TEOREMA KONVOLUSI UNTUK TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI KANONIK LINIER

SKRIPSI

OLEH :

ZULFAJAR

H 111 08 262

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2013

TEOREMA KONVOLUSI UNTUK TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI KANONIK LINIER

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Makassar

OLEH :

ZULFAJAR

H 111 08 262

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2013

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

TEOREMA KONVOLUSI UNTUK TRAMSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI KANONIK LINIER

adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 31 Mei 2013

ZULFAJAR
H 111 08262

TEOREMA KONVOLUSI UNTUK TRAMSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI KANONIK LINIER

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
<u>**Dr.Eng.Mawardi Bahri,M.Si**</u>	<u>**Muh. Nur, S.Si. M.Si**</u>
NIP. 19701231 199802 1 001	**NIP. 19850529 200812 1 002**

PadaTanggal : 31 Mei 2013

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2013

Pada hari ini, Jum'at tanggal 31 Mei 2013, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi berjudul :

TEOREMA KONVOLUSI UNTUK TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI KANONIK LINIER

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 31 Mei 2013

PANITIA UJIAN SKRIPSI			**TandaTangan**
1.	**Ketua**	**: Prof.Dr.Moh.Ivan Azis, M.Sc**	**(…………………….)**
2.	**Sekretaris**	**:Andi Galsan Mahie, S.Si, M.Si.**	**(…………………….)**
3.	**Anggota**	**:Prof.Dr.Syamsuddin Toaha, M.Sc.**	**(…………………….)**
4.	**Anggota**	**: Dr.Eng.Mawardi Bahri, M.Si.**	**(…………………….)**
5.	**Anggota**	**: Muh.Nur, S.Si, M.Si.**	**(…………………….)**

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillahi rabbil 'Alamiin, segala puji dan syukur hanya kepada Allah *Ta'ala*, Dzat yang telah melimpahkan berbagai kenikmatan kepada kita semua. Shalawat dan salam semoga tetap tercurah kepada rasullullah Muhammad *Shallallahu 'Alaihi Wa Sallam*, keluarga dan seluruh sahabatnya .

Skripsi ini merupakan salah satu persyaratan untuk memperolehi gelar sarjana dibidang matematika. Perlu perjuangan keras untuk mewujudkan hal ini. Tentunya, pejuangan ini mustahil terwujud tanpa adanya bantuan dan dukungan serta doa dari seluruh tim dosen, teman – teman sebaya , kakak dan adik angkatan di jurusan matematika.

Oleh karena itu, perkenankan penulis untuk mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada yang tercinta ayahanda **Mustafa** dan ibunda **Heriyati**, kakek **Caleng** dan nenek **Sitti**, semoga Allah *Ta'ala* memberikan balasan yang lebih baik di dunia dan akhirat kelak.

Ucapan terima kasih juga penulis berikan kepada :

1. Bapak **Prof.Dr.Moh.Ivan Aziz,M.Sc**, selaku penasehat akademik yang telah mengingatkan penulis untuk menyusun skripsi ini secepatnya.

2. Bapak **Drs.Muh.Saleh A.F, M.Si** selaku supervisor KKN angkatan 82 kecamatan Baroko,kabupaten Enrekang.*” Terima kasih, pak atas masukannya selama KKN”*.
3. Bapak **Dr.Eng.Mawardi Bahri,M.Si** selaku pembimbing utama.
4. Bapak **Muh.Nur,S.Si,M.Si** selaku pembimbing pertama.
5. Ibu **Dr.Hasmawati,M.Si**, selaku ketua jurusan Matematika.
6. Bapak **Nasir** dan **Sutamin, S.Sos**, selaku administrator jurusan matematika. *“Terimakasih, pak atas pelayanannya selama ini. Lanjutkan untuk pelayanan yang lebih baik”*.
7. Kanda **Samsul Basri,S.Si**. “*Syukran,atas masukan dan nasihat nya*”.
8. Sahabat saya, Yusran (Ex sekretaris rohis himatika FMIPA UNHAS periode 2010/2011, sekretaris mushalla Istiqamah FMIPA UNHAS periode 2010/2011, sekretaris rohis BEM FMIPA UNHAS periode 2011/2012 pada saat itu penulis menjabat sebagai **ketua-**nya. Yang juga akan menyelesaikan studi nya di jurusan matematika). “*Syukran,atas kerjasama antum dalam menapaki perjuangan dakwah di kampus merah. Perjuangan belum berakhir*”.
9. Syamsir selaku ketua UKM LDK MPM UNHAS periode 2012/2013.
10. Pengurus mushalla Istiqamah FMIPA UNHAS periode 2010/2011 ikhwah dan akhawat.” *Must keep on clean mushallah Istiqamah*”.
11. Koordinator rohis akhawat BEM FMIPA UNHAS periode 2011/2012. “*Dakwah itu adalah iklan. Laku tidaknya tergantung bagaimana desain tiket nya*”.

12. Fachrul,S.Si, Ichal,S.Si, Marni,S.Si, Vera,S.Si, Santuo,S.Si,

Makassar, 31 Mei 2013

Penulis

ABSTRAK

Dalam makalah ini kami memperkenalkan teorema konvolusi untuk linear transformasi kanonik (LCT). Berdasarkan sifat-sifat teorema konvolusi untuk Transformasi Fourier (FT) kita secara eksplisit menunjukkan beberapa sifat penting dari hubungan antara LCT dan konvolusi nya. Kami menyediakan alternatif bentuk definisi baru konvolusi dalam domain LCT. Kami mendirikan sebuah teorema yang menggambarkan hubungan antara LCT TF. Kami akhirnya membandingkan hasil kami dengan kasus klasik.

Kata kunci: transformasi kanonik linear, transformasi Fourier, konvolusi.

ABSTRACT

In this paper we introduce the convolution theorem for the linear canonical transform (LCT). Based on the properties of convolution theorem for the Fourier transform (FT) we explicitly show some important properties of the relationship between the LCT and its convolution. We provide an alternative form of the new definition of convolution in the LCT domain. We establish a theorem which describes the relationship between the LCT and FT. We finally compare our result with the classical case.

Keywords: linear canonical transform, Fourier transform, convolution.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Joseph Fourier (1822) mengemukakan bahwa sebuah fungsi periodik dapat direpresentasikan dengan mengombinasikan penjumlahan tak hingga dari fungsi sinus dan cosinus. Representasi fungsi ini kemudian dikenal sebagai deret Fourier.Deret Fourier merupakan cabang analisis fourier yang berfungsi untuk memecahkan masalah persamaan panas[7]. Beberapa tahun setelah penemuan ini, deret fourier dikembangkan menjadi bentuk yang lebih umum sehingga dapat diterapkan pada fungsi yang non-periodik, bentuk yang lebih umum ini yang kemudian dikenal sebagai transformasi Fourier (TF). Sejak penemuan ini, transformasi Fourier menjadi metoda yang sangat cocok untuk menganalisis fungsi atau sinyal, karena transformasi Fourier dapat mengubah fungsi atau sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi.

Salah satu penerapan transformasi Fourier adalah transformasi kanonik linier (TKL). Transformasi kanonik linier merupakan generalisasi dari transformasi Fourier yang memiliki banyak aplikasi di beberapa bidang. Salah satu sifat TKL adalah konvolusi. Banyak penelitian yang mengkaji tentang konvolusi TKL, diantaranya [2,3]. Namun, eksistensi teorema konvolusi TKL masih belum memiliki bentuk ekspresi yang dapat diterima secara luas [2].

Berdasarkan uraian diatas, maka diangkat tema dalam kajian pustaka ini mengenai struktur konvolusi untuk transformasi kanonik linier dengan judul ***"Teorema Konvolusi Untuk Transformasi Fourier Dan Transformasi Kanonik Linier ".***

I.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan judul yang diangkat dan sedikit uraian pada latar belakang diatas, maka kajian pustaka ini akan menguraikan tentang generalisasi sifat konvolusi transformasi Fourier pada transformasi kanonik linier.

I.3 Batasan Masalah

Tugas akhir ini dibatasi pada sifat translasi dan modulasi dari TKL.

I.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah membandingkan sifat konvolusi transformasi Fourier dan transformasi kanonik linier.

I.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi empat bab yang dimulai dari bab pendahuluan dan diakhiri dengan bab penutup.

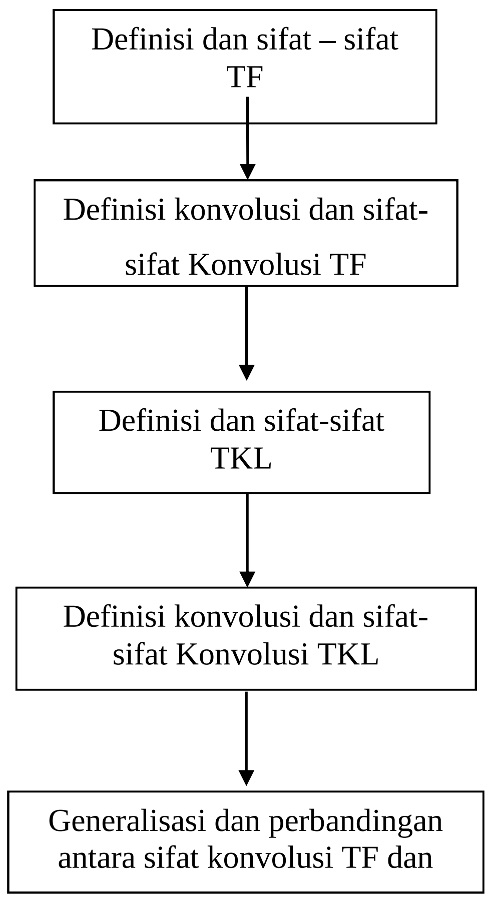
BAB I Pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah , tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II Tinjauan Pustaka, yang berisi penjelasan tentang mengenai transformasi Fourier, sifat – sifat transformasi Fourier, konvolusi dan sifat – sifat konvolusi transformasi Fourier.

BAB III Hasil dan Pembahasan, yang berisi penjelasan tentang transformasi kanonik linier, sifat – sifat transformasi kanonik linier, konvolusi dan sifat – sifat konvolusi transformasi kanonik linier.

BAB IV Penutup.

I.6 Alur kerja



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah alat untuk mengubah fungsi dari domain waktu ke domain frekuensi. Didalam pengolahan citra,transformasi Fourier digunakan untuk menganalisis frekuensi pada operasi seperti perekaman citra, perbaikan kualitas citra, restorasi citra, pengodean, dan lain – lain.

Definisi 2.1.1 (**Transformasi Fourier)** *Misalkan diberikan sebuah fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *transformasi Fourier f didefinisikan oleh*

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx. \quad (1)$$

Karena $e^{i\omega x} = \cos\ \omega x + i sin\ \omega x$ maka (1) dapat ditulis menjadi

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\ \omega x - i\sin\omega x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx. \quad (2)$$

Sifat – sifat transformasi Fourier sebagai berikut.

a. Linieritas

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap* $\omega \in \mathbb{R}$ *maka*

$$\mathcal{F}\{f+g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\{g\}(\omega). \quad (3)$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f+g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f+g)(x)e^{-i\omega x}\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}\ dx$$

$$= \mathcal{F}\,\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\,\{g\}(\omega). \blacksquare$$

Jadi, $\mathcal{F}\,\{f+g\}(\omega) = \mathcal{F}\,\{f\}(\omega) + \mathcal{F}\,\{g\}(\omega)$.

b. Perkalian konstanta

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan untuk setiap* $k \in \mathbb{C}$ *maka*

$$\mathcal{F}\,\{kf\}(\omega) = k\mathcal{F}\,\{f\}(\omega). \tag{4}$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\,\{kf\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (kf(x))e^{-i\omega x}\, dx.$$

Karena k adalah sebuah konstanta, maka

$$\mathcal{F}\,\{kf\}(\omega) = k\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= k\mathcal{F}\,\{f\}(\omega). \blacksquare$$

Jadi, $\mathcal{F}\,\{kf\}(\omega) = k\mathcal{F}\,\{f\}(\omega)$.

c. Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan translasi* $(\tau_k f)(x) = f(x-k)$, *maka*

$$\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\,\{f\}(\omega). \tag{5}$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\,\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_k f)e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-k)e^{-i\omega x}\, dx.$$

Misalkan $u = x - k\ , x = u + \alpha, dx = du$. Sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}\,\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+k)}du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}e^{-i\omega k}du.$$

Karena $e^{-i\omega k}$ adalah sebuah konstanta maka

$$\mathcal{F}\,\{f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du$$

$$= e^{-i\omega k}\,\mathcal{F}\,\{f\}(\omega).\ \blacksquare$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\,\{f\}(\omega)$.

d. Modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan* $\omega_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* $\left(\mathbb{M}_{\omega_0} f\right)(x) = e^{i\omega_0 x}f(x)$, *maka*

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) = \mathcal{F}\,\{f\}(\omega - \omega_0). \tag{6}$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(\mathbb{M}_{\omega_0} f)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 x}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\omega_0)x}$$

$$= \mathcal{F}\,\{f\}(\omega - \omega_0).\ \blacksquare$$

Jadi, $\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\right\}(\omega) \ = \mathcal{F}\,\{f\}(\omega - \omega_0)$.

e. Translasi dan modulasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ dan $k, \omega_0 \in \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(x) = e^{i\omega_0 x}f(x-k)$ maka

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(x)\right\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0). \tag{7}$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(x)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 x} f(x-k)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-k)e^{-i(\omega-\omega_0)x}\,dx$$

$$= e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega-\omega_0). \blacksquare$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(x)\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega-\omega_0)$.

Contoh transformasi Fourier

1. Misalkan $f(x) = \begin{cases} 1, jika -1 \le x \le 1, \\ 0, jika\ |x| > 1. \end{cases}$

Berdasarkan definisi transformasi Fourier (1) maka transformasi Fourier $f(x)$ adalah

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1e^{-i\omega x}dx + \int_{-\infty}^{-1} 0e^{-i\omega x}dx + \int_{1}^{\infty} 0e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx = \int_{-1}^{1}(cos\omega x - isin\omega x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} cos\omega x\,dx - i\int_{-1}^{1} sin\omega x\,dx$$

$$= \frac{1}{\omega} sin\omega x\Big]_{-1}^{1} - i\frac{1}{\omega} cos\omega x\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\omega}(sin\omega x]_{-1}^{1} + icos\omega x]_{-1}^{1})$$

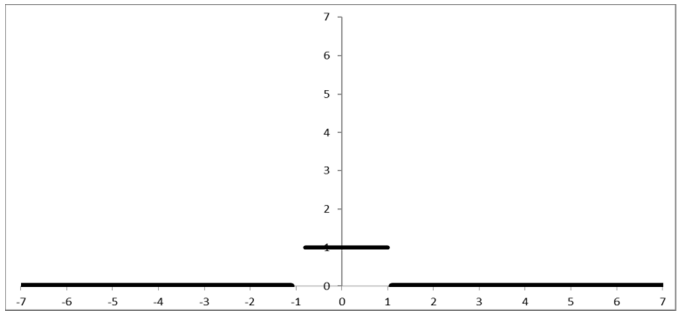
$$= \frac{1}{\omega}(sin\omega - \sin(-\omega) + i(cos\omega - \cos(-\omega))$$

$$= \frac{1}{\omega}(sin\omega + sin\omega) + i(cos\omega - cos\omega)$$

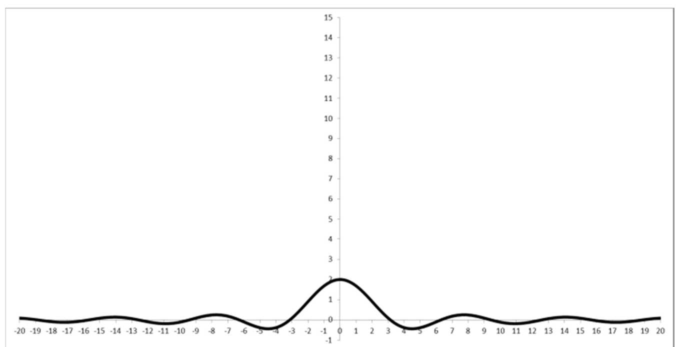
$$= \frac{2}{\omega} sin\omega.$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{2}{\omega} sin\omega$.

Berikut contoh grafik sebelum di transformasi.



Grafik setelah mengalami transformasi.



2. Misalkan $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, jika\ x \geq 0, \\ \ 0, jika\ x < 0. \end{cases}$

Terlebih dahulu perlu untuk pastikan apakah $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty = \int_{-\infty}^{0} -e^{-x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\big]_0^{\infty} = 1.$$

Jadi, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Karena $f \in L^1(\mathbb{R})$ maka

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} o\ dx + \int_{0}^{-\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} = 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+\omega i)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{1+\omega i}\ e^{-x(1+\omega i)}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{1+\omega i}.$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{1+\omega i}$.

3. **Transormasi Fourier Gauss**. Misalkan $f(x) = e^{-Ax^2}$, $\forall$ A > 0 maka

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\ e^{-\frac{\omega^2}{4A}}$$

Bukti.

Dari definisi transformasi Fourier diketahui $f(x) = e^{-Ax^2}$ maka diperoleh

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(x^2 + i\frac{\omega}{A}x\right)}\, dx.$$

Dengan menggunakan kuadrat sempurna, persamaan menjadi

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(x^2 + \frac{i\omega}{A}x + \left(\frac{i\omega}{2A}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2A}\right)^2\right)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(x^2 + \frac{i\omega}{A}x + \left(\frac{i\omega}{2A}\right)^2\right) + A\left(\frac{i\omega}{2A}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(x^2 + \frac{i\omega}{A}x + \left(\frac{i\omega}{2A}\right)^2\right) - A\left(\frac{\omega^2}{4A^2}\right)}\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(x + \frac{i\omega}{2A}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{4A}\right)}\ dx$$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(x + \frac{i\omega}{2A}\right)^2}\ e^{-\frac{\omega^2}{4A}} dx\, .$$

Karena $e^{-\frac{\omega^2}{4A^2}}$ adalah sebuah konstanta, maka persamaan diatas ditulis menjadi

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\left(x + \frac{i\omega}{2A}\right)^2}\ dx.$$

Misalkan $u = x + \frac{iw}{2A}$, $du = dx$

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Au^2} du$$

Karena $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$, maka

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

Sehingga diperoleh Transformasi Fourier dari $f(x) = e^{-Ax^2}$ adalah

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{\omega^2}{4A}}.$$

II.2 Invers Transformasi Fourier

Definisi 2.2.1 (Invers Transformasi Fourier) *Misalkan fungsi* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *maka invers dari transformasi Fourier ditulis sebagai*

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (8)$$

Contoh invers transformasi Fourier

Misalkan gelombang persegi didefinisikan sebagai

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1, |x| \leq a, -a < x < a, \\ 0, |x| > a, x > a \text{ atau } x < a. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi invers transformasi Fourier (8), diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_R \mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\omega}^{a} 0 e^{i\omega x} d\omega + \int_{-a}^{a} 1 e^{i\omega x} + \int_{a}^{\omega} 0 e^{i\omega x} d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ix}e^{i\omega x}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ix}e^{iax} - \frac{1}{ix}e^{-iax}\right] = \frac{1}{2\pi ix}\left[e^{iax} - e^{-iax}\right].$$

Dengan aturan Euler, diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{2\pi ix}[cosax + isinax - (cosax - isinax)]$$

$$= \frac{1}{2\pi ix}2isinax = \frac{sinax}{\pi x}.$$

Jadi, invers transformasi Fourier $\Pi_a(x)$ adalah $f(x) = \frac{sinax}{\pi x}$.

II.3 Teorema Konvolusi Untuk Transformasi Fourier

Definisi 2.3.1 (Konvolusi) *Diberikan* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Konvolusi dari fungsi* f *dan* g *ditulis sebagai* $f * g$ *dan didefinisikan sebagai*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt. \tag{9}$$

Sifat – sifat konvolusi sebagai berikut.

a. Komutatif

$$(f * g)(x) = (g * f)(x). \tag{10}$$

Bukti. Dari definisi konvolusi (9) diperoleh

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Misalkan $u = x - t$, $t = x - u$, $du = -dt, dt = -du$. Maka

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)(-du) = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)du.$$

Karena u merupakan variabel *dummy*, u dapat diganti dengan t. Sehingga

$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = (g * f)(x)$. ■

Jadi, $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

b. Translasi

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dan translasi* $\tau_k f = f(x-k)$, *maka*

$$(f * \tau_k f)(x) = \tau_k (f * f)(x). \tag{11}$$

Bukti. Dari definisi konvolusi (9) diperoleh

$$\begin{aligned}(f * \tau_k f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\tau_k f(x-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t-k)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f\big((x-k)-t\big)dt \\ &= (f * f)(x-k) \\ &= \tau_k (f * f)(x). \blacksquare\end{aligned}$$

Jadi, $(f * \tau_k f)(x) = \tau_k (f * f)(x)$.

c. Konvolusi terhadap delta

$$(f * \delta)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(x-t)dt = f(x). \tag{12}$$

Bukti. Dari sifat fungsi δ diperoleh

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$.

Untuk $\delta(x-t) = \begin{cases} 0, jika\ x \neq t \\ 1, jika\ x = t \end{cases}$. Sehingga

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-0)dx = f(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-t)dx = f(t)\,.\blacksquare$

Karena x dan t merupakan variabel *dummy* maka

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(x-t)dt = f(x).$

d. Linieritas

$$f*(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha(f*g_1)+\beta(f*g_2) \text{ dan}$$

$$(\alpha g_1+\beta g_2)*f=\alpha(g_1*f)+\beta(g_2*f). \tag{13}$$

Bukti. Untuk kasus I. Dari definisi konvolusi (9) diperoleh

$$\begin{aligned} f*(\alpha g_1+\beta g_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\alpha g_1+\beta g_2)(x-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(f(t)\alpha g_1(x-t)+f(t)\beta g_2(x-t)\big)dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Karena α dan β merupakan konstanta, maka (14) menjadi

$$\begin{aligned} f*(\alpha g_1+\beta g_2) &= \alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g_1(x-t)dt+\beta\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g_2(x-t)dt \\ &= \alpha(f*g_1)(x)+\beta(f*g_2)(x). \end{aligned}$$

Jadi, $f*(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha(f*g_1)(x)+\beta(f*g_2)(x)$.

Untuk kasus II. Dari definisi konvolusi (9) diperoleh

$$\begin{aligned} (\alpha g_1+\beta g_2)*f &= \int_{-\infty}^{\infty}(\alpha g_1+\beta g_2)(t)f(x-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\alpha g_1(t)f(x-t)+\beta g_2 f(x-t))\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\alpha g_1(t)f(x-t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\beta g_2 f(x-t)dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Karena α dan β adalah konstanta real, maka (15) menjadi

$(\alpha g_1 + \beta g_2) * f = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) f(x-t)dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g_2 f(x-t)dt.$

$$= \alpha(g_1 * f)(x) + \beta(g_2 * f)(x). \blacksquare$$

Jadi, $(\alpha g_1 + \beta g_2) * f = \alpha(g_1 * f)(x) + \beta(g_2 * f)(x)$.

Teorema 2.3.2 *Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, maka transformasi Fourier dari fg dituliskan sebagai*

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f\}(\omega) * \mathcal{F}\{g\}(\omega). \quad (16)$$

Bukti. Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dimana $\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}$ dan $\mathcal{F}\{g\} = \hat{g}$. Berdasarkan definisi transformasi Fourier (1), maka $\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-i\omega x}dx$. Selanjutnya, berdasarkan invers transformasi Fourier (8) maka f dan g dapat dituliskan menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)e^{ivx}dv$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)e^{izx}dz. \quad (17)$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-i\omega x}dx. \quad (18)$$

Masukkan (17) ke (18) sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)e^{ivx}dv\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)e^{izx}dz\right) e^{-i\omega x}dx. \quad (19)$$

Karena $\frac{1}{2\pi}$ merupakan kostanta sehingga (19) menjadi

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)e^{ivx}dv\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)e^{izx}dz\right)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} dv\right) \hat{g}(z) e^{izx} dz\right) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} \hat{g}(z) e^{izx} dv dz\right)\right) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \hat{g}(z) e^{ivx} e^{izx} e^{-i\omega x} dv dz dx$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \hat{g}(z) e^{i(v+z-\omega)x} dv dz dx$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \hat{g}(z) e^{i(v+z-\omega)x} dx dv dz \qquad (20)$$

Karena $\hat{f}(v)$ dan $\hat{g}(z)$ tidak bergantung pada *x*, maka (20) dapat ditulis menjadi

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \hat{g}(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v+z-\omega)x} dx dv dz. \qquad (21)$$

Dari invers transformasi Fourier (8) dan misalkan $\mathcal{F}\{f\}(\omega) = 1$. Sehingga

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{i\omega x} d\omega = \delta(x)$$

atau $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \delta(x)$. Ini berarti $2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega$.

Maka,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v+z-\omega)x} dx = 2\pi\, \delta(v + z - \omega).$$

Sehingga (21) menjadi

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \hat{g}(z) 2\pi\, \delta(v + z - \omega) dv dz. \qquad (22)$$

Karena 2π adalah konstanta, maka

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \hat{g}(z) \delta(v + z - \omega) dv dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) dv \hat{g}(z) \delta(v + z - \omega) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) dv \int_{z=-\infty}^{\infty} \hat{g}(z) \delta(v + z - \omega) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z) \delta(v + z - \omega) dz\, dv. \tag{23}$$

Perhatikan $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z) \delta(v + z - \omega) dz$. Dari sifat konvolusi terhadap delta (12) diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\, \delta(v + z - \omega) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z)\, \delta(v - \omega + z) dz = \hat{g}(v - \omega).$$

Karena v dan ω adalah variabel *dummy*, maka $\hat{g}(v - \omega) = \hat{g}(\omega - v)$.

Sehingga (23) menjadi

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \hat{g}(\omega - v) dv. \tag{24}$$

Dari definisi konvolusi (9) diperoleh

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\omega) \tag{25}$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\{f\ g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\omega). \blacksquare$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f\ g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\mathcal{F}\{f\}(\omega) * \mathcal{F}\{g\}(\omega)\right)$.

Teorema 2.3.3 *Misalkan* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Maka transformasi Fourier dari* $f * g$ *ditulis sebagai*

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) \mathcal{F}\{g\}(\omega). \tag{26}$$

Bukti. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt\, e^{-i\omega x} dx .$$

Misalkan $v = x - t$, $x = v + t \iff dx = dv$. Sehingga

$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(v)dt\, e^{-i\omega(v+t)}dv$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt\ \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\, e^{-i\omega v}\, dv$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\omega)\, \mathcal{F}\{g\}(\omega). \blacksquare \qquad (27)$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

Teorema 2.3.4 (Translasi) *Misalkan* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Jika* $\tau_k = f(x - k)$ *maka transformasi Fourier dari* $\tau_k f * g$ *dan* $f * \tau_k g$ *dapat dituliskan sebagai*

$$\mathcal{F}\{\tau_k f * g\} = \mathcal{F}\{f * \tau_k g\} = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega) \qquad (28)$$

Bukti. Untuk kasus I. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$\mathcal{F}\{\tau_k f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)g(x-t)dt\, e^{-i\omega x}dx.$

Misalkan $x - t = v, x = v + t, dx = dv$. Sehingga

$\mathcal{F}\{\tau_k f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)g(v)dt\, e^{-i\omega(v+t)}dv$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)g(v)e^{-i\omega v}e^{-i\omega t}dt\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)e^{-i\omega t}dt\ \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i\omega v}\, dv. \qquad (29)$$

Misalkan $t - k = s,\ t = s + k\ , dt = ds$. Sehingga

$\mathcal{F}\{\tau_k f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega(s+k)}ds\ \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i\omega v}\, dv$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}e^{-i\omega k}ds\ \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i\omega v}\, dv$$

$$= e^{-i\omega k}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i\omega v}\, dv$$

$$= e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega). \blacksquare \qquad (30)$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\tau_k f * g\} = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

Untuk kasus II. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$\mathcal{F}\{f * \tau_k g\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t-k)dt\, e^{-i\omega x}dx.$

Misalkan $x - t - k = v,\ x = v + t + k \ \Leftrightarrow dx = dv$. Sehingga

$$\mathcal{F}\{f * \tau_k g\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(v)dt\, e^{-i\omega(v+t+k)}dv$$

$$= e^{-i\omega k}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\ \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i\omega v}dv$$

$$= e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega). \blacksquare \tag{31}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f * \tau_k g\} = e^{-i\omega k}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

Teorema 2.3.5 (Modulasi) *Misalkan* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.*Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0}g(x) = e^{i\omega_0 x}g(x)$ *maka transformasi Fourier dari* $\mathbb{M}_{\omega_0}f * g$ *dan* $f * \mathbb{M}_{\omega_0}g$ *dapat dituliskan sebagai*

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f * g\right\} = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\mathcal{F}\{g\}(\omega)\ dan$$

$$\mathcal{F}\left\{f * \mathbb{M}_{\omega_0}g\right\} = \mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega - \omega_0) \tag{32}$$

Bukti. Untuk kasus I. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f * g\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t)g(x-t)\, dt\, e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\, e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega x}dtdx. \tag{33}$$

Misalkan $x - t = v,\ x = v + t \ \Leftrightarrow dx = dv$. Sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f * g\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(v)\, e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega(v+t)}dt\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-i\omega v}\, dv$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\mathcal{F}\{g\}(\omega). \blacksquare \tag{34}$$

Jadi, $\mathcal{F}\left\{\mathbb{M}_{\omega_0}f * g\right\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

Untuk kasus II. Dari definisi transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\left\{f * \mathbb{M}_{\omega_0}g\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega_0(x-t)}g(x-t)\, dte^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega_0 (x-t)} g(x-t) e^{-i\omega x}\, dt\, dx. \tag{35}$$

Misalkan $x - t = v, x = v + t\, , dx = dv$. Sehingga

$$\mathcal{F}\{f * \mathbb{M}_{\omega_0} g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega_0 v} g(v) e^{-i\omega(v+t)}\, dt\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{-i(\omega-\omega_0)v}\, dv$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega - \omega_0). \blacksquare \tag{36}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f * \mathbb{M}_{\omega_0} g\} = \mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega - \omega_0)$.

Teorema 2.3.6 (Translasi dan Modulasi) *Misalkan* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Jika* $\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f(x) = e^{i\omega_0 x} f(x-k)$ *maka transformasi Fourier dari* $\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f * g$ *dan* $f * \mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k g$ *dapat dituliskan sebagai*

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f * g\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\mathcal{F}\{g\}(\omega)\ dan$$

$$\mathcal{F}\{f * \mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k g\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega - \omega_0). \tag{37}$$

Bukti. Untuk kasus I. Dari definisi konvolusi (9) dan transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t-k) g(x-t) dt e^{-i\omega x} dx.$$

Misalkan $x - t = v, x = v + t, dx = dv$. Sehingga

$$\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f * g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k)\, g(v) e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega(v+t)} dt dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k) e^{-i(\omega-\omega_0)t} g(v) e^{-i\omega v} dt dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-k) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{-i\omega v} dv$$

$$= e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\mathcal{F}\{g\}(\omega). \blacksquare \tag{38}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k f * g\}(\omega) = e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{f\}(\omega - \omega_0)\mathcal{F}\{g\}(\omega)$.

Untuk kasus II. Dari definisi konvolusi (9) dan transformasi Fourier (1) diperoleh

$$\mathcal{F}\{f * \mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega_0(x-t)}g(x-t-k)dte^{-i\omega x}dx.$$

Misalkan $x - t = v, x = v + t, dx = dv$. Sehingga

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f * \mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k g\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega_0 v}g(v-k)e^{-i\omega(v+t)}dtdv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \int_{-\infty}^{\infty} g(v-k)e^{-i(\omega-\omega_0)v}dv \\ &= \mathcal{F}\{f\}(\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{g\}(\omega-\omega_0). \blacksquare \qquad (39)\end{aligned}$$

Jadi, $\mathcal{F}\{f * \mathbb{M}_{\omega_0}\tau_k g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)e^{-i(\omega-\omega_0)k}\mathcal{F}\{g\}(\omega-\omega_0)$.