, kepadatan populasi, dan ambang batas. Pengujian sensitivitas terhadap parameter-parameter dalam model untuk memahami seberapa kuat efek Allee dalam memengaruhi dinamika populasi. Pada tahun 2016, Gui-Quan Sun mengembangkan model matematika dengan beberapa studi kasus, di antaranya analisis stabilitas model satu spesies dengan efek Allee, model satu spesies dengan efek Allee dan pemanenan, model mangsa pemangsa dengan efek Allee dan difusi, serta model mangsa pemangsa dengan efek Allee dan faktor stokastik.

Kemudian, di tahun 2020 Teekam Singh dkk. meneliti sistem reaksi difusi mangsa pemangsa dengan mempertimbangkan kerja sama berburu spesies pemangsa dan fungsi respons Holling tipe I. Model matematika diformulasikan sebagai sistem persamaan diferensial biasa non-linear dalam domain spasial. Penelitian ini menggunakan analisis stabilitas linear untuk mendapatkan syarat-syarat ketidakstabilan difusi dan mengidentifikasi domain yang sesuai parameter kontrol.

Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, dinamika populasi dapat mengalami perubahan pertumbuhan dengan adanya fenomena efek Allee. Hal tersebut menarik untuk dikaji dengan mempertimbangkan faktor lain seperti fungsi respons Holling tipe I dan perilaku kooperatif pada pemangsa. Sehingga, kajian ini dituangkan dalam sebuah karya ilmiah yang berjudul **Analisis Kestabilan dan Simulasi Numerik Model Mangsa Pemangsa dengan Efek Allee dan Kerja Sama Berburu Menggunakan Fungsi Respons Holling Tipe I**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah dipaparkan di atas, maka rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana efek Allee memengaruhi dinamika populasi pada model mangsa pemangsa, khususnya ketika dikombinasikan dengan fungsi respons Holling tipe I?
2. Bagaimana perilaku kooperatif pada spesies pemangsa memengaruhi stabilitas dan perubahan dinamika populasi dalam model matematis?
3. Bagaimana parameter-parameter dalam model yang melibatkan efek Allee dan fungsi respons Holling tipe I dapat memengaruhi hasil analisis stabilitas dan pemodelan?
4. Bagaimana mengembangkan sebuah model matematika untuk menangkap interaksi antara efek Allee dan fungsi respons Holling, serta memprediksi dinamika populasi yang dihasilkan?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini berfokus pada pengaruh efek Allee dan fungsi respons Holling tipe I. Model lain dalam dinamika populasi tidak dibahas secara rinci. Asumsi yang digunakan mencakup interaksi dua spesies tanpa memperhitungkan faktor migrasi atau lingkungan eksternal. Perilaku kooperatif pemangsa difokuskan pada kerja sama dalam perburuan. Analisis dalam penelitian terbatas pada parameter-parameter yang relevan dengan efek Allee dan fungsi respons Holling.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis pengaruh efek Allee terhadap dinamika populasi pada model mangsa pemangsa, khususnya ketika dikombinasikan dengan fungsi respons Holling tipe I.
2. Menganalisis perilaku kooperatif pada spesies pemangsa memengaruhi stabilitas dan perubahan dinamika populasi dalam model matematis.

3. Menganalisis pengaruh parameter-parameter dalam model yang melibatkan efek Allee dan fungsi respons Holling tipe I terhadap hasil analisis stabilitas dan pemodelan.
4. Mengembangkan sebuah model matematika untuk menangkap interaksi antara efek Allee dan fungsi respons Holling, serta memprediksi dinamika populasi yang dihasilkan.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat dalam pengembangan model matematika yang lebih komprehensif. Model yang dikembangkan dapat meningkatkan pemahaman tentang interaksi dalam ekosistem, khususnya dalam menjaga stabilitas dan keseimbangan populasi. Hasil penelitian sebagai landasan ilmiah dalam upaya konservasi spesies serta pengelolaan sumber daya alam, terutama dalam memahami kondisi-kondisi yang dapat menyebabkan kepunahan atau ledakan populasi. Secara praktis, temuan ini berpotensi diterapkan dalam berbagai bidang seperti pertanian, perikanan, dan pengelolaan satwa liar, di mana interaksi mangsa pemangsa memainkan peran penting dalam strategi pengelolaan dan kebijakan.

1.6 Landasan Teori

Pada subbab ini, akan dijelaskan beberapa teori yang menjadi dasar dan pendukung dalam penelitian ini. Teori-teori yang diuraikan bertujuan memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai konsep dan metode yang digunakan dalam analisis matematika.

1.6.1 Dinamika Populasi

Dinamika populasi adalah perubahan jumlah individu dalam suatu populasi dari waktu ke waktu yang dipengaruhi oleh berbagai faktor, seperti kelahiran, kematian, dan migrasi. Faktor-faktor yang terjadi dalam populasi seperti angka kelahiran, angka kematian, dan migrasi dapat memengaruhi kepadatan populasi. Densitas suatu populasi atau kepadatan populasi merupakan suatu nilai yang menyatakan ukuran jumlah atau banyaknya individu dalam populasi. Populasi berperan penting dalam ekologi, memengaruhi keseimbangan ekosistem dan keberlanjutan lingkungan. Pemahaman tentang dinamika populasi menjadi kunci dalam upaya konservasi dan pengelolaan sumber daya alam (Krebs, 2014).

Salah satu konsep utama dalam dinamika populasi adalah tingkat pertumbuhan populasi, yang mengukur perubahan jumlah individu pada periode waktu tertentu dalam populasi (Smith & Smith, 2015). Tingkat tersebut dapat bersifat positif yang berarti populasi bertambah dan negatif yang berarti populasi menurun. Salah satu model matematika yang sering digunakan untuk menggambarkan dinamika populasi adalah model pertumbuhan logistik (Krebs, 2009). Model ini mempertimbangkan bahwa sumber daya, seperti makanan, air, dan tempat berlindung, bersifat terbatas. Model pertumbuhan logistik mengasumsikan bahwa pertumbuhan populasi akan melambat seiring meningkatnya jumlah populasi, mendekati apa yang disebut sebagai *carrying capacity*,

yaitu batas maksimum populasi yang dapat ditopang oleh lingkungan tanpa merusak ekosistem.

Interaksi antar spesies dalam dinamika populasi juga berperan penting, misalnya hubungan antara mangsa dan pemangsa yang secara signifikan dapat memengaruhi populasi suatu spesies. Jika populasi mangsa menurun drastis, pemangsa akan kekurangan makanan yang berakibat penurunan populasi pemangsa (Levins, 1969). Sebaliknya, jika populasi mangsa meningkat, pemangsa akan memperoleh lebih banyak sumber makanan untuk meningkatkan populasi. Siklus ini sering kali menciptakan fluktuasi populasi yang berkala dan saling berhubungan. Faktor lain yang memengaruhi adalah perubahan lingkungan, termasuk perubahan iklim, bencana alam, maupun aktivitas manusia, seperti deforestasi dan urbanisasi (Lande & Orzack, 1988). Perubahan seperti ini dapat mengubah ketersediaan sumber daya, habitat, dan bahkan iklim mikro suatu wilayah, yang pada akhirnya memengaruhi kemampuan suatu spesies untuk bertahan hidup dan bereproduksi. Stres lingkungan, seperti perubahan suhu ekstrem atau polusi, juga dapat mengurangi daya tahan populasi.

Kepunahan dan invasi spesies adalah dua fenomena penting lainnya dalam dinamika populasi. Kepunahan terjadi ketika suatu spesies menurun hingga tidak ada lagi individu yang tersisa. Hal ini dapat disebabkan oleh perubahan lingkungan yang drastis, perburuan berlebihan, atau persaingan dengan spesies invasif. Spesies invasif merupakan organisme yang diperkenalkan ke ekosistem baru, tanpa adanya pemangsa alami atau pesaing dapat dengan cepat memperluas populasinya. Dalam konteks biologi konservasi, memahami dinamika populasi sangat penting untuk mengembangkan strategi yang efektif dalam melindungi spesies yang terancam punah (Shaffer, 1981). Dengan menggunakan model dinamika populasi, ilmuwan dapat memproyeksikan bagaimana populasi suatu spesies mungkin berkembang di masa depan dan merancang intervensi untuk menjaga stabilitas ekosistem. Secara keseluruhan, dinamika populasi mencerminkan keseimbangan yang kompleks antara berbagai faktor yang memengaruhi kelangsungan hidup dan reproduksi spesies. Memahami dinamika ini memberikan wawasan penting tentang bagaimana populasi spesies berinteraksi dengan lingkungannya dan satu sama lain, serta bagaimana ekosistem dapat berubah dari waktu ke waktu.

1.6.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah sistem persamaan yang melibatkan variabel terikat dan turunannya terhadap variabel bebas. Persamaan diferensial sangat penting dalam bidang matematika untuk rekayasa, sebab banyak hukum yang muncul secara matematis dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Sedangkan berdasarkan kelinearannya, sistem persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi sistem persamaan diferensial linear dan nonlinear. Persamaan diferensial orde satu dengan variabel x dituliskan dalam bentuk

$$a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = F(t). \quad (1)$$

Persamaan diferensial orde satu dengan dua fungsi x dan y tidak diketahui dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t) \frac{dy}{dt} + a_3(t)x + a_4(t)y &= F_1(t), \\ b_1(t) \frac{dx}{dt} + b_2(t) \frac{dy}{dt} + b_3(t)x + b_4(t)y &= F_2(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Solusi dari Persamaan (2) adalah pasangan terurut dua fungsi real (f, g) sedemikian sehingga $x = f(t)$, $y = g(t)$ memenuhi kedua persamaan (2) dengan interval $a \leq t \leq b$. Secara umum, persamaan diferensial orde n dituliskan sebagai berikut

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = F(t). \quad (3)$$

Kasus yang terjadi seperti Persamaan (2) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + F_2(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Bentuk ini adalah bentuk sederhana dari persamaan diferensial orde satu dengan dua fungsi (x, y) tidak diketahui. Bentuk standar dari n sistem persamaan diferensial dengan n fungsi tidak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$ dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Bentuk lain dari Persamaan (5) juga dapat ditulis dalam bentuk (Ross, 2004)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (6)$$

1.6.3 Model Mangsa Pemangsa dengan Pertumbuhan Logistik

Model mangsa pemangsa merupakan satu dari sekian banyak model interaksi antara makhluk hidup, di mana terdapat interaksi mangsa dan pemangsa dalam suatu ekosistem (Yulfani & Winanda, 2024). Interaksi ini menggambarkan hubungan dinamis di mana suatu populasi merupakan mangsa, sementara populasi lainnya sebagai

pemangsa yang memangsa untuk bertahan hidup (Panigoro & Rahmi, 2018). Model ini berfungsi sebagai kerangka dalam memprediksi fluktuasi populasi dan keseimbangan ekosistem yang lebih luas. Salah satu model sederhana yang sering digunakan untuk menggambarkan dinamika mangsa pemangsa adalah model Lotka-Volterra, yang dikembangkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra pada awal abad ke-20. Model ini terdiri dari dua persamaan diferensial non-linear yang menjelaskan bagaimana populasi mangsa dan pemangsa berubah seiring waktu. Secara umum, persamaan dasar model Lotka-Volterra, yaitu (Kim dkk., 2010)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y, \quad (8)$$

dengan x menyatakan ukuran populasi mangsa; y menyatakan ukuran populasi pemangsa; α menyatakan laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa; β menyatakan laju predasi; δ menyatakan efisiensi konversi dari mangsa ke pemangsa; dan γ menyatakan laju kematian pemangsa.

Persamaan (7) menggambarkan pertumbuhan populasi mangsa. Dalam ketidakhadiran pemangsa, populasi mangsa akan tumbuh secara eksponensial dengan laju α . Namun, ketika pemangsa hadir, populasi mangsa akan berkurang seiring tingkat keberhasilan pemangsa dalam memangsa, yang diwakili βxy . Sementara itu, Persamaan (8) menggambarkan populasi pemangsa. Dalam ketidakhadiran mangsa, populasi pemangsa akan menurun dengan laju γ . Namun, ketika mangsa hadir, populasi pemangsa akan meningkat seiring dengan jumlah mangsa yang ditangkap, yang diwakili δxy .

Salah satu prediksi utama dari Lotka-Volterra menyatakan bahwa populasi mangsa pemangsa akan mengalami osilasi periodik. Ketika populasi mangsa meningkat, pemangsa akan memiliki lebih banyak sumber makanan yang menyebabkan populasi pemangsa meningkat. Namun, peningkatan populasi pemangsa akan menyebabkan penurunan populasi mangsa karena meningkatnya predasi. Ketika populasi mangsa menurun, pemangsa akan kesulitan memperoleh makanan sehingga populasi pemangsa juga akan mengalami penurunan. Siklus ini akan berulang secara periodik, menciptakan pola fluktuasi populasi yang saling terkait (Panigoro & Rahmi, 2018).

Namun, model Lotka-Volterra hanya merupakan representasi ideal dari dinamika mangsa pemangsa yang didasarkan pada beberapa asumsi sederhana, termasuk bahwa laju predasi linear terhadap jumlah mangsa dan tidak ada faktor lain, seperti perubahan lingkungan atau kompetisi antar spesies yang memengaruhi populasi. Dalam kenyataannya, populasi mangsa tidak selamanya meningkat atau populasi pemangsa tidak selamanya menurun, tetapi dapat terjadi jika populasi mangsa meningkat, maka angka pertumbuhan cenderung menurun. Bahkan untuk populasi yang cukup besar, bukan mustahil angka pertumbuhannya negatif. Hal ini disebabkan oleh faktor seperti daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) (Soleh dkk., 2023). Misalkan dalam populasi terdapat sebanyak $x(t)$ individu mangsa dan daya dukung lingkungan dilambangkan dengan k sehingga model Lotka-Volterra menjadi (Kim dkk., 2010)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha \left(1 - \frac{x}{k}\right)x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y.\end{aligned}\tag{9}$$

Dinamika mangsa pemangsa tidak hanya penting dalam pemahaman ekologi dasar, tetapi juga dalam penerapan praktis. Misalnya, pemahaman tentang interaksi mangsa pemangsa ini telah digunakan dalam pengendalian biologis untuk mengelola populasi hama melalui pengenalan pemangsa alami. Selain itu, model ini juga digunakan untuk memahami dampak dari perubahan lingkungan, seperti hilangnya habitat atau perubahan iklim terhadap keseimbangan populasi spesies. Secara keseluruhan, model mangsa pemangsa memberikan wawasan penting tentang bagaimana interaksi antar spesies memengaruhi dinamika populasi dan kestabilan ekosistem. Sementara model Lotka-Volterra dan semacamnya sangat berguna, mereka harus diterapkan dengan pertimbangan terhadap kondisi nyata yang terjadi di alam dan lebih kompleks.

1.6.4 Fungsi Respons Holling dengan Kerja Sama Berburu

Fungsi respons mengacu pada meningkatnya populasi pemangsa atau menurunnya populasi mangsa saat berinteraksi. Fungsi respons adalah tingkat predasi ataupun daya makan pemangsa pada jumlah makanan atau mangsa (Ni'mah & Savitri, 2022). Pada tahun 1953, Holling memperkenalkan fungsi respons yang dikenal sebagai fungsi respons Holling tipe I, tipe II, dan tipe III. Fungsi respons Holling tipe I terjadi ketika pemangsa bersifat pasif di mana saat populasi mangsa meningkat, maka akan meningkat juga daya konsumsi pemangsa (Ni'mah & Savitri, 2022). Persamaan dari fungsi respons Holling tipe I diberikan sebagai (Murray dkk., 2013)

$$p(x) = mx,\tag{10}$$

dengan $p(x)$ menyatakan fungsi respons Holling tipe I, m menyatakan laju penangkapan mangsa oleh pemangsa, dan x menyatakan kepadatan populasi mangsa (Sholihah, 2020).

Fungsi respons Holling tipe II terjadi ketika pemangsa bersifat aktif dalam mencari mangsa serta membutuhkan waktu untuk mencerna mangsa tersebut. (Ni'mah & Savitri, 2022). Saat kepadatan populasi mangsa tinggi, pemangsa membutuhkan waktu yang lebih singkat dalam mencari makanan, sehingga hanya menghabiskan waktu dalam menangani mangsa termasuk membunuh, memakan, dan mencerna. Pemangsa kemudian kenyang ketika laju pemangsaan mangsa mencapai tingkat tertinggi (Denny, 2014). Adapun persamaan dari fungsi respons Holling tipe II diberikan sebagai (Murray dkk., 2013)

$$p(x) = \frac{mx}{1 + mh x},\tag{11}$$

dengan h menyatakan waktu yang dibutuhkan pemangsa dalam menangani mangsa. Fungsi respons Holling tipe III mirip dengan Holling tipe II. Bedanya, fungsi respons Holling tipe III merupakan fungsi sigmoidal yang terjadi ketika populasi mangsa

berkurang sehingga pemangsa mencari populasi mangsa yang lain untuk dimangsa (Ni'mah & Savitri, 2022). Persamaan dari fungsi respons Holling tipe III diberikan sebagai (Denny, 2014)

$$p(x) = \frac{mx^2}{1 + mh x^2}. \quad (12)$$

Pemangsa dalam mencari makan sering kali dikaitkan dengan kerja sama berburu. Ketika pemangsa bekerja sama untuk menemukan dan menyerang mangsa, sumber daya bagi populasi akan tersedia lebih banyak. Dengan kerja sama berburu, tingkat serangan pemangsa meningkat seiring dengan kepadatan populasi pemangsa. Kerja sama dapat menjembatani kelangsungan hidup pemangsa yang akan punah jika tidak ada kerja sama. Dalam kasus fungsi respons, dengan mempertimbangkan kerja sama berburu, persamaan menjadi

$$p(x) = (m + ay)x, \quad (13)$$

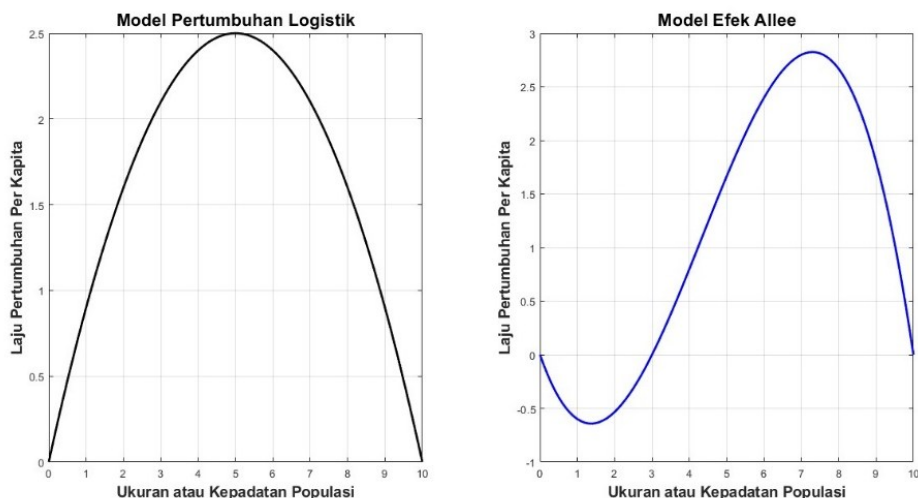
dengan y menyatakan kepadatan populasi pemangsa dan a menyatakan kerja sama pemangsa dalam berburu (ay dinyatakan sebagai *cooperation term*). Jika $a = 0$, berarti model mangsa pemangsa tanpa kerja sama berburu. Jika $a < 0$ akan terjadi interferensi antar pemangsa, maka perlu membuat nilai $m + ay$ menjadi nol untuk mencegah nilai negatif (Alves & Hilker, 2017).

1.6.5 Efek Allee

Warder Cyle Allee dalam karyanya yang diterbitkan pada tahun 1931 memperkenalkan efek Allee untuk pertama kalinya (Allee, 1931). Efek Allee telah diakui sebagai fenomena penting dari ketergantungan kepadatan positif pada populasi kepadatan rendah. Efek Allee didefinisikan sebagai korelasi positif antara komponen apa pun dari kebugaran individu dengan jumlah atau kepadatan individu sejenis (Stephens dkk., 1999). Efek Allee mengurangi laju pertumbuhan populasi ketika kepadatan populasi (Rahmi & Panigoro, 2017). Sejak karya Allee yang luar biasa, efek Allee telah dianggap sebagai salah satu isu sentral dan sangat penting dalam ekologi populasi. Efek Allee telah disadari secara luas dalam biologi konservasi yang menyatakan bahwa kemungkinan besar efek Allee akan meningkatkan risiko kepunahan pada populasi dengan kepadatan rendah. Efek Allee dapat muncul dari banyak proses ekologi di bawah berbagai interaksi respons fungsional dan agregatif (Sun, 2016). Salah satu penyebabnya adalah keterbatasan untuk menemukan pasangan, di mana dapat mengurangi tingkat kelahiran dan menyebabkan penurunan populasi pada spesies yang bereproduksi secara seksual (Kuperman & Abramson, 2021). Selain itu, kompetisi intra spesies, berkurangnya efisiensi perkawinan, dan berkurangnya efisiensi memperoleh makanan juga dapat menimbulkan efek Allee.

Banyaknya situasi berbeda yang terkait dengan efek Allee serta kurangnya definisi yang akurat, menyebabkan efek Allee dibagi menjadi dua jenis, yaitu efek Allee komponen (efek Allee yang dimanifestasikan oleh komponen kebugaran) dan efek Allee demografis (efek Allee yang dimanifestasikan pada tingkat kebugaran total) (Stephens dkk., 1999). Efek Allee komponen memengaruhi beberapa komponen tertentu dari

kebugaran individu, sedangkan efek Allee demografis efeknya muncul pada tingkat kebugaran total (Kuperman & Abramson, 2021). Efek Allee demografis dapat menjadi kuat atau lemah. Efek Allee yang lemah ditandai dengan laju pertumbuhan yang berkurang, tetapi tetap positif saat kepadatan populasi menurun. Oleh karena itu, tidak ada ambang batas deterministik yang dapat dilampaui agar populasi dapat bertahan. Sebaliknya, efek Allee kuat terjadi saat laju pertumbuhan menurun dan bernilai negatif pada ambang batas kepadatan tertentu. Ketika populasi berada di bawah ambang batas ini, populasi tersebut akan menurun dan memasuki masa kepunahan (Deredec & Courchamp, 2003).



Gambar 1 Perbandingan model pertumbuhan logistik dan efek Allee.

Fungsi pertumbuhan logistik perlu dimodifikasi dengan memasukkan efek Allee sehingga persamaan model untuk spesies tunggal menjadi

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(\frac{x}{a} - 1\right) x, \quad (14)$$

dengan $a < k$. Parameter r menyatakan laju pertumbuhan intrinsik, k menyatakan daya dukung (*carrying capacity*), dan a menyatakan ambang batas Allee. Laju pertumbuhan per kapita (dx/dt) bernilai negatif di atas daya dukung (k) dan bernilai positif di bawahnya. Ilustrasi efek Allee pada Gambar 1 menunjukkan laju pertumbuhan per kapita dapat menurun pada ukuran atau kepadatan populasi tertentu. Bahkan, dapat menjadi negatif di bawah ambang batas kritis populasi (a) yang menyebabkan populasi menuju kepunahan (Courchamp dkk., 1999).

1.6.6 Nondimensionalisasi

Sistem persamaan diferensial dalam pemodelan biasanya memiliki banyak konstanta di dalamnya. Jumlah konstanta yang terdapat dalam masalah dapat dikurangi dengan memilih satuan yang tepat untuk berbagi kuantitas dalam masalah. Proses yang dilakukan tersebut dinamakan nondimensionalisasi. Nondimensionalisasi (*rescaling*)

adalah proses penskalaan variabel dalam persamaan diferensial untuk menyederhanakan model dan mengidentifikasi sifat-sifat utama suatu model dalam hal variabel dan parameter tak berdimensi. Hal ini memastikan bahwa ukuran relatif dari suku-suku yang berbeda menjadi jelas, sehingga penyelesaian sistem pada berbagai batasan menjadi lebih sederhana. Secara umum, nondimensionalisasi membantu menghilangkan unit dari suatu model variabel skala menjadi bentuk tak berdimensi. Misalkan suatu model memiliki variabel x , maka variabel tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$x = [x]x', \quad (15)$$

dengan $[x]$ adalah faktor skala yang terpilih (dengan dimensi yang sama dengan x) dan x' adalah variabel tak berdimensi yang bersesuaian.

Jika suatu sistem persamaan menggambarkan suatu proses real, maka sistem tersebut harus homogen secara dimensi, yaitu konsisten. Proses nondimensionalisasi secara otomatis menghasilkan sebuah persamaan di mana setiap sukunya tak berdimensi setelah dilakukan pembagian berdasarkan dimensi dari persamaan tersebut. Dengan demikian, memungkinkan untuk membandingkan suku-suku secara bermakna. Ketepatan dalam nondimensionalisasi terletak pada pemilihan skala. Dalam masalah yang lebih kompleks, pemilihan skala bisa menjadi bagian yang sulit dalam analisis. Prinsip dasarnya adalah skala-skala tersebut harus dipilih secara konsisten dengan cara menyeimbangkan suku-suku dalam persamaan. Karena tujuannya adalah untuk mendapatkan persamaan yang "terskala dengan baik" (Le Bras, 2015).

Adapun prosedur nondimensionalisasi sebagai berikut:

- Identifikasi semua variabel bebas dan variabel terikat.
- Ubah setiap variabel x dengan kuantitas $x = [x]x'$ di mana $[x]$ adalah faktor skala dan x' variabel tak berdimensi.
- Bagi semua persamaan dalam model dengan koefisien polinomial orde tertinggi atau suku turunan.
- Pilih faktor skala untuk setiap variabel sehingga sebanyak mungkin koefisien dari suku-suku dalam persamaan menjadi 1.
- Tulis ulang sistem persamaan dalam bentuk variabel dan parameter tak berdimensi yang baru (Schaeffer & Cain, 2016).

1.6.7 Kepositifan dan Keterbatasan

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial $\frac{dx}{dt}$ dengan kondisi awal $x(0)$. Sistem persamaan diferensial dinyatakan layak jika memenuhi beberapa kriteria di antaranya:

- Untuk setiap kondisi awal $x(0)$ tak negatif, maka solusi sistem $x(t)$ selalu tak negatif untuk setiap $t \rightarrow \infty$.
- Solusi sistem $x(t)$ selalu terbatas untuk setiap $t \rightarrow \infty$.

Sistem harus positif dan terbatas agar dapat dianggap layak secara biologis. Kepositifan dan keterbatasan solusi sistem menyiratkan bahwa sistem tidak tumbuh secara eksponensial atau tiba-tiba (Ghosh dkk., 2023).

1.6.8 Titik Keseimbangan

Titik ekuilibrium atau titik keseimbangan merupakan solusi dari sistem $x' = f(x)$ yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Misalkan sistem persamaan diferensial dinyatakan dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y), \end{aligned} \quad (16)$$

dengan f dan g adalah suatu fungsi umum dari x dan y yang tidak tergantung secara eksplisit dari waktu t . Jika persamaan tersebut dianalisis dengan teori titik keseimbangan, maka keseimbangan akan terjadi apabila tidak ada gerakan dalam model sistem tersebut yang artinya $x' = 0$ dan $y' = 0$. Titik keseimbangan akan memenuhi

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 0, \\ g(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Secara umum, definisi dari titik keseimbangan menyatakan bahwa titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik keseimbangan dari $x' = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$. Karena $x' = 0$ dan $y' = 0$, hal ini akan menghasilkan titik keseimbangan yang mungkin dapat ditemukan lebih dari satu titik keseimbangan. Apabila titik keseimbangan telah diperoleh, perilaku dari model dapat ditentukan dengan menentukan kestabilan dari titik-titik kritisnya.

Kestabilan titik keseimbangan $\bar{x} \in R^n$ dapat ditentukan melalui beberapa syarat sebagai berikut:

1. Titik keseimbangan $\bar{x} \in R^n$ dinyatakan stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta \geq 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
2. Titik keseimbangan $\bar{x} \in R^n$ dinyatakan stabil asimtotik jika titik keseimbangan $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.
3. Titik keseimbangan $\bar{x} \in R^n$ dinyatakan tidak stabil jika tidak memenuhi syarat pertama (Perko, 2001).

1.6.9 Linearisasi Sistem Nonlinear

Linearisasi merupakan proses transformasi sistem persamaan diferensial nonlinear ke bentuk persamaan diferensial linear. Kestabilan titik keseimbangan yang diperoleh sebelumnya dapat dianalisis dengan linearisasi. Hasil dari linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear dapat diperoleh dengan menggunakan matriks Jacobi. Misalkan persamaan $x' = f(x)$ dengan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $E \subset R^N$ dan $\bar{x}$ merupakan titik keseimbangan dari $x' = f(x)$. Matriks $Jf(\bar{x})$ dinamakan matriks Jacobian dari $x' = f(x)$ di titik $\bar{x}$.

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Sistem linear $y' = Jf(\bar{x})y$ dengan $y = x - \bar{x}$ disebut linearisasi dari sistem nonlinear $x' = f(x)$ di sekitar titik kesetimbangan $\bar{x}$ (Perko, 1991).

1.6.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Kestabilan dari suatu model persamaan diferensial dapat diketahui melalui nilai eigennya. Dalam hal ini, berarti nilai eigen dari suatu model persamaan diferensial berguna untuk mengetahui jenis kestabilan model mangsa pemangsa dalam karya ilmiah ini. Misalkan A sebuah matriks berordo $n \times n$ dan x merupakan vektor tak nol di dalam R^n , maka x disebut sebagai vektor eigen dari matriks A . Misalkan Ax merupakan sebuah kelipatan skalar dari x , maka

$$Ax = \lambda x. \quad (19)$$

Melalui definisi di atas dapat diketahui persyaratan-persyaratan untuk nilai eigen maupun vektor eigen. Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks A , di mana λ merupakan bilangan real yang dapat bernilai nol, negatif, ataupun positif. Sedangkan, x disebut sebagai vektor eigen dari matriks A , di mana x anggota dari R^n untuk $A_{n \times n}$ dan x merupakan vektor tak nol.

Misalkan A adalah matriks berordo $n \times n$ dan I adalah matriks identitas yang berordo $n \times n$, maka untuk mencari nilai eigen Persamaan (19) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, \\ Ax &= \lambda Ix, \\ (A - \lambda I)x &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Dengan mengingat bahwa vektor eigen $x \neq 0$, maka nilai eigen dari matriks A mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika (Anton & Rorres, 2013)

$$\det(A - \lambda I)x = 0. \quad (21)$$

Persamaan (21) dikenal sebagai persamaan karakteristik untuk menyederhanakan pencarian nilai eigen melalui akar-akar dari persamaan polinom $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$.

Secara umum, titik kesetimbangan mempunyai sifat-sifat (Boyce & DiPrima, 2008):

1. Stabil asimtotik jika

- a. Setiap nilai eigen bersifat real dan negatif ($\lambda_i < 0$, $\lambda_i \in R$) atau

- b. Setiap bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai negatif ($Re(\lambda_i) < 0$, $\lambda_i \in C$).
- 2. Stabil (tidak asimtotik) jika nilai eigen merupakan bilangan imajiner murni.
- 3. Tidak stabil jika
 - a. Terdapat nilai eigen bersifat real dan positif ($\exists \lambda_i > 0, \lambda_i \in R$) atau
 - b. Terdapat bagian real dari nilai eigen kompleks bernilai positif ($\exists \lambda_i \ni Re(\lambda_i) > 0, \lambda_i \in C$).

BAB II METODOLOGI PENELITIAN

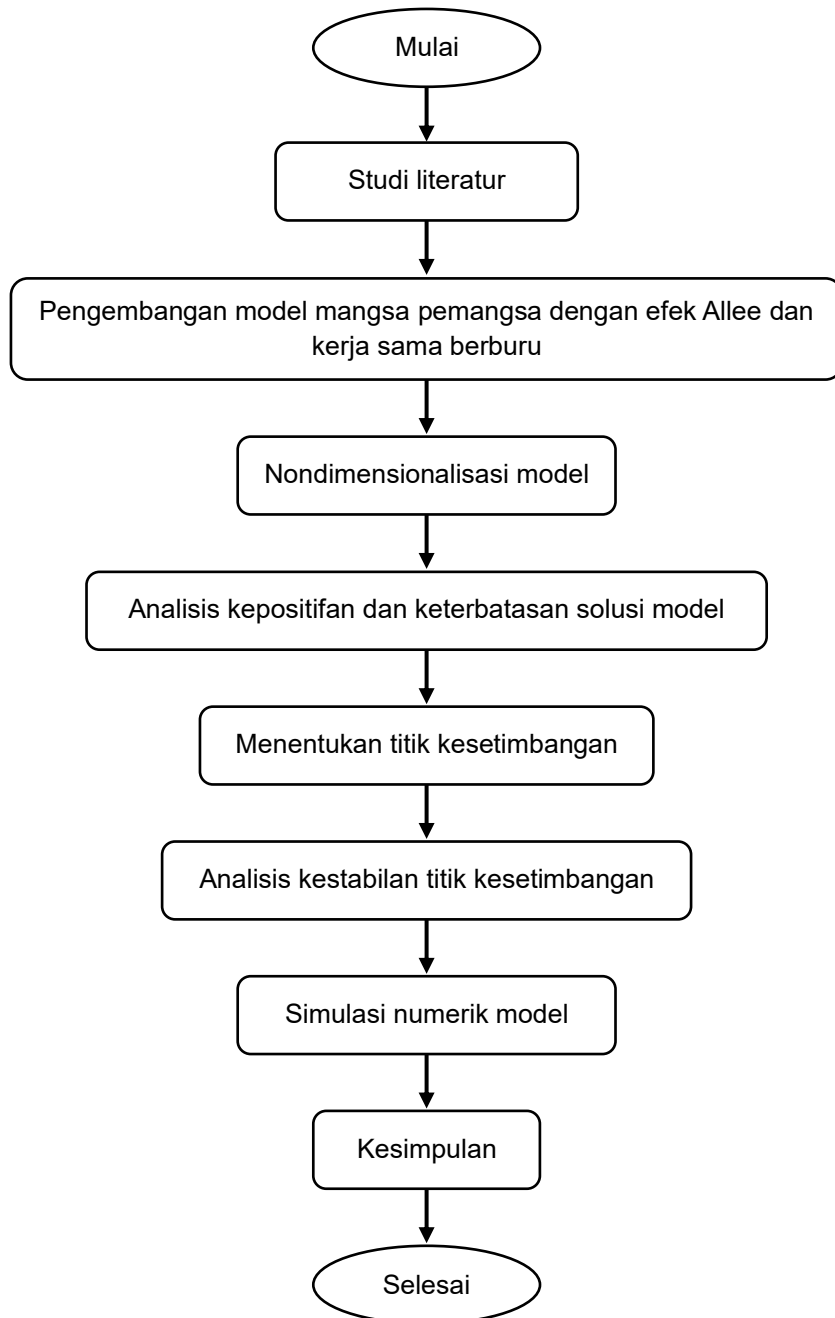
Pada bagian ini, akan dijelaskan secara rinci terkait prosedur apa saja yang dilakukan dalam penelitian ini. Untuk mempermudah pemahaman, juga disertakan diagram alir yang menggambarkan alur penelitian secara singkat.

2.1 Prosedur Penelitian

Prosedur lengkap dari penelitian ini disajikan sebagai berikut:

1. Membaca dan mengkaji berbagai literatur dan sumber-sumber pustaka penelitian model matematika dalam bentuk jurnal maupun buku, terutama yang berkaitan dengan model mangsa pemangsa dengan efek Allee.
2. Membangun model mangsa pemangsa dengan efek Allee dengan mempertimbangkan fungsi respons Holling dan kerja sama berburu sebagai parameter yang berpengaruh pada pemodelan.
3. Melakukan nondimensionalisasi pada model untuk membuat persamaan menjadi lebih umum dan mudah dianalisis karena dapat memahami aspek penting dari model yang diteliti tanpa terpengaruh oleh satuan. Model nondimensional kemudian digunakan pada tahap selanjutnya dalam penelitian.
4. Menentukan kepositifan dan keterbatasan model agar tetap bernilai positif dan berada dalam batasan tertentu seiring waktu sehingga model tetap berada dalam keadaan stabil.
5. Mencari solusi dan menentukan titik kesetimbangan model dengan tujuan untuk menentukan kondisi di mana semua pengaruh dalam model berada dalam keseimbangan sempurna serta memberikan pemahaman situasi ketika tidak ada lagi perubahan atau model mencapai kondisi stabilitas tertentu.
6. Melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan model untuk memahami perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Model yang stabil ditunjukkan dengan variabel yang tetap mendekati nilai kesetimbangan setelah ada gangguan kecil, sebaliknya model tidak stabil apabila variabel semakin menjauh dari nilai kesetimbangan.
7. Melakukan simulasi numerik model nondimensional untuk memperkuat hasil analisis sebelumnya. Pemilihan parameter disesuaikan kondisi kestabilan pada hasil sebelumnya.
8. Menarik kesimpulan dari hasil yang diperoleh berdasarkan tujuan penelitian.

2.2 Diagram Alir



Gambar 2 Diagram alir penelitian.