

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang banyak penerapannya dalam berbagai bidang ilmu seperti *engineering*, fisika, biologi, kimia, arsitektur, transportasi, teknologi komputer, ekonomi, sosial dan bidang lainnya. Secara sederhana graf adalah sebuah diagram yang memuat titik–titik dan garis yang menghubungkan titik-titik tersebut yang dapat ditulis sebagai $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan dari titik dan E adalah himpunan yang anggotanya disebut sisi. Setiap sisi menghubungkan tepat dua titik dan setiap titik dapat memiliki banyak sisi yang menghubungkan dengan titik yang lainnya. (Gary Chartrand & Lesniak, 1979).

Himpunan dominasi adalah salah satu topik dalam teori graf yang juga banyak dikaji oleh para peneliti bidang keahlian Matematika Kombinatorika. Sejarah himpunan dominasi berawal ketika penggemar catur Eropa mulai mempelajari masalah "dominasi ratu". Pada tahun 1862, de Jaenisch berusaha menentukan jumlah minimum ratu yang diperlukan sehingga setiap persegi pada papan catur standar 8×8 dapat diduduki oleh sebuah ratu atau dapat langsung diserang oleh ratu, dengan kata lain kotak tersebut didominasi oleh sebuah ratu. Situasi tersebut dapat di modelkan dengan teori graf. Pada papan catur, kotak adalah titik (V) dan dua titik terhubung disebut sisi (E). (N. Nurhamzah, N. Kusumastuti, & F. Fran, 2022).

Himpunan dominasi titik (*vertex dominating set*) D pada graf G merupakan subset $D \subseteq V$ sedemikian hingga setiap titik di G yang bukan elemen D terkait terhadap D . Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi titik (*vertex dominating number*) dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. (Haynes, 1998).

Serupa dengan konsep himpunan titik yang mendominasi, terdapat variasi lain dalam pembahasan mengenai dominasi yaitu himpunan sisi yang mendominasi (*edge dominating set*) yang dikenalkan oleh Mitchell dan Hedetniemi pada tahun 1977 yang merupakan perluasan dari topik dominasi titik pada graf. Himpunan D adalah subhimpunan $E(G)$ dikatakan himpunan dominasi sisi dari G jika setiap sisi yang tidak termuat dalam D bertetangga dengan sisi di D . Bilangan dominasi sisi (*edge dominating number*) dari G yang dinotasikan dengan $\gamma'(G)$ adalah minimum kardinalitas dari keseluruhan himpunan sisi yang mendominasi dari G . (Adawiyah, 2016).

Penelitian terkait topik bilangan dominasi sisi pada teori graf semakin berkembang, diantaranya adalah S. Arumugam dan S. Velammal (1998) dalam penelitiannya yang berjudul *Edge Domination in Graph* menunjukkan bilangan dominasi sisi pada graf sikel, V. R Kulli (2015) dalam papernya yang berjudul *The*

Neighbourhood of Edge Domination in Graph menunjukkan bilangan dominasi sisi pada graf lintasan dan lengkap, dan Rizki Dini Febri Anggraini (2020) dalam penelitiannya *Bilangan Dominasi Sisi Pada Graf Buku* menunjukkan bilangan dominasi sisi pada graf buku yang merupakan hasil operasi perkalian antara graf lintasan P_2 dengan graf Bintang S_n .

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk mengkaji bilangan dominasi sisi dengan mengambil graf kipas berkepala ganda sebagai objek penelitian dengan tujuan menentukan bilangan dominasi sisi graf kipas berkepala ganda sehingga penulis mengambil judul "**BILANGAN DOMINASI SISI GRAF KIPAS BERKEPALA GANDA ($F_{2,n}$)**". Penulis berharap dapat menambah wawasan pembaca mengenai bilangan dominasi sisi dan dapat dijadikan bahan acuan peneliti lain yang mengkaji permasalahan atau topik yang sama.

1.2 Landasan Teori

Adapun teori-teori terkait bilangan dominasi sisi pada graf kipas berkepala ganda $F_{2,n}$ antara lain konsep dasar graf, operasi pada graf, jenis-jenis graf, himpunan dominasi sisi dan bilangan dominasi sisi. Pengertian dan beberapa sifat terkait graf, serta materi yang digunakan pada umumnya merujuk pada buku "Pengantar dan Jenis-Jenis Graf" yang ditulis oleh Hasmawati, 2020.

1.2.1 Konsep Dasar Graf

Definisi 1.2.1.1 (secara umum) Graf adalah pasangan himpunan (V, E) , dengan V adalah himpunan yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi.

Berdasarkan Definisi 1.2.1.1, himpunan V disebut himpunan titik (*vertex set*), dan E disebut himpunan sisi (*edge set*). Kadang-kadang ada yang menyebut titik sebagai noktah (*point*) dan sisi sebagai busur, rusuk, atau garis (*line*). Jika graf (V, E) dinotasikan G , dengan kata lain $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = (V(G), E(G))$. Secara Matematika, Definisi 1.2.1.1 dapat ditulis sebagai berikut: Graf $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{u: u \text{ disebut titik}\}$ dan $E(G) = \{(u, v): u, v \in V(G)\}$, dengan (u, v) disebut sisi, rusuk atau garis. Pada pembahasan selanjutnya, sisi (u, v) hanya ditulis uv . (Hasmawati, 2020).

Definisi 1.2.1.2 Misalkan G adalah suatu graf dan $v_i, v_j \in V(G)$ serta $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$, maka dikatakan bahwa:

1. Titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j .
2. Sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i , demikian pula untuk titik v_j . (Hasmawati, 2020).

Definisi 1.2.1.3 Graf terhubung adalah graf yang setiap pasang simpulnya terhubung. Dua buah simpul terhubung jika terdapat lintasan dari satu simpul ke simpul lainnya. Misalkan pada graf G terdapat dua buah simpul yaitu u dan v . Simpul u terhubung dengan simpul v jika terdapat lintasan $u - v$ di G . Jika tidak ada lintasan antara $u - v$ di G , maka G disebut graf tak terhubung (Andika & Juniati, 2014).

Definisi 1.2.1.4 Kardinalitas suatu himpunan adalah banyaknya anggota pada himpunan tersebut. Kardinalitas biasanya dinyatakan oleh simbol " $|$ ". Jadi apabila $p(G)$ adalah orde graf G dan $q(G)$ adalah ukurannya, maka $p(G) = |V(G)|$ dan $q(G) = |E(G)|$. (Hasmawati, 2020).

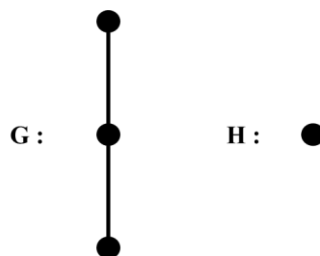
1.2.2 Operasi pada Graf

Graf yang akan diteliti merupakan hasil operasi penjumlahan antara graf lintasan (P_n) dan graf trivial. Oleh karena itu, pada subbab ini akan dibahas mengenai beberapa operasi dalam graf diantaranya operasi gabung dan jumlah.

Definisi 1.2.2.1 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Maka:

- Graf gabung (*union graph*) antara G dan H ditulis $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$;
- Graf jumlah antara G dan H ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv, u \in V(G), v \in V(H)\}$.

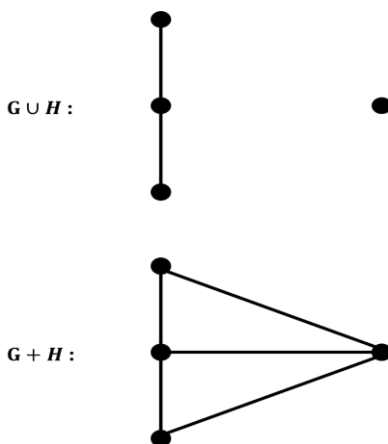
Contoh 1.2.2.1 Misalkan graf G adalah graf dengan $V(G) = \{1,2,3\}$ dan $E(G) = \{12,23\}$, serta H adalah graf dengan $V(H) = \{a\}$. Maka gambar G dan H adalah sebagai berikut:



Gambar 1. (G) Graf P_3 , (H) Graf K_1

- Graf gabung $G \cup H$ mempunyai himpunan titik $V(G \cup H) = \{1,2,3,a\}$ dan himpunan sisi $E(G \cup H) = \{12,23\}$;

- b. Graf jumlah $G + H$ mempunyai himpunan titik $V(G + H) = \{1, 2, 3, a\}$ dan himpunan sisi $E(G + H) = \{12, 23\} \cup \{1a, 2a, 3a\}$. (Hasmawati, 2020).

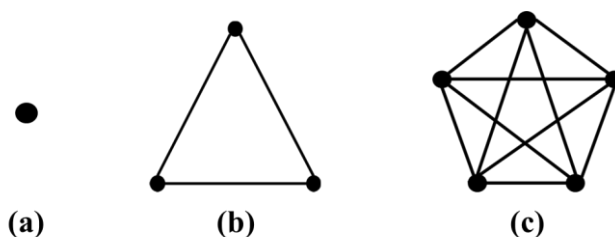


Gambar 2. Graf gabung dan graf jumlah

1.2.3 Jenis-Jenis Graf

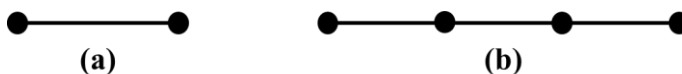
Beberapa jenis graf diantaranya adalah graf lengkap K_n , graf lintasan P_n , graf kipas F_n , dan graf kipas berkepala ganda $F_{2,n}$.

1.2.3.1 Graf Lengkap K_n adalah graf sederhana dimana setiap pasang simpul yang berbeda terhubung oleh sebuah sisi. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. (Hasmawati, 2020). Gambar 3. adalah contoh graf lengkap K_n .



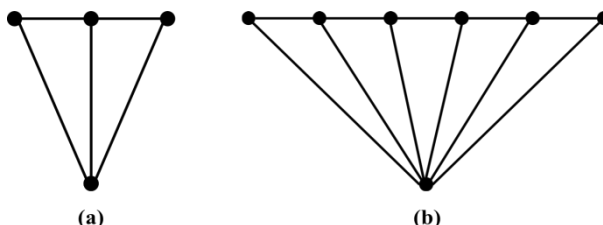
Gambar 3. (a) Graf K_1 , (b) Graf K_3 , (c) Graf K_5

1.2.3.2 Graf Lintasan P_n adalah Graf lintasan adalah Graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dituliskan dengan P_n . (Wilson, 2010). Gambar 4. adalah contoh graf lintasan P_n .



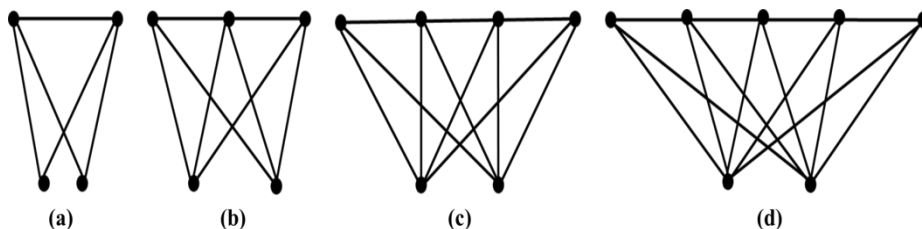
Gambar 4. (a) Graf P_2 , (b) Graf P_4

1.2.3.3 Graf Kipas F_n ($n \geq 2$) adalah Graf yang dibentuk dari operasi penjumlahan graf komplit K_1 dan graf lintasan P_n , yaitu $F_n = K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi. Gambar 5. adalah contoh graf kipas F_n .



Gambar 5. (a) Graf F_3 , (b) Graf F_6

1.2.3.4 Graf Kipas Berkepala Ganda $F_{2,n}$ ($n \geq 2$) adalah graf yang dibentuk dari operasi penjumlahan graf komplit $2K_1$ dan graf lintasan P_n , yaitu $F_{2,n} = 2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi. (Gallian, 2007). Gambar 6. adalah contoh graf kipas berkepala ganda $F_{2,n}$.



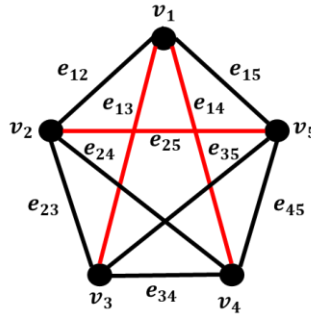
Gambar 6. (a) Graf $F_{2,2}$, (b) Graf $F_{2,3}$, (c) Graf $F_{2,4}$, (d) Graf $F_{2,5}$

1.2.4 Himpunan Dominasi Sisi dan Bilangan Dominasi Sisi

Serupa dengan konsep himpunan yang mendominasi, terdapat variasi lain dalam pembahasan mengenai dominasi yaitu himpunan sisi yang mendominasi (*edge dominating set*) yang dikenalkan oleh Mitchell and Hedetniemi pada tahun 1977 yang merupakan perluasan dari topik dominasi titik pada graf.

Definisi 1.2.4.1 Misalkan D subset $E(G)$ dan G non-trivial. Himpunan D dikatakan himpunan dominasi sisi dari G jika setiap sisi yang tidak termuat dalam D bertetangga dengan suatu sisi di D . (S. Arumugam dan S. Velammal, 1998).

Contoh 1.2.4.1 Diberikan graf lengkap K_5 dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(K_5) = \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{34}, e_{35}, e_{45}\}$. Pilih himpunan dominasi sisi D dari graf lengkap K_5 yaitu $D_1 = \{e_{13}, e_{24}, e_{35}\}$ yang diberi warna merah pada gambar 7.



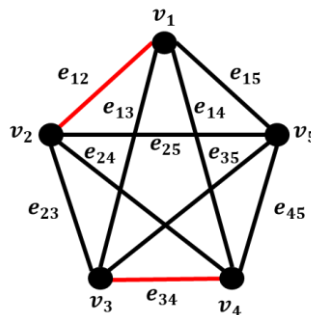
Gambar 7. Ilustrasi himpunan dominasi sisi D_1 graf K_5

Dapat ditunjukkan bahwa $\forall e \in E(K_5) \setminus D_1$ terdapat suatu sisi e' di D_1 yang bertetangga dengan e , yaitu:

1. Untuk sisi-sisi e_{12}, e_{14}, e_{15} , dan $e_{23} \in E(K_5) \setminus D_1$ terdapat sisi e_{13} di D_1 sehingga sisi-sisi e_{12}, e_{14}, e_{15} , dan e_{23} bertetangga dengan sisi e_{13} .
2. Untuk sisi-sisi $e_{12}, e_{23}, e_{25}, e_{34}$, dan $e_{45} \in E(K_5) \setminus D_1$ terdapat sisi e_{24} di D_1 sehingga sisi-sisi $e_{12}, e_{23}, e_{25}, e_{34}$, dan e_{45} bertetangga dengan sisi e_{24} .

Jadi, $D_1 = \{e_{13}, e_{24}, e_{35}\}$ merupakan himpunan dominasi sisi.

Himpunan dominasi sisi $D_1 = \{e_{13}, e_{24}, e_{35}\}$ memiliki kardinalitas $|D_1| = 3$. Dalam hal ini masih memungkinkan untuk memilih himpunan dominasi sisi yang kardinalitasnya lebih kecil dari 3. Misalnya pilih $D_2 = \{e_{12}, e_{34}\}$ yang diberi warna merah pada gambar 8.



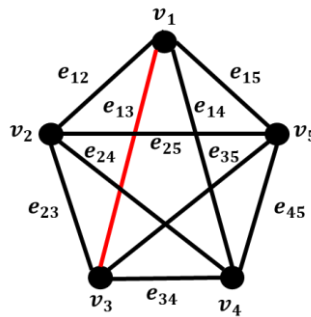
Gambar 8. Ilustrasi himpunan dominasi sisi D_2 graf K_5

Dapat ditunjukkan bahwa $\forall e \in E(K_5) \setminus D_2$ terdapat suatu sisi e' di D_2 yang bertetangga dengan e , yaitu:

1. Untuk sisi-sisi $e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{23}, e_{24}$, dan $e_{25} \in E(K_5) \setminus D_2$ terdapat sisi e_{12} di D_2 sehingga sisi-sisi $e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{23}, e_{24}$, dan e_{25} bertetangga dengan sisi e_{12} .
2. Untuk sisi-sisi $e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}$ dan $e_{35} \in E(K_5) \setminus D_2$ terdapat sisi e_{34} di D_2 sehingga sisi-sisi $e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}$ dan e_{35} bertetangga dengan sisi e_{34} .

Jadi, $D_2 = \{e_{12}, e_{34}\}$ juga merupakan himpunan dominasi sisi.

Himpunan dominasi sisi $D_2 = \{e_{12}, e_{34}\}$ memiliki kardinalitas $|D_2| = 2$. Dalam hal ini masih memungkinkan untuk memilih himpunan dominasi sisi yang kardinalitasnya lebih kecil dari 2. Misalnya pilih $D_3 = \{e_{13}\}$ dengan kardinalitas $|D_3| = 1$ yang diberi warna merah pada gambar 9. Dapat terlihat bahwa sisi-sisi e_{24}, e_{25} dan e_{45} tidak memiliki tetangga di D_3 . Sehingga D_3 bukan merupakan himpunan dominasi sisi.



Gambar 9. Ilustrasi himpunan dominasi sisi D_3 graf K_5

Definisi 1.2.4.2 Bilangan dominasi sisi $\gamma'(G)$ dari G merupakan minimum kardinalitas dari semua himpunan dominasi sisi pada G . (V. R. Kulli, 2013).

Contoh 1.2.4.2 Merujuk pada contoh 1.2.4.1, himpunan dominasi sisi D_1 dari graf lengkap K_5 merupakan himpunan dominasi sisi dengan kardinalitas $|D_1| = 3$ dan himpunan dominasi sisi D_2 dari graf lengkap K_5 merupakan himpunan dominasi sisi dengan kardinalitas $|D_2| = 2$. Karena D_2 merupakan minimum kardinalitas dari semua himpunan dominasi sisi pada graf lengkap K_5 , maka bilangan dominasi sisi graf lengkap $\gamma'(K_5) = 2$.

1.2.5 Hasil Penelitian Bilangan Dominasi Sisi Terdahulu

Hasil penelitian bilangan dominasi sisi terdahulu diberikan di sini agar terlihat bahwa materi penelitian skripsi ini belum dikerjakan sebelumnya.

Teorema 1.2.5.1 Misalkan C_p adalah graf siklus dengan $p \geq 3$. Maka $\gamma'(C_p) = \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor$. (S. Arumugam dan S. Velammal, 1998).

Teorema 1.2.5.2 Misalkan P_m adalah graf lintasan dengan $m \geq 2$. Maka $\gamma'(P_m) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$. (V. R. Kulli, 2015).

Teorema 1.2.5.3 Misalkan K_n adalah graf lintasan dengan $n \geq 2$. Maka $\gamma'(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. (V. R. Kulli, 2015).

Teorema 1.2.5.4 Misalkan G adalah graf web $W(s, t)$, dimana t genap, bilangan dominasi sisinya adalah: $\gamma'(W(s, t)) = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t-1}{3} \right\rfloor$. (A. A. Omran, dan M. N. Al-Harere, 2017).

Teorema 1.2.5.5 Misalkan G adalah graf web $W(s, t)$, dimana t ganjil, bilangan dominasi sisinya adalah:

$$\gamma'(W(s, t)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t-1}{3} \right\rfloor \right), & \text{untuk } s \text{ genap dan } t \not\equiv 1 \pmod{3} \\ \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor, & \text{untuk } t \not\equiv 1 \pmod{3} \\ \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t-1}{3} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } s \text{ ganjil dan } t \not\equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

(A. A. Omran, dan M. N. Al-Harere, 2017).

Teorema 1.2.5.6 Misal diberikan graf AP_n untuk $n \geq 3$, maka bilangan dominasi

$$\text{sisinya adalah: } \gamma'(AP_n) = \begin{cases} \left(\frac{2n}{3} \right), & \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \left(\frac{2n+1}{3} \right), & \text{untuk } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \left(\frac{2n+2}{3} \right), & \text{untuk } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

(W. N. F. Qomariyah, 2019).

Teorema 1.2.5.7 Misalkan $B_n = P_2 \times S_n$ adalah graf buku, dengan S_n adalah graf bintang dengan $(n+1)$ titik. Misalkan pula $E'(B_n)$ adalah himpunan dominasi sisi minimal dengan $\gamma'(B_n) = E'(B_n)$ adalah bilangan dominasi sisi minimal. Maka, $\gamma'(B_n) = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ n, & n \geq 2 \end{cases}$. (R. D. F. Anggraini, 2020).

BAB II

METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka (*library research*) dengan mengumpulkan informasi dan data dari literatur-literatur yang berupa buku elektronik, hasil penelitian sebelumnya, serta berbagai jurnal yang berkaitan dengan perumusan masalah yang mendukung penelitian ini.

2.2 Waktu dan Lokasi Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan mulai bulan Maret 2024. Penelitian ini dilakukan di perpustakaan Universitas Hasanuddin. Selain itu, literatur juga diperoleh dari sumber-sumber lainnya yang menyediakan fasilitas pustaka yang berkaitan dengan rumusan masalah.

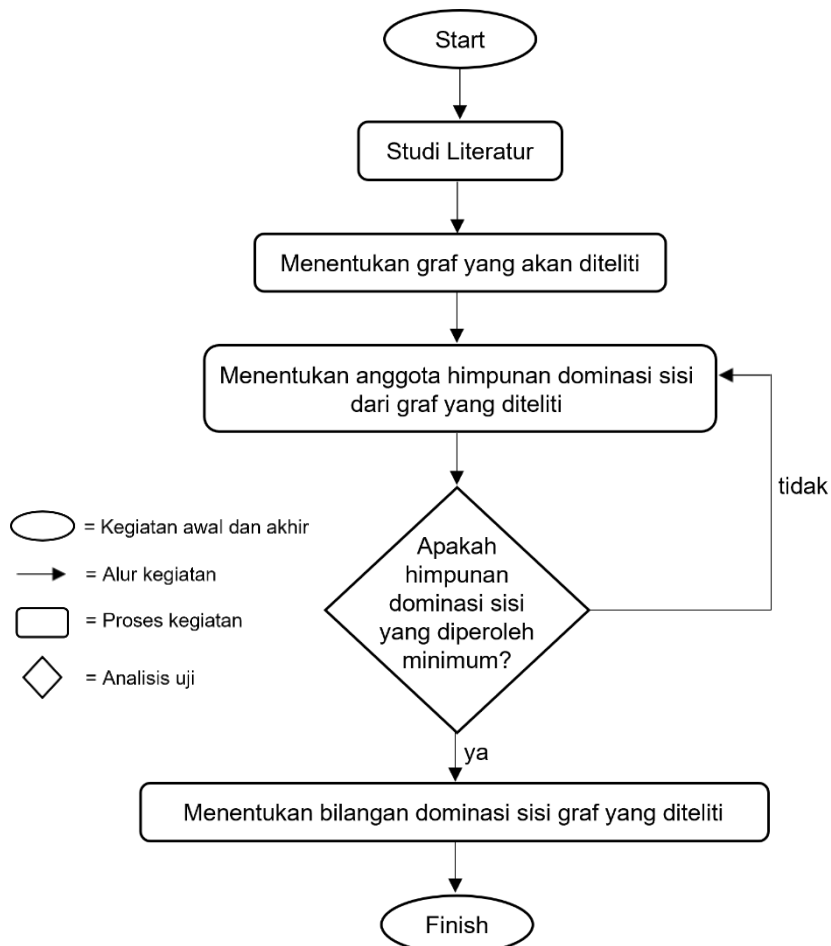
2.3 Prosedur Penelitian

Untuk mencapai tujuan penelitian, maka langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur mengenai graf kipas berkepala ganda $F_{2,n}$ dan bilangan dominasi sisi.
2. Menentukan graf yang akan diteliti, dalam hal ini graf yang akan diteliti adalah kipas berkepala ganda $F_{2,n}$.
3. Menentukan anggota himpunan dominasi sisi pada graf kipas berkepala ganda $F_{2,n}$ dengan melihat setiap sisi yang bukan anggota himpunan dominasi sisi pada graf kipas berkepala ganda $F_{2,n}$.
4. Mengecek kembali apakah himpunan dominasi sisi kipas berkepala ganda $F_{2,n}$ telah minimum. Apabila tidak, kembali pada nomor 3 dan apabila sesuai maka dapat dilanjutkan ke tahap berikutnya.
5. Menentukan bilangan dominasi sisi kipas berkepala ganda $F_{2,n}$.
6. Menuliskan hasil-hasil yang telah diperoleh dalam bentuk draf skripsi.

2.4 Diagram Alur Penelitian

Prosedur penelitian pada bilangan dominasi sisi dapat dilihat pada diagram alur penelitian berikut:



Gambar 10. Alur Penelitian