

SKRIPSI

**DESAIN KONTROL KAMPANYE DAN PENGOBATAN
MENGUNAKAN METODE LINEARISASI *INPUT OUTPUT*
PADA MODEL PENYAKIT MENINGITIS**

Disusun dan diajukan oleh

ANDI DULUNG LAIMBONG

H11115007



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

2021

**DESAIN KONTROL KAMPANYE DAN PENGOBATAN
MENGUNAKAN METODE LINEARISASI *INPUT OUTPUT*
PADA MODEL PENYAKIT MENINGITIS**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada Program Studi MATEMATIKA Departemen Matematika Fakultas
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin**

ANDI DULUNG LAIMBONG

H11115007

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN**

MAKASSAR

2021

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : ANDI DULUNG LAIMBONG

NIM : H11115007

Program Studi : MATEMATIKA

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

**DESAIN KONTROL KAMPANYE DAN PENGOBATAN
MENGUNAKAN METODE LINEARISASI *INPUT OUTPUT* PADA
MODEL PENYAKIT MENINGITIS**

Adalah benar hasil karya saya sendiri bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain dan bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini merupakan hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 24 September 2021

Yang Menyatakan



ANDI DULUNG LAIMBONG

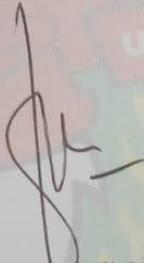
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

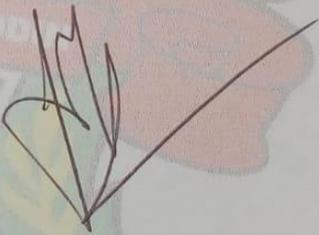
**DESAIN KONTROL KAMPANYE DAN PENGOBATAN
MENGUNAKAN METODE LINEARISASI *INPUT OUTPUT* PADA
MODEL PENYAKIT MENINGITIS**

Disetujui oleh :

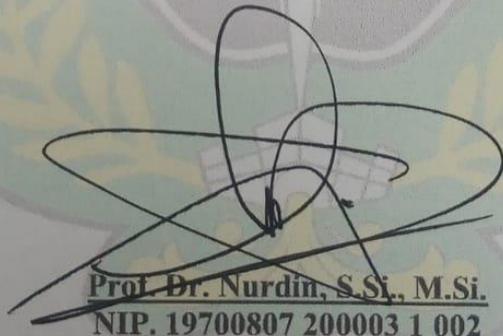
Pembimbing Utama

Pembimbing Pertama


Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.
NIP. 19800904 200312 2001


Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1 001

Ketua Program Studi


Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002



Pada Tanggal : 24 September 2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

DESAIN KONTROL KAMPANYE DAN PENGOBATAN MENGUNAKAN METODE LINEARISASI *INPUT-OUTPUT* PADA MODEL PENYAKIT MENINGITIS

Disusun dan diajukan oleh :

ANDI DULUNG LAIMBONG

H11115007

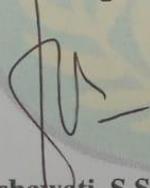
Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana pada Program Studi MATEMATIKA Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 24 September 2021

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

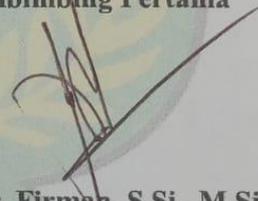
Menyetujui

Pembimbing Utama



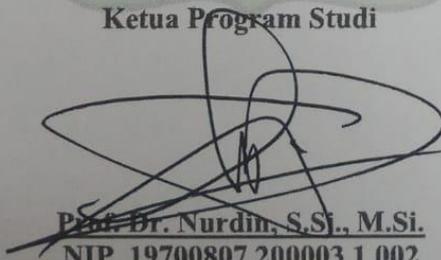
Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.
NIP. 19800904 200312 2001

Pembimbing Pertama



Dr. Firman, S.Si., M.Si.
NIP. 19680429 200212 1 001

Ketua Program Studi



Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002



KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah Azza Wa Jalla Rabb semesta alam yang ditangan-Nya terenggam nyawa seluruh makhluk semesta alam, yang Maha kekal sebelum sesuatunya ada, dan akan tetap kekal setelah segala sesuatunya tiada. Sholawat serta salam semoga selalu dilimpahkan kepada Nabi Muhammad ﷺ dan kepada para keluarga serta Sahabat beliau. Alhamdulillah Wasyukurillah, berkat pertolongan Allah akhirnya skripsi dengan judul "**DESAIN KONTROL KAMPANYE DAN PENGOBATAN MENGGUNAKAN METODE LINEARISASI *INPUT OUTPUT* PADA MODEL PENYAKIT MENINGITIS "** yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana sains pada Program Studi MATEMATIKA Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat merampungkan. Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan tambahan pengetahuan baru bagi para pembelajar dalam program studi MATEMATIKA.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada ayahanda almarhum **D.S. Andi Balado, S.H.** dan ibunda **Andi Sitrawati** atas segala hal yang diberikan dan segala hal yang dipendam untuk diberikan baik yang terkendala waktu maupun materi. Ucapan terima kasih juga kepada saudara serahim **Andi Ali Beto, S.H.** yang memberikan dukungan fisik maupun dukungan moril, semoga harapan kalian segera terkabulkan.

Dengan segala kerendahan hati penulis meyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA**, selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin, M.Si.**, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.

3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.**, selaku Ketua Departemen Matematika atas segala fasilitas, kebijakan dan dukungan yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
4. Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing utama dan Bapak **Dr. Firman, S.Si., M.Si.**, selaku dosen pembimbing pertama yang dengan setulus hati telah meluangkan waktunya ditengah berbagai kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Bapak **Prof. Dr. Eng. Mawardi, M.Si.**, dan Bapak **Andi Galsan Mahie., S.Si., M.Si.**, selaku penguji atas kesediaannya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Bapak **Dr. Khaeruddin, M.Sc.**, selaku penasehat akademik atas waktu, dukungan serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama dalam menempuh pendidikan.
7. Bapak/Ibu **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika. Serta Staf Departemen Matematika yang telah membantu banyak dalam pengurusan akademik selama ini.
8. Terima kasih kepada para sahabat yaitu **Afrizal Ode, S.Si., Fitri Amalyah, S.Si., M.Si., Wardiman H., S.Si., Izzah D., S.Si., Ahmad Nurdiansyah, S.Si., Abd. Rahman, S.Si., Muh. Taswin, S.Si., Muh. Anugrah A., Rini Septiani M., S.Si., Asryani Syam, S.Si., Lia Y. S.Si., Muh. Rifki Nisardi, S.Si.** yang telah menemani, selalu meluangkan waktu, memberikan doa dan dukungan, serta tempat berbagi keluh kesah penulis selama kurang lebih 6 tahun ini.
9. Teman-teman seperjuangan **Program Studi Matematika 2015** yang telah mendukung dan berjuang bersama-sama selama ini.
10. Kakak-kakak yang terhormat **Senior Departemen Matematika** angkatan 2013 dan 2014.
11. Seluruh teman-teman **KKN TEMATIK KEMENDES BARRU Gelombang 102**, dan juga khususnya kepada **Posko DESA PAO-PAO** yaitu **Ari, Mega, Hanafi, Nunu, Wanda, Fajar, Jeje, dan Kesya** yang telah menjadi teman dan

keluarga baru. Terima kasih atas waktu singkat dan pengalaman yang bermakna. Semoga kedepannya silaturahmi yang telah dibangun bersama tetap terjalin dengan baik.

12. Teman-teman **SIMETRIS 2015**.
13. Teman-teman **HIMATIKA dan KM FMIPA UNHAS 2015**.
14. Keluarga Besar **Gabungan Pemuda Pelajar Mahasiswa Barru Komisariat UNHAS**.
15. Keluarga Besar **Unit Kegiatan Mahasiswa Tenis Lapangan UNHAS**.
16. Keluarga Besar **Unit Kegiatan Mahasiswa Basket UNHAS**.
17. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dan tak sempat penulis tuliskan satu per satu.

Semoga segala bantuan yang tulus dan ikhlas ditujukan kepada penulis mendapat balasan yang terbaik dari Allah SWT. Mudah-mudahan tulisan ini bermanfaat untuk adik-adik, kakak-kakak, dan semua pihak yang membutuhkan dan terutama untuk penulis sendiri.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Makassar, 24 September 2021



ANDI DULUNG LAIMBONG

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : ANDI DULUNG LAIMBONG
NIM : H11115007
Program Studi : MATEMATIKA
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Noneklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul :

Desain Kontrol Kampanye Dan Pengobatan Menggunakan Metode Linearisasi *Input Output* Pada Model Penyakit Meningitis

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 24 September 2021

Yang menyatakan



ANDI DULUNG LAIMBONG

ABSTRAK

Dalam penelitian ini, model matematika digunakan untuk mempelajari mengenai pengendalian penularan penyakit meningitis dengan memberikan kontrol terhadap penyakit tersebut. Kontrol yang digunakan dalam pengendalian ini berupa penerapan kampanye pada populasi manusia yang terinfeksi tanpa gejala dan pemberian pengobatan pada populasi manusia yang terinfeksi dengan gejala. Populasi manusia dibagi menjadi lima kompartemen yaitu kompartemen manusia yang rentan (S), kompartemen manusia yang membawa (C), kompartemen manusia yang terinfeksi tanpa gejala (I_A), kompartemen manusia yang terinfeksi dengan gejala (I_S), dan kompartemen manusia yang pulih sementara (R). Metode linearisasi input output digunakan untuk mendesain bentuk analitik dari kedua kontrol tersebut. Kedua pengontrolan dijadikan sebagai faktor input dan populasi manusia yang terinfeksi tanpa gejala dan populasi manusia terinfeksi dengan gejala sebagai faktor output. Berdasarkan hasil simulasi numerik bahwa pada kasus 1, proporsi jumlah manusia yang terinfeksi tanpa gejala penyakit meningitis berkurang sebanyak 3.3% dibandingkan tanpa adanya kampanye dan proporsi jumlah manusia yang pulih sementara dari penyakit meningitis bertambah sebanyak 9% setelah adanya pengontrolan berupa kampanye. Kemudian pada kasus 2, proporsi jumlah manusia yang terinfeksi dengan gejala juga berkurang sebanyak 12.4% dibanding tanpa adanya pengobatan dan proporsi jumlah manusia yang pulih sementara dari penyakit meningitis bertambah sebanyak 11.2% setelah adanya pengontrolan berupa pengobatan. Simulasi numerik menunjukkan bahwa kontrol melalui kampanye dan pengobatan merupakan faktor pendukung yang efektif dalam menekan laju jumlah penderita penyakit meningitis.

Kata kunci : Meningitis, Kampanye, Pengobatan, Model Matematika, Metode Linearisasi *Input-Output*.

ABSTRACT

In this study, a mathematical model is used to study the control of meningitis transmission by providing control over the disease. The controls used in this control are the application of campaigns to the infected human population without symptoms and the provision of treatment to the infected human population with symptoms. The human population is divided into five compartments, namely the susceptible human compartment (S), the carrier human compartment (C), the asymptomatic infected human compartment (I_A), the symptomatic infected human compartment (I_S), and the temporarily recovered human compartment (R). The input output linearization method is used to design the analytical form of the two controls. Both controls are used as input factors and the infected human population without symptoms and the infected human population as output factors. Based on the numerical simulation results, in case 1, the proportion of infected humans without meningitis symptoms decreased by 3.3% compared to the absence of a campaign and the proportion of humans who recovered temporarily from meningitis increased by 9% after controlling for a campaign. Then in case 2, the proportion of people infected with symptoms also decreased by 12.4% compared to without treatment and the proportion of people who recovered temporarily from meningitis increased by 11.2% after treatment was controlled. Numerical simulation shows that control through campaigns and treatment is an effective supporting factor in reducing the number of people with meningitis.

Keywords: Meningitis, Campaign, Treatment, Mathematical Model, Input-Output Linearization Method.

DAFTAR ISI

| | |
|--|-----|
| HALAMAN SAMBUNG | i |
| HALAMAN JUDUL..... | ii |
| LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN..... | iii |
| LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING | iv |
| LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI | v |
| KATA PENGANTAR | vi |
| PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS | ix |
| ABSTRAK | x |
| <i>ABSTRACT</i> | xi |
| DAFTAR ISI..... | xii |
| DAFTAR GAMBAR | xiv |
| DAFTAR TABEL..... | xv |
| BAB I PENDAHULUAN | 1 |
| I.1 Latar Belakang | 1 |
| I.2 Rumusan Masalah | 3 |
| I.3 Batasan Masalah..... | 3 |
| I.4 Tujuan Penelitian | 3 |
| I.5 Manfaat Penelitian | 4 |
| BAB II TINJAUAN PUSTAKA..... | 5 |
| II.1 Penyakit Meningitis..... | 5 |
| II.2 Pencegahan Penyakit Meningitis..... | 7 |
| II.3 Model Matematika Penyebaran Penyakit Meningitis..... | 8 |
| II.4 Metode Linearisasi <i>Input Output</i> | 12 |
| II.5 Titik Kesetimbangan Sistem | 17 |
| II.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan | 17 |
| II.7 Metode Forward Runge Kutta..... | 18 |
| BAB III METODE PENELITIAN..... | 20 |
| III.1 Identifikasi Masalah | 20 |

| | | |
|----------------|---|----|
| III.2 | Studi Literatur..... | 20 |
| III.3 | Formulasi Model Matematika Penyebaran Penyakit..... | 20 |
| III.4 | Analisis Kestabilan..... | 20 |
| III.5 | Formulasi Model Desain Kontrol..... | 21 |
| III.6 | Simulasi Numerik..... | 21 |
| BAB IV | HASIL DAN PEMBAHASAN | 22 |
| IV.1 | Normalisasi Model | 22 |
| IV.2 | Desain Kontrol Melalui Metode Linearisasi <i>Input Output</i> | 23 |
| IV.3 | Desain Kontrol Kampanye (u_1) | 24 |
| IV.4 | Desain Kontrol Pengobatan (u_2)..... | 28 |
| IV.5 | Simulasi Numerik Sistem tanpa Kontrol dan dengan Kontrol | 31 |
| BAB V | PENUTUP..... | 43 |
| V.1 | Kesimpulan..... | 43 |
| V.2 | Saran | 43 |
| DAFTAR PUSTAKA | | 44 |
| LAMPIRAN | | 46 |

DAFTAR GAMBAR

| | |
|---|----|
| Gambar 2. 1 Diagram Kompartemen Penyebaran Penyakit Meningitis | 8 |
| Gambar 2. 2 Diagram Kompartemen Penyebaran Penyakit Meningitis. | 9 |
| Gambar 3. 1 Alur Kerja Penelitian..... | 21 |
| Gambar 4. 1 Grafik proporsi jumlah manusia yang <i>Susceptibles</i> (rentan) terhadap penyakit meningitis. | 33 |
| Gambar 4. 2 Grafik proporsi jumlah manusia yang <i>Carriers</i> (pembawa) penyakit meningitis. | 34 |
| Gambar 4. 3 Grafik proporsi jumlah manusia yang terinfeksi tanpa gejala (I_A) penyakit meningitis. | 35 |
| Gambar 4. 4 Grafik proporsi jumlah manusia yang terinfeksi dengan gejala (I_S) dari penyakit meningitis. | 36 |
| Gambar 4. 5 Grafik proporsi jumlah manusia yang pulih sementara (R) dari penyakit meningitis. | 37 |
| Gambar 4. 6 Grafik proporsi jumlah manusia yang <i>Susceptibles</i> (rentan) penyakit meningitis. | 38 |
| Gambar 4. 7 Grafik proporsi jumlah manusia yang <i>Carriers</i> (pembawa) penyakit meningitis. | 39 |
| Gambar 4. 8 Grafik proporsi jumlah manusia yang terinfeksi tanpa gejala (I_A) dari penyakit meningitis. | 40 |
| Gambar 4. 9 Grafik proporsi jumlah manusia yang terinfeksi dengan gejala (I_S) dari penyakit meningitis. | 41 |
| Gambar 4. 10 Grafik proporsi jumlah manusia yang pulih sementara (R) dari penyakit meningitis. | 42 |

DAFTAR TABEL

| | |
|---|----|
| Tabel 2. 1 Deskripsi parameter/variabel model (2.1)..... | 11 |
| Tabel 2. 2 Kestabilan dari sistem linear $x = f(x)$ dengan $\det J - \lambda I = 0$ | 18 |

BAB I

PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Penyakit menular merupakan salah satu masalah kesehatan yang banyak ditemui hampir semua negara berkembang. Penyakit ini adalah penyakit yang dapat ditularkan melalui virus, bakteri, dan jamur dengan berbagai media penularannya seperti bersentuhan. Penyakit menular umumnya bersifat akut dan menyerang semua lapisan masyarakat. Penyebab (agent) penyakit menular adalah unsur biologis yang bervariasi mulai dari partikel virus yang paling sederhana sampai organisme yang paling kompleks yang dapat menyebabkan penyakit pada manusia. Penyakit menular di Indonesia memiliki angka kematian yang relatif tinggi dalam kurun waktu yang relatif singkat (Widoyono, 2008). Oleh karena itu, diperlukan analisis lebih lanjut yang bertujuan untuk pengendalian penyakit menular tersebut.

Salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh agent penyakit (bakteri) adalah Meningitis. Penyakit Meningitis banyak ditemukan di daerah tropis dan subtropis. Penyakit meningitis bakteri yaitu *meningokokus* klinis telah dijelaskan oleh Vieusseux pada tahun 1805 selama wabah di sekitar Jenewa, Swiss. Kemudian pada tahun 1887, *Neisseria meningitidis* pertama kali diidentifikasi sebagai agen penyebab meningitis bakteri oleh Weichselbaum. Selama abad ke-20, wabah besar dicatat selama Perang Dunia I dan Perang Dunia II. Di benua Afrika, epidemi meningitis telah diketahui terjadi sejak lama. Dilaporkan dari pantai barat Afrika oleh G. William pada tahun 1909 dan telah terjadi sejak saat itu dan seterusnya. Epidemik penyakit ini secara berkala terus menghancurkan wilayah sub-Sahara Afrika, terdapat 340.000 kasus dengan 53.000 kematian terjadi dalam periode 10 tahun sejak 1951-1960 di kawasan ini, diperkirakan total populasi 35 juta (WHO, 1998).

Meningitis mengakibatkan peradangan selaput otak dan saraf punggung, serta septisemia (keracunan darah). Penderita penyakit meningitis dapat dengan sangat cepat jatuh sakit parah (Lewaherilla dkk., 2017). Penyakit menular ini

mempengaruhi sekitar 1,2 juta orang di seluruh dunia dan menyebabkan sekitar 135.000 kematian setiap tahunnya (Blyuss, 2016).

Banyaknya jumlah kasus dan penderita penyakit Meningitis membuat penyakit ini menarik untuk dikaji khususnya melalui pendekatan model matematika. Dengan pemodelan matematika masalah penyebaran penyakit demam berdarah dapat dianalisis secara matematis dan diperoleh hasil yang eksak dengan cara memodelkan masalah yang ada (Hananti & Mu'tamar, 2017).

Beberapa peneliti telah mengkaji mengenai pemodelan matematika penyebaran penyakit meningitis, diantaranya kajian Martinez dkk. pada tahun 2013. Dalam kajian tersebut digunakan model matematika diskrit berdasarkan automata seluler dengan membagi populasi menjadi lima kompartemen yaitu *susceptibles* (S), *carriers* (C), *infected without symptoms* (I_A), *infected with symptoms* (I_S), dan *recovered* (R). Diperoleh bahwa *carriers* (C) mempunyai peran dasar dalam penyebaran penyakit. Selanjutnya, karena wabah penyakit meningitis ini sudah menjadi fenomena umum di sabuk meningitis Afrika dan mengakibatkan banyak kematian maka diperlukan suatu tindakan kontrol agar penyebaran penyakit berkurang. Negara-negara dalam sabuk meningitis Afrika adalah Benin, Burkina Faso, Kamerun Utara, Chad, Ethiopia, Gambia, Ghana, Mali, Niger, Nigeria Utara, Senegal, dan Sudan. Asamoah dkk. pada tahun 2018 telah mengkaji model dinamika transmisi meningitis bakteri dengan tindakan kontrol berupa vaksinasi dan pengobatan yang diselesaikan dengan menggunakan teori kontrol optimal. Penelitian tersebut dilakukan dengan membagi populasi menjadi empat kompartemen yaitu *susceptibles* (S), *carriers* (C), *ill individuals* (I), dan *recovered* (R), dijelaskan bahwa vaksinasi diberikan kepada populasi yang rentan dan pengobatan diberikan kepada populasi pembawa dan yang telah terinfeksi penyakit meningitis.

Dalam jurnal yang ditulis oleh Nugraha dkk. (2016) menjelaskan tentang desain kontrol dengan menggunakan metode linearisasi *input output* pada penyakit

malaria. Pada skripsi yang ditulis oleh Ainun (2018) menjelaskan tentang desain kontrol vaksinasi dan *fogging* menggunakan metode linearisasi *input output* pada model penyakit demam berdarah dengue. Selanjutnya pada penelitian yang ditulis oleh Sulma (2020) menjelaskan tentang dinamika penyebaran penyakit meningitis dengan menggunakan teori kontrol optimal sehingga dapat mengurangi penyebaran penyakit meningitis. Pada penelitian ini penulis akan mengusulkan desain kontrol yang lain menggunakan metode linearisasi *input output*. Penelitian tersebut akan dituangkan ke dalam bentuk skripsi yang berjudul:

“Desain Kontrol Kampanye Dan Pengobatan Menggunakan Metode Linearisasi *Input Output* Pada Model Penyakit Meningitis”

I.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah diberikan sebelumnya, diperoleh rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana mengendalikan penyebaran penyakit meningitis?
2. Bagaimana menganalisa pengaruh penerapan kontrol yang dilakukan untuk menekan laju penyebaran penyakit *meningitis*?

I.3 Batasan Masalah

Model matematika penyebaran penyakit meningitis yang digunakan dibatasi pada penyakit meningitis *meningokokus* yang disebabkan oleh bakteri. Populasi dibagi menjadi lima kompartemen yaitu *susceptibles* (S), *carriers* (C), *infected without symptoms* (I_A), *infected with symptoms* (I_S), dan *recovered* (R).

I.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diberikan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian skripsi ini antara lain:

1. Mendesain fungsi kontrol yang dapat mengendalikan penyebaran penyakit meningitis menggunakan metode linearisasi *input output*.
2. Melakukan simulasi numerik untuk menganalisa pengaruh dari penerapan kontrol yang diperoleh.

I.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, yaitu memberikan gambaran kepada peneliti lain yang ingin mengembangkan penelitian mengenai penyebaran penyakit meningitis sebagai salah satu bahan kajian pustaka yang dapat digunakan untuk pemodelan matematika khususnya pada bidang matematika terapan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

II.1 Penyakit Meningitis

Meningitis adalah peradangan pada *meninges* yaitu selaput yang mengelilingi sumsum tulang belakang dan otak yang sering disebabkan oleh virus, bakteri, dan protozoa. Penyakit ini sebagian besar menyebar di komunitas atau masyarakat yang tinggal di lingkungan yang dekat (misalnya, staf polisi, sel polisi, mahasiswa, staf militer, dan penjara). Meningitis bakteri umumnya disebabkan oleh kuman seperti *Listeria monocytogenes*, *Streptococcus pneumoniae*, *Streptococcus* grup B, *Neisseria meningitidis* dan *Haemophilus influenzae* yang menyebar dari satu orang ke orang lain(Asamoah, dkk.,2018).

Infeksi ini bervariasi berdasarkan kelompok umur diantaranya *Streptococcus* grup B, *Streptococcus pneumoniae*, *Listeria monocytogenes* dan *Escherichia coli* kebanyakan ditemukan pada bayi baru lahir. *Streptococcus pneumoniae*, *Neisseria meningitidis*, *Haemophilus influenzae* tipe b (Hib) dan *Streptococcus* grup B umumnya terjadi pada bayi dan anak-anak. *Neisseria meningitidis* dan *Streptococcus pneumoniae* umumnya terjadi pada remaja dan dewasa muda. Selain itu, *Streptococcus pneumoniae*, *Neisseria meningitidis*, *Haemophilus influenzae* tipe b (Hib), *Streptococcus* grup B dan *Listeria monocytogenes* umumnya ditemukan pada orang dewasa yang lebih tua (Asamoah dkk. 2018). Meningitis *meningokokus* yang disebabkan oleh bakteri *Neisseria meningitidis* sangat penting karena memiliki potensi besar untuk menyebabkan epidemi (WHO, 2018).

Menurut Asamoah dkk. (2018), meningitis bakteri ditandai oleh sakit kepala hebat dan demam, muntah, muntah, kurang senang dengan cahaya cerah dan leher kaku yang mengakibatkan kejang, delirium dan kematian. Penyakit ini menyebar melalui kontak yang dekat dan berkepanjangan dengan pembawa atau terinfeksi melalui udara dari sekresi pernapasan atau berbagi barang pribadi yang terkontaminasi dengan sekresi ini. Faktor risiko untuk penyakit invasif dan wabah

tidak sepenuhnya dipahami. Kombinasi kondisi lingkungan, inang dan organisme bisa menyebabkan terjadinya epidemi termasuk kerentanan imunologis populasi, kondisi iklim khusus (musim kemarau, badai debu), status sosial ekonomi rendah dan penularan strain virulen. Infeksi saluran pernapasan akut juga dapat berkontribusi pada perkembangan epidemi penyakit meningitis khususnya meningitis *meningokokus* (WHO,1998).

Jika tidak diobati dini, maka dapat menyebabkan pembengkakan cairan di sekitar otak dan tulang belakang serta cacat parah dan permanen bahkan kematian. Bahkan dengan diagnosis dini dan perawatan yang memadai, 5% hingga 10% pasien meninggal biasanya dalam 24 hingga 48 jam setelah timbulnya gejala (Martinez, dkk., 2013). Infeksi dari meningitis bakteri dapat menyebabkan cacat permanen seperti kerusakan otak, gangguan pendengaran dan ketidakmampuan belajar serta menjadi lebih buruk ketika gejala tidak terdeteksi cukup awal (Asamoah, dkk., 2018). Penyakit ini hanya ditemukan pada manusia dan ditularkan dari satu orang ke orang lain (Agier, dkk.,2017).

Karakteristik utama *Neisseria Meningitidis* adalah pembawa dapat menampung bakteri tersebut di hidung dan tenggorokan tanpa gejala apapun serta berperan penting dalam penyebaran penyakit *meningokokus* karena sebagian besar kasus yang terinfeksi diperoleh melalui paparan kepada mereka. WHO memperkirakan bahwa 11% hingga 25% dari populasi membawa bakteri di tenggorokan mereka pada waktu tertentu. Setelah inang dijangkau oleh bakteri, kemudian berikatan dengan sel-sel di belakang tenggorokan dan saluran hidung. Populasi terinfeksi ketika bakteri mulai membanjiri pertahanan tubuh yang memungkinkan infeksi menyebar melalui aliran darah ke *meninges*. Gejala dapat muncul 2-10 hari setelah terpapar tetapi biasanya dalam 5 hari (Martinez, dkk., 2013). Bahkan pembawa dapat menampung bakteri tersebut selama berminggu-minggu bahkan berbulan-bulan (Asamoah, dkk., 2018).

Beban terbesar penyakit *meningokokus* terjadi di daerah sub-Sahara Afrika yang dikenal sebagai sabuk meningitis yang membentang dari Senegal di barat ke

Ethiopia di timur (26 negara). Selama musim kemarau antara Desember hingga Juni angin debu, malam yang dingin dan infeksi saluran pernapasan bagian atas bergabung sehingga merusak mukosa nasofaring sehingga meningkatkan risiko penyakit *meningokokus*. Pada saat yang sama transmisi *Neisseria Meningitidis* difasilitasi oleh perumahan yang penuh sesak. Kombinasi faktor ini menjelaskan epidemi besar yang terjadi selama musim kemarau di sabuk meningitis (WHO, 2018).

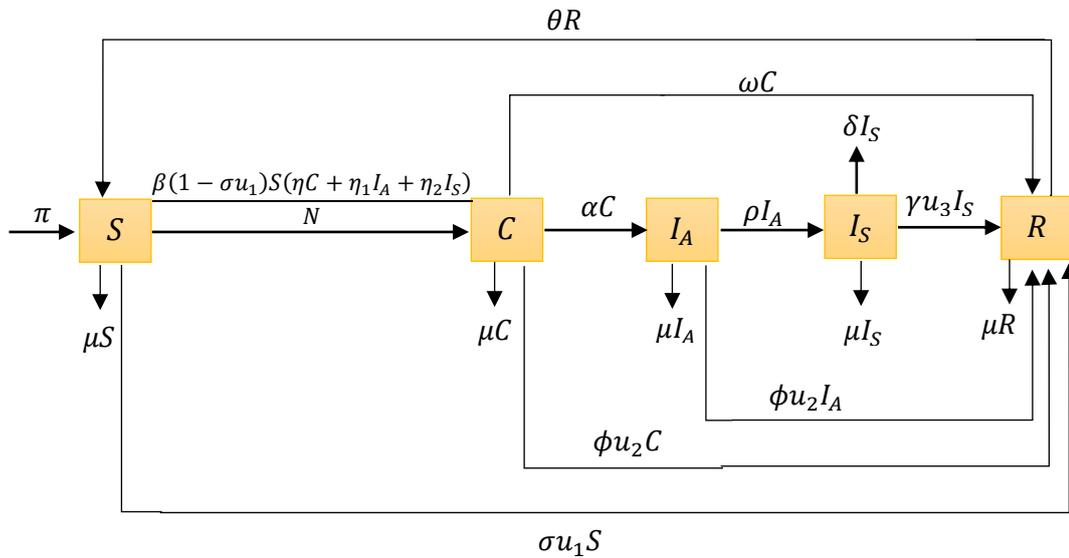
II.2 Pencegahan Penyakit Meningitis

Penyakit meningitis dapat dicegah melalui pemberian pengobatan berupa vaksin serta mencegah kontak dengan orang yang terinfeksi. Pada tahun 2015 terdapat 8,7 juta kasus penyakit meningitis *meningokokus* yang dicatat secara global. Kasus-kasus ini menghasilkan 379.000 kematian yang secara signifikan lebih rendah dari korban 464.000 kematian yang tercatat pada tahun 1990. Namun, pengurangan korban jiwa akibat wabah meningitis tahun 2015 dapat dikaitkan dengan keberhasilan kampanye vaksin. Penting untuk diketahui bahwa sekitar 10% hingga 20% dari populasi tertentu adalah pembawa bakteri meningitis sementara proporsi ini dapat meningkat hingga 25% dari populasi dalam situasi epidemi. Oleh karena itu, kemungkinan wabah meningitis sangat tinggi terutama di daerah sub-Sahara Afrika yang disebut sabuk meningitis, jika langkah-langkah kontrol rutin tidak dilakukan untuk mengatasi epidemi (Yusuf & Olayinka, 2019).

Pada tahun 2018, telah diadakan pertemuan di markas besar *World Health Organization* (WHO) dengan tema “*Defeating meningitis by 2030*” di Jenewa. Dalam pertemuan tersebut Dr. Martin Friede menekankan pentingnya untuk mengalahkan meningitis pada tahun 2030 dan vaksin telah menjadi landasan untuk memastikan kehidupan yang lebih sehat. Vaksin tersedia terhadap tiga penyebab utama bakteri meningitis yaitu *Streptococcus pneumoniae*, *Neisseria meningitidis* dan *Haemophilus influenzae* tipe b.

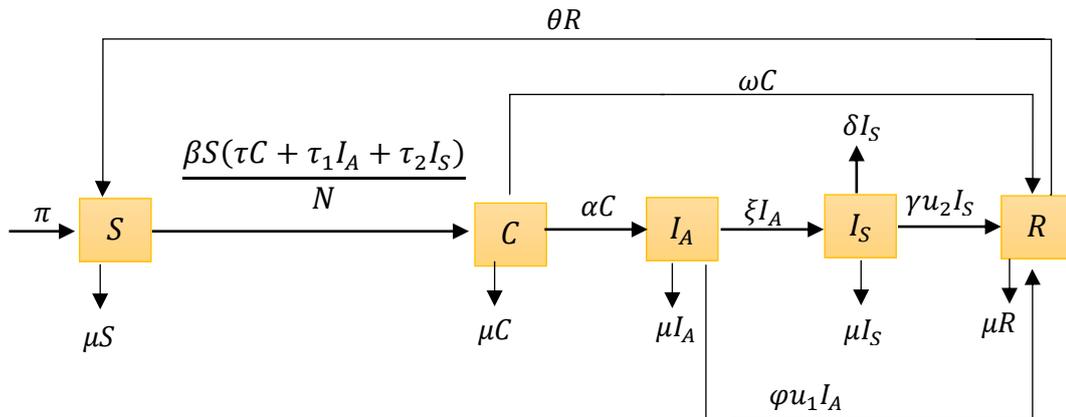
II.3 Model Matematika Penyebaran Penyakit Meningitis

Tinjau diagram kompartemen penyebaran penyakit meningitis yang diberikan pada Gambar 2.1. Model ini berawal dari penelitian yang dikemukakan oleh Sulma pada tahun 2020 yang membagi populasi menjadi lima kompartemen yaitu *susceptibles* (S), *carriers* (C), *infected without symptoms* (I_A), *infected with symptoms* (I_S), dan *recovered* (R). Selanjutnya diselesaikan dengan teori kontrol optimal dengan vaksinasi terhadap populasi *susceptibles* (S), kampanye terhadap populasi *carriers* (C) dan *infected without symptoms* (I_A), serta pengobatan terhadap *infected with symptoms* (I_S). Berikut merupakan model matematika yang dikemukakan oleh Sulma pada tahun 2020 :



Gambar 2. 1 Diagram Kompartemen Penyebaran Penyakit Meningitis

Dalam penelitian ini, populasi dibagi menjadi lima kompartemen seperti yang dikemukakan oleh Sulma pada tahun 2020 dan akan diselesaikan dengan desain kontrol seperti yang dikemukakan oleh Ainun pada tahun 2018. Dengan tindakan kontrol yaitu kampanye meningitis yang bertujuan untuk meningkatkan kesadaran masyarakat mengenai pola hidup sehat serta mendorong populasi untuk melakukan tes rutin terhadap penyakit bakteri meningitis. Tindakan kontrol kampanye meningitis terhadap *carriers* (C), dan *infected without symptoms* (I_A) serta pengobatan terhadap *infected with symptoms* (I_S).



Gambar 2. 2 Diagram Kompartemen Penyebaran Penyakit Meningitis.

Perubahan jumlah pada setiap kompartemen dibangun berdasarkan asumsi-asumsi berikut:

1. Setiap individu yang lahir dan migrasi diasumsikan sehat dan rentan terhadap infeksi masuk ke dalam kompartemen *susceptibles* (S) dengan laju π .
2. Populasi rentan yang berada dalam kompartemen *susceptibles* (S) mendapatkan infeksi *Neisseria Meningitidis* melalui kontak dengan orang yang membawa virus atau orang yang terinfeksi. Diasumsikan bahwa populasi rentan mendapatkan kekebalan sementara dan berpindah ke kompartemen *Carrier* (C) dengan $\frac{\beta(\tau C + \tau_1 I_A + \tau_2 I_S)}{N}$ yang disebut sebagai laju kejadian standar infeksi baru. Dengan β adalah laju interaksi antara populasi rentan dengan pembawa atau terinfeksi.
3. Diasumsikan *carriers* (C) atau pembawa adalah populasi sehat yang membawa bakteri *meningokokus* di hidung dan tenggorokan selama waktu tertentu (berminggu-minggu atau bahkan berbulan-bulan) tanpa gejala apapun serta dapat menularkan kepada orang lain. Penelitian menunjukkan bahwa pembawa dapat pulih secara alami dari infeksi tanpa pengobatan sehingga berpindah ke kompartemen *recovered* (R) dengan laju pemulihan alami ω .
4. Ketika bakteri telah membanjiri pertahanan tubuh maka infeksi dapat menyebar melalui aliran darah ke *meninges* sehingga populasi pembawa berpindah ke kompartemen *infected without symptoms* (I_A) dengan laju α .

5. *Infected without symptoms* (I_A) atau populasi terinfeksi tanpa gejala yaitu ketika bakteri menyebar ke *meninges*. Gejala dapat muncul dalam waktu 2-10 hari setelah terpapar (biasanya dalam 5 hari) kemudian populasi tersebut berpindah ke kompartemen *infected with symptoms* (I_S) dengan laju ξ . Diasumsikan bahwa kampanye diberikan terhadap populasi *infected without symptoms* (I_A) bertujuan untuk mendorong populasi melakukan tes rutin terhadap bakteri ini dan diasumsikan bahwa sebagian dapat diobati sehingga risiko dapat dikurangi sebelum gejala infeksi muncul yang menghasilkan $\varphi u_1 I_A$ seperti terlihat pada Gambar 2.2.
6. *Infected with symptoms* (I_S) atau populasi terinfeksi dengan gejala, diasumsikan tidak memiliki pemulihan alami kecuali diberikan perawatan tepat waktu. Pemberian pengobatan terhadap populasi yang sakit dapat menyebabkan pemulihan kemudian berpindah ke kompartemen *recovered* (R) dengan laju γu_3 dan diasumsikan meninggal karena penyakit dengan laju δ .
7. Dari perspektif epidemiologis populasi dalam kompartemen *recovered* (R) tidak mendapatkan kekebalan permanen, dengan kata lain kekebalan tubuh manusia menurun seiring dengan waktu tertentu dan kembali ke kompartemen yang rentan dengan laju θ .
8. Karena kematian alami tidak bisa dihindari, μ diasumsikan sebagai laju kematian alami populasi di semua kompartemen.
9. Pada penelitian ini ditambahkan kontrol $u_1(t)$ pada proporsi populasi *infected without symptoms* (I_A) berupa kampanye, dengan efektivitas kampanye φ .
10. Kontrol $u_2(t)$ adalah proporsi populasi *infected with symptoms* (I_S) yang diberikan pengobatan dengan efektivitas pengobatan dalam meminimalkan penyakit dilambangkan dengan γ .

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh model matematika penyebaran penyakit meningitis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi + \theta R - \frac{\beta S(\tau C + \tau_1 I_A + \tau_2 I_S)}{N} - \mu S, \\ \frac{dC}{dt} &= \frac{\beta S(\tau C + \tau_1 I_A + \tau_2 I_S)}{N} - (\mu + \omega + \alpha)C, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{dI_A}{dt} = \alpha C - (\mu + \xi + \varphi u_1)I_A,$$

$$\frac{dI_S}{dt} = \xi I_A - (\mu + \gamma u_2 + \delta)I_S,$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega C + \varphi u_1 I_A + \gamma u_2 I_S - (\mu + \theta)R,$$

dengan total populasi $N = S + C + I_A + I_S + R$. Diasumsikan bahwa kondisi awal memenuhi:

$$S(0) > 0, C(0) \geq 0, I_A(0) \geq 0, I_S(0) \geq 0, R(0) \geq 0$$

dengan $\frac{dS}{dt}, \frac{dC}{dt}, \frac{dI_A}{dt}, \frac{dI_S}{dt}$ dan $\frac{dR}{dt}$ berturut-turut menyatakan laju perubahan jumlah populasi rentan, pembawa, terinfeksi tanpa gejala, terinfeksi dengan gejala, dan populasi pulih sementara terhadap waktu. Keterangan mengenai definisi dari semua parameter dan variabel yang terdapat pada Persamaan (2.1) diberikan pada Tabel berikut:

Tabel 2. 1 Deskripsi parameter/variabel model (2.1).

| Parameter /Variabel | Deskripsi | Satuan |
|----------------------------|---|---------------|
| $S(t)$ | Jumlah populasi yang rentan penyakit meningitis pada waktu t | Orang |
| $C(t)$ | Jumlah populasi pembawa bakteri meningitis pada waktu t | Orang |
| $I_A(t)$ | Jumlah populasi terinfeksi tanpa gejala pada waktu t | Orang |
| $I_S(t)$ | Jumlah populasi terinfeksi dengan gejala pada waktu t | Orang |
| $R(t)$ | Jumlah populasi pulih sementara pada waktu t | Orang |
| π | Laju pertambahan populasi rentan baik melalui proses kelahiran maupun migrasi | Orang/tahun |
| β | Laju interaksi | 1/tahun |
| τ | Laju infeksi populasi C | 1/tahun |

| | | |
|----------|--|---------|
| τ_1 | Laju infeksi populasi I_A | 1/tahun |
| τ_2 | Laju infeksi populasi I_S | 1/tahun |
| γ | Efektivitas pengobatan, $0 < \gamma < 1$ | - |
| ϕ | Efektivitas kampanye, $0 < \phi < 1$ | - |
| u_1 | Proporsi populasi <i>infected without symptoms</i> (I_A) yang diberikan kampanye meningitis, $0 \leq u_1 \leq 1$. | - |
| u_2 | Proporsi populasi <i>infected with symptoms</i> (I_S) yang diberikan pengobatan, $0 \leq u_2 \leq 1$ | - |
| α | Laju perpindahan populasi dari kompartemen <i>carriers</i> (C) ke <i>infected without symptoms</i> (I_A) | 1/tahun |
| ω | Laju pemulihan alami populasi <i>carriers</i> (C) | 1/tahun |
| ξ | Laju perpindahan populasi dari <i>infected without symptoms</i> (I_A) ke <i>infected with symptoms</i> (I_S) | 1/tahun |
| δ | Laju kematian populasi <i>infected with symptoms</i> (I_S) karena penyakit | 1/tahun |
| μ | Laju kematian alami populasi di semua kompartemen | 1/tahun |
| θ | Laju perpindahan dari populasi <i>recovered</i> (R) ke populasi <i>susceptibles</i> (S) | 1/tahun |

II.4 Metode Linearisasi *Input Output*

Pandang sistem taklinear sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.2)$$

$$y = h(x), \quad (2.3)$$

dengan $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ adalah vektor keadaan, $u(t) \in \mathfrak{R}$ adalah kontrol *input* dan $y(t) \in \mathfrak{R}$ adalah *output*,

$$f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n, g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n,$$

$$h: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, h(0) = 0$$

Turunan fungsi $y = h(\mathbf{x})$ terhadap t adalah:

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x} [f(x) + g(x)]u = L_f h(x) + L_g h(x). \quad (2.4)$$

Bentuk $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$ disebut **turunan Lie** dari $h(x)$ sepanjang $f(x)$. Berikut adalah notasi sehubungan dengan turunan Lie:

- $L_g L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x),$
- $L_f^2 h(x) = L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x),$
- $L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x),$
- $L_f^0 h(x) = h(x).$

Jika $L_g h(x) = 0$ maka $\dot{y} = L_f h(x)$ tidak bergantung pada u . Jika dilanjutkan menghitung turunan kedua dari y , yang dinotasikan dengan $y^{(2)}$, diperoleh:

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u. \quad (2.5)$$

Jika $L_g L_f h(x) = 0$ maka $y^{(2)} = L_f^2 h(x)$ tidak bergantung terhadap u . Jika proses tersebut diulang dan jika $h(\mathbf{x})$ memenuhi:

$$L_g L_f^{i-1} h(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (2.6)$$

maka u tidak muncul pada Persamaan $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$ tetapi muncul pada Persamaan $y^{(\rho)}$, dengan bentuk:

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x})u. \quad (2.7)$$

Dalam hal ini bilangan bulat ρ disebut **derajat relatif** sistem. Berikut diberikan definisi derajat relatif dari sistem pada Persamaan (2.2) dan (2.3).

Definisi 1 (Khalil, 2002) *Sistem taklinear (2.2) dan (2.3) dikatakan mempunyai derajat relatif ρ , $1 \leq \rho \leq n$, dalam himpunan $D_0 \subset D$ jika:*

$$L_g L_f^{i-1} h(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1, \quad L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D_0. \quad (2.8)$$

Contoh 1

Misalkan diberikan sistem Persamaan taklinear:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 + u,\end{aligned}\tag{2.9}$$

dengan output $y = x_1$. Akan dicari derajat relatif sistem dengan cara sebagai berikut.

Dari Persamaan (2.9) diperoleh:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tinjau Persamaan (2.8) untuk $i=1$ diperoleh:

$$L_g L_f^{i-1} h(\mathbf{x}) = L_g h(\mathbf{x}),$$

$$\text{dengan } L_g h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Karena diperoleh $L_g h(\mathbf{x}) = 0$, ini berarti derajat relatif belum ditemukan di $i = 1$.

Akan dilanjutkan mencari derajat relatif dengan $i = 2$ yaitu:

$$L_g L_f^{i-1} h(\mathbf{x}) = L_g L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_f h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

$$\text{dengan } L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_2.$$

Jadi diperoleh:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \cdot \mathbf{g}(x) = \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Karena $L_g L_f h(x) \neq 0$, maka derajat relatif untuk output $y = x_1$ adalah $\rho = 2$.

Teorema 1 (Isidori, 1998) *Misalkan sistem (2.2) dan (2.3) mempunyai derajat relatif ρ pada x_0 , $\rho \leq n$, maka:*

$$\begin{aligned}
\phi_1(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}) \\
\phi_2(\mathbf{x}) &= L_f h(\mathbf{x}) \\
&\vdots \\
\phi_\rho(\mathbf{x}) &= L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Jika $\rho < n$, dimungkinkan mencari fungsi $\phi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ sedemikian sehingga:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Mempunyai matriks Jacobian yang nonsingular pada x_0 dan karena itu dikualifikasikan sebagai transformasi koordinat lokal disekitar x_0 . Selanjutnya dapat dipilih fungsi $\phi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})$ sedemikian sehingga:

$$L_g \phi_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0, \forall \rho+1 \leq i \leq n \text{ dan } \forall x \text{ disekitar } x_0.$$

Misalkan derajat relatif sistem (2.2) dan (2.3) adalah ρ , dengan $\rho < n$, dimana n adalah dimensi sistem. Berdasarkan Teorema 1, transformasi koordinat dari sistem awal menjadi koordinat sistem baru dinyatakan dalam bentuk:

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, \quad k = 1, \dots, \rho - 1, \tag{2.10}$$

$$\dot{z}_\rho = a(z, \eta) + b(z, \eta)u, \tag{2.11}$$

$$\dot{\eta} = g(z, \eta), \tag{2.12}$$

$$y = z_1,$$

dengan,

$$z_1 = h(\mathbf{x}), \quad z_2 = L_f h(\mathbf{x}), \quad z_\rho = L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x}), \quad a(z, \eta) = L_f^\rho h(\mathbf{x}), \quad b(z, \eta) = L_g^{\rho-1} h(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_\rho).$$

Fungsi η pada Persamaan (2.12) adalah **dinamik internal** yaitu:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-\rho} \end{pmatrix},$$

dengan $\frac{\partial \eta_i}{\partial x} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, n - \rho$.

Sistem pada Persamaan (2.10), (2.11), dan (2.12) disebut bentuk normal dari sistem (2.2) dan (2.3) (Khalil, 2002).

Pandang bentuk normal sistem (2.2) dan (2.3). Jika $y(t) = 0, \forall t \geq 0$, maka:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \dots = \dot{z}_\rho(t) = 0,$$

sehingga $z(t) = 0, \forall t \geq 0$. Akibatnya sistem (2.12) menjadi:

$$\dot{\eta} = g(0, \eta). \quad (2.13)$$

Selanjutnya Persamaan (2.13) dikatakan **dinamik nol** dari sistem (2.2) dan (2.3).

Dengan mengasumsikan dinamik nol dari sistem (2.2) dan (2.3) adalah stabil, maka dapat dirancang kontrol umpan balik untuk kestabilan sistem tak linear pada Persamaan (2.2) dan (2.3). Dengan memperhatikan Persamaan (2.10) dan (2.11) dapat ditulis:

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, k = 1, \dots, \rho - 1, \quad (2.14)$$

$$\dot{z}_\rho = v, \quad (2.15)$$

dimana v adalah *input* yang baru.

Dari Persamaan (2.14) dan (2.15), diperoleh kontrol *input* u yakni:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(\mathbf{x})} \cdot [-L_f^\rho h(\mathbf{x}) + v]. \quad (2.16)$$

Dengan memilih $v = -c_0 z_1 - c_1 z_2 - \dots - c_{\rho-1} z_\rho$ maka Persamaan (2.14) dan (2.15) dapat ditulis sebagai $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$, dimana:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \vdots & -c_{\rho-1} \end{bmatrix}.$$

Dengan memperhatikan akar-akar polinomial karakteristik dari matriks A, maka sistem (2.2) dan (2.3) dapat dianalisis kestabilannya pada titik kesetimbangan (Isidori, 1998).

II.5 Titik Kesetimbangan Sistem

Titik kesetimbangan merupakan suatu keadaan dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Suatu titik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$ dikatakan titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ untuk $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$. Jika $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, maka (Wiggins, 1990):

$$f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

II.6 Linearisasi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan sistem Persamaan diferensial taklinear dapat dilakukan melalui metode pelinearan. Untuk mencari hasil pelinearan dari sistem Persamaan diferensial tak linear digunakan matriks Jacobi.

Linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan dilakukan untuk menganalisis kestabilan sistem Persamaan diferensial non linear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan.

Definisi 2 (Hale & Kocak, 1991) *Jika $\bar{\mathbf{x}}$ merupakan titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, maka Persamaan diferensial linear*

$$\dot{\mathbf{x}} = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}. \quad (2.18)$$

Disebut Persamaan linearisasi dari vector field \mathbf{f} pada titik kesetimbangan $\bar{\mathbf{x}}$ dimana $\mathbf{f} = f_1, f_2, \dots, f_n$ dan

$$J(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$J(\bar{\mathbf{x}})$ disebut sebagai matriks Jacobi dari \mathbf{f} di titik $\bar{\mathbf{x}}$.

Kestabilan titik kesetimbangan \bar{x} dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen yaitu λ yang merupakan solusi dari Persamaan karakteristik

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (2.19)$$

dengan I adalah suatu matriks identitas. Dalam Tabel 2.2 diberikan beberapa jenis sifat kestabilan yang dikategorikan berdasarkan jenis nilai eigen yang diperoleh dari Persamaan karakteristik (2.19).

Tabel 2. 2 Kestabilan dari sistem linear $\dot{x} = f(x)$ dengan $\det(J - \lambda I) = 0$

| No. | Nilai Eigen | Sifat Kestabilan |
|-----|-----------------------------------|----------------------------|
| 1. | $\lambda_i > \lambda_j > 0$ | Tidak Stabil |
| 2. | $\lambda_i < \lambda_j < 0$ | Stabil Asimtotik |
| 3. | $\lambda_i < 0 < \lambda_j$ | Tidak Stabil |
| 4. | $\lambda_i = \lambda_j > 0$ | Tidak Stabil |
| 5. | $\lambda_i = \lambda_j < 0$ | Stabil Asimtotik |
| 6. | $\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$ | $r > 0$, Tidak Stabil |
| 7. | $\lambda_i, \lambda_j = r \pm ic$ | $r < 0$, Stabil Asimtotik |
| 8. | $\lambda_i = ic, \lambda_j = -ic$ | Stabil |

Sumber : Boyce dan DiPrima (2012).

II.7 Metode Forward Runge Kutta

Metode *Forward Runge Kutta* adalah salah satu metode yang digunakan untuk mendapatkan solusi numerik dari masalah nilai awal. Tinjau Persamaan (2.1) yang memuat masalah nilai awal dengan $x(0) = x_0$. Misalkan diberikan *step size* h yang positif, maka solusi dari masalah nilai awal tersebut dapat diaproksimasi secara numerik melalui Persamaan berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \quad (2.20)$$

dengan:

$$\begin{aligned}k_{n1} &= f(t_n, x_n), \\k_{n2} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{n1}\right), \\k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_{n2}\right), \\k_{n4} &= f(t_n + h, x_n + hk_{n3}).\end{aligned}\tag{2.21}$$