MASALAH DISTRIBUSI BOLA KE DALAM WADAH SEBAGAI FUNGSI ATAU KUMPULAN FUNGSI

SKRIPSI

OLEH :

FAUZIAH BAHARUDDIN

H 111 09 003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2013

MASALAH DISTRIBUSI BOLA KE DALAM WADAH SEBAGAI FUNGSI ATAU KUMPULAN FUNGSI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Hasanuddin

Makassar

OLEH :

FAUZIAH BAHARUDDIN

H 111 09 003

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2013

LEMBAR KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul :

MASALAH DISTRIBUSI BOLA KE DALAM WADAH SEBAGAI FUNGSI ATAU KUMPULAN FUNGSI

adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 31 Mei 2013

FAUZIAH BAHARUDDIN
H 111 09 003

MASALAH DISTRIBUSI BOLA KE DALAM WADAH SEBAGAI FUNGSI ATAU KUMPULAN FUNGSI

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Loeky Haryanto,MS.MSc.MAT.	Dr. Nurdin, M.Si.
NIP. 19550915 198303 1 003	NIP. 19700807 200003 1 002

Pada Tanggal : 31 Mei 2013

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

Pada hari ini, Rabu tanggal 31 Mei 2013, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi berjudul :

MASALAH DISTRIBUSI BOLA KE DALAM WADAH SEBAGAI FUNGSI ATAU KUMPULAN FUNGSI

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 31 Mei 2013

PANITIA UJIAN SKRIPSI

		Tanda Tangan
1. Ketua	**: Prof. Dr. Moh. Ivan Azis**	(..........................)
2. Sekretaris	**: Dr. Nurtiti Sunusi, M.Si.**	(..........................)
3. Anggota	**: Drs. Khaeruddin M.Sc.**	(..........................)
4. Anggota	**: Dr. Loeky Haryanto,MS.MSc.MAT.**	(..........................)
5. **Anggota**	**: Dr. Nurdin, M.Si.**	(..........................)

v

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT dan junjungan besar Nabi Muhammad SAW yang telah melimpahkan rahmat dan karuniaNya, sehingga penulis masih diberikan kekuatan dan kemampuan untuk menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul *“ Masalah Distribusi Bola ke dalam Wadah sebagai Fungsi atau Kumpulan Fungsi “*. Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini memerlukan proses dan pengorbanan yang tidaklah sedikit serta adanya bantuan dan doa dari berbagai pihak, Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Ayahanda dan Ibunda tercinta **Baharuddin HB, S.Sos** dan **A. Katenni**, yang dengan penuh kesabaran dan kasih sayang telah membesarkan dan mendidik penulis serta selalu memberikan dukungan dan doa kepada penulis dan menjadi motivasi terbesar bagi penulis untuk segera menyelesaikan studi. Ucapan terima kasih juga kepada adik tercinta **Muchtar,** yang selalu memberikan dukungan, doa dan perhatian kepada Penulis.

2. Bapak **Drs. Khaeruddin, M.Sc**. selaku dosen penasehat akademik yang telah memberikan arahan, bimbingan dan motivasi kepada penulis selama penulis jadi mahasiswa.
3. Bapak **Dr**. **Loeky Haryanto, MS.MSc.MAT** selaku dosen pembimbing utama dan Bapak **Dr. Nurdin, M.Si** selaku pembimbing pertama yang telah memberikan, arahan, bimbingan dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan penulisan tugas akhir ini.
4. Bapak **Prof. Moh. Ivan Azis, M.Sc. ,** Ibu **Nurtiti Sunusi, M.Si,** dan bapak **Drs. Khaeruddin, M.Sc.** , selaku dosen penguji yang selama seminar telah banyak memberikan kritikan, saran dan masukan yang sangat berharga dalam perbaikan tugas akhir ini.
5. Ibu **Dr. Hasmawati, M.Si** selaku ketua jurusan Matematika dan seluruh Dosen Jurusan Matematika FMIPA Unhas atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis selama masa perkuliahan.
6. Pak **Nasir** dan Pak **Sutamin** selaku pegawai Jurusan Matematika yang telah membantu Penulis dalam urusan administrasi selama masa perkuliahan hingga saat ini.
7. Pak **Rahmat,** Pak **Bakhtiar,** Pak **Anwar,** Pak **Iswan** dan Pak **Adi** selaku pegawai Fakultas (Science Bulding) yang telah membantu Penulis dalam urusan administrasi fakultas pada masa perkuliahan hingga saat ini.

8. Seluruh sahabat-sahabat terbaik penulis **Ekstrim 09 (Rina, Meri, Fifi, Icha, Ali, Edi, Jamal, Ical, Noe, Harti, Afri, Erika, Niedha, Lesdy, Inggrid, Devita, Bunda, Nur, Lisa, Fair, Taufik, Enci, Delia, Iche, Arni, Oghi, Isna, Evi, Teten, Idha, Vinni, Tri, Fahrun, Naser, Endy, Nonot, Hera, Micy, Cimank, Ayu, Hasruni, A.Yuni, Vj, Intan, Nurmi, Jejen, Jumi, Ifa, Mimi, dan Fitrah)** Terima kasih atas kebersamaannya selama ini dan telah mengisi hari-hari Penulis dengan penuh canda tawa dan kebahagiaan. Semoga diberikan kemudahan dalam menyelesaikan tugas akhir.
9. Kanda-kanda, teman-teman, dan adik-adik **Warga Himatika FMIPA Unhas dan Pengurus BEM FMIPA Unhas Periode 2012/2013.** Terima kasih atas perhatian, dorongan, pengalaman, cerita, dan dukungannya selama ini.
10. Kanda-kanda, teman-teman, dan adik-adik **Warga KM FMIPA Unhas .**Terima kasih atas perhatian, dorongan, pengalaman, cerita, dan dukungannya selama ini.
11. Teman-teman seperjuangan selama KKN Gelombang 82 Kelurahan Pajalele Kec. Tellu Limpoe Kab. Sidrap (**Ridha, kak Dilla, Echa, kak Basran, kak Alif, kak Efde, kak Dulla, dan kak Ryan**) yang telah memberikan dukungan dan banyak membantu Penulis selama di lokasi KKN. Senang bisa bertemu dan mengenal kalian.
12. Teman-teman tentor **Simply FAST Makassar** terima kasih atas bantuan dan dukungannya selama ini.

13. Teman seperjuangan **Rezky K.F** (Icky) yang mengajarkan penulis bagaimana turun langsung ke lapangan dalam melakukan penelitiannya.
14. Buat sahabat – sahabat **REFLECT’S 05** yang telah setia berbagai cerita dengan penulis.
15. Teman-teman seperjuangan **MIPA 2009 (Jur. Matematika, Fisika, Kimia , dan Biologi)**, khususnya Matematika dan Statistika yang memberi motivasi sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan, semoga secepatnya menyusul.

Dan kepada semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih atas partisipasinya, semoga ALLAH SWT membalas kebaikan dan memberikan balasan yang setimpal. Aamiin.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga sangat diharapkan adanya saran dan kritik yang bersifat membangun sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Akhir kata, semoga tugas akhir ini ada manfaatnya bagi para mahasiswa, khususnya bagi Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika dan bagi Perguruan Tinggi.

Wassalam

Makassar, 31 Mei 2013

ABSTRAK

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mendapatkan perumusan banyak cara berbeda dalam masalah distribusi bola ke dalam wadah, sesuai ketentuan atau syarat yang diberikan pada cara distribusi atau pada fungsi-fungsi yang terkait dengan distribusi tersebut. Tujuan lainnya adalah memberi intreprestasi beberapa masalah distribusi bola ke wadah menjadi masalah yang berbeda (tetapi ekuivalen) ke dalam bahasa matematis.

Kata Kunci : Fungsi, Permutasi, Koefisien Binomial, Partisi Bilangan.

ABSTRACT

The goal of this *skripsi* is primarily to obtain the number of different ways in distributing n balls into k urns subject to some conditions imposed on the balls and the urns as well as on the associated functions related to the distributions. Another goal is to find distinct interpretations, but equivalent for each distribution into mathematical language.

Key Words : Functions, Permutations, Binomial Coefficient, Numbers Partition.

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL……………………………………………………………i

LEMBAR PENGESAHAN………………………………………………….…ii

KATA PENGANTAR……………………………………………………………vi

ABSTRAK…………………………………………………………………..x

ABSTRACT………………………………………………………………...xi

DAFTAR ISI…………………………… xii

PENDAHULUAN…………………. 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 4

1.3 Batasan Masalah 6

1.4 Tujuan Penelitian 6

1.5 Manfaat Penelitian 7

TINJAUAN PUSTAKA……………… 8

2.1 Definisi Fungsi 8

2.2 Jenis – jenis fungsi 9

2.3 Permutasi...13

2.4 Prinsip Inklusi dan Eksklusi..15

2.5 Koefisien Binomial 20

2.6 Bilangan Stirling 23

2.7 Partisi Bilangan 25

HASIL DAN PEMBAHASAN 28

3.1 Distribusi Bola yang Berbeda dan Wadah yang Berbeda Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait 28

3.2 Distribusi Bola yang Berbeda dan Wadah yang Berbeda Sebagai Fungsi Injektif...31

3.3 Distribusi Bola yang Berbeda dan Wadah yang Berbeda Sebagai Fungsi Surjektif 32
3.4 Distribusi Bola yang Tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang Bisa Dibedakan Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait....................35
3.5 Distribusi n Bola yang Tidak Bisa Dibedakan ke dalam k Wadah yang Bisa Dibedakan Dengan Syarat Paling Banyak Satu Wadah Berisi Satu Bola Sebagai Fungsi Injektif..37
3.6 Distribusi Bola yang Tidak Bisa Dibedakan ke dalam k Wadah yang Bisa Dibedakan Dengan Syarat Paling Sedikit Satu Wadah Berisi Satu Bola Sebagai Fungsi Surjektif 40
3.7 Distribusi Bola yang Bisa Dibedakan dan Wadah yang Tidak Bisa Dibedakan Sebagai Fungsi Surjektif atau Paling Sedikit 1 bola Dalam Wadah 43
3.8 Distribusi Bola yang Bisa Dibedakan dan Wadah yang Tidak Bisa Dibedakan Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait....................45
3.9 Distribusi Bola yang Bisa Dibedakan dan Wadah yang tidak Bisa Dibedakan Sebagai Fungsi Injektif atau paling banyak 1 bola dalam wadah 47
3.10 Distribusi Bola yang Tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang juga Tidak Bisa Dibedakan Sebagai Fungsi Surjektif atau paling sedikit 1 bola dalam wadah 48
3.11 Distribusi Bola yang Tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang Tidak .... Bisa Dibedakan Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait............50
3.12 Distribusi Bola yang tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang Tidak Bisa Dibedakan Sebagai Fungsi Injektif...52

PENUTUP…………………………………………………………………….53
4.1 Kesimpulan 53
4.2 Saran 54

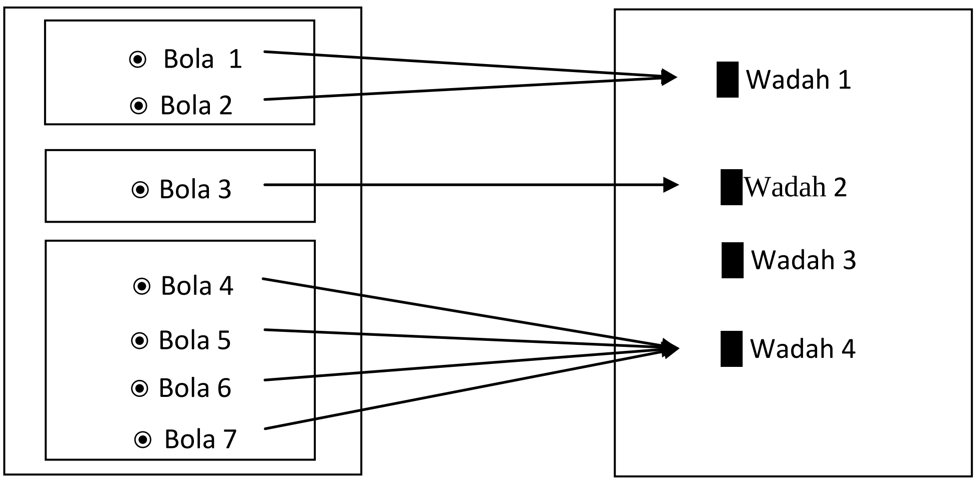
BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari manusia melihat dan mengenali berbagai bentuk objek di sekitarnya. Objek dikenali berdasarkan perbedaan titik-titik pada tempat yang berbeda dan ukuran yang berbeda. Sering ada keinginan untuk mengetahui cara-cara sekumpulan objek dapat diklasifikasikan berdasarkan suatu kriteria sehingga terjadi partisi atas objek-objek tersebut menjadi beberapa kelompok yang berbeda dan saling lepas satu sama lain.

Setiap partisi seperti diatas membentuk sekumpulan atau sebuah fungsi dari himpunan objek-objek ke himpunan lain sebagai akibat klasifikasi berdasarkan suatu kriteria (Lihat Gambar 1).

Gambar 1. Klasifikasi Obyek-Obyek Sebagai Fungsi, Setiap Kelompok Yang Dihasilkan Diberi Label Berbeda



Aturan pengawanan dari fungsi bersama-sama syarat atau kendala yang dikenakan pada objek atau pada label kelompok yang terbentuk menjadi kriteria untuk menentukan cara pengelompokkan.

Lebih jauh, berbagai masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari ternyata ekuivalen dengan masalah menghitung banyaknya fungsi yang terbentuk berdasarkan ukuran dari kelompok yang berlabel sama. Masalah yang sejenis atau tidak sejenis di klasifikasi berdasarkan banyak label (yang digunakan dan tidak digunakan) dan mungkin dengan tambahan beberapa syarat atau kriteria lain (injektif, surjektif, dan sebagainya) yang dikenakan pada fungsi-fungsi tersebut.

Semua masalah ini dikelompokkan ke dalam *masalah pengisian* (*occupancy problem*) yang merupakan bagian dari *masalah enumerasi* di dalam teori kombinatorik dan matematika diskrit. Dalam masalah pengisian, banyak masalah pencacahan dapat dirumuskan sebagai menghitung jumlah distribusi bola ke dalam wadah.(Thomas A. Dowling, 1991).

Matematikawan Paul R. Halmos mengatakan bahwa semua masalah kombinatorik adalah masalah distribusi bola ke dalam wadah. McMahon secara lebih tegas mengelompokkan beberapa masalah kombinatoriks yang bisa dinyatakan dalam model distribusi bola dan wadah. Walaupun saat ini komentar Halmos tidak tepat, tetapi komentar tersebut menggambarkan pentingnya masalah distribusi bola ke dalam wadah. Bola di sini berasosiasi sesuai dengan objek dan wadah berasosiasi dengan tingkat.

Dari Gambar 1, masalah pengisian dapat dinyatakan dalam bahasa fungsi dari himpunan bola-bola ke himpunan wadah-wadah. Misalkan *N* adalah himpunan bola sebanyak *n* dan sedangkan *K* adalah himpunan wadah sebanyak *k*. Dalam hal ini, sebuah distribusi dinyatakan sebagai satu atau sekumpulan fungsi f: $N \rightarrow K$. Himpunan semua fungsi yang terbentuk sangat tergantung pada asumsi-asumsi atau syarat-syarat yang diberikan sebagai berikut:

1. Apakah masing-masing bola bisa dibedakan?
2. Apakah masing-masing wadah bisa dibedakan?
3. Apakah fungsi yang diinginkan bersifat 1-1, pada, atau sembarang?

Sebagai ilustrasi misalkan diberikan asumsi bahwa bola - bola dan wadah-wadah bisa dibedakan satu sama lain. Banyak cara distribusi ini (banyak fungsi yang berbeda) sudah diketahui banyak orang yaitu k^n .(Thomas A. Dowling, 1991)

Beberapa contoh masalah yang terkait cara distribusi dengan kemungkinan sebanyak k^n

- Banyak kata dengan panjang *n* pada alphabet berisi sebanyak *k* huruf dengan pengulangan.
- Banyak fungsi injektif dari himpunan berukuran *n* ke himpunan berukuran *k*.

Namun, jika bola-bola diasumsikan identik, tetapi wadah-wadah bisa dibedakan, maka banyak cara distribusi adalah $C(k + n - 1, n)$.

Dari diskusi ini, penulis mengangkat masalah dengan judul

“ MASALAH DISTRIBUSI BOLA KE DALAM WADAH SEBAGAI FUNGSI ATAU KUMPULAN FUNGSI “

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana menghitung banyak cara berbeda untuk mendistribusikan bola ke dalam wadah, sesuai dengan syarat dan ketentuan yang diberikan?
2. Bagaimana memberi intreprestasi masalah distribusi bola ke dalam wadah ke dalam bahasa matematis?
3. Bagaimana rumusan hubungan antara beberapa konsep matematika yang terkait dengan masalah distribusi bola ke dalam wadah berdasarkan pustaka-pustaka yang ada?

Masalah menghitung banyak cara distribusi bola ke dalam wadah dalam pertanyaan di atas bisa dinyatakan sebagai masalah menghitung banyaknya fungsi atau kumpulan fungsi-fungsi f: $N \rightarrow K$ dengan syarat dan ketentuan yang diberikan, di mana N adalah himpunan sebanyak n bola dan sedangkan K adalah himpunan semua k wadah.

Tanpa ada persyaratan apapun, banyak fungsi yang berbeda adalah k^n. Informasi yang diperlukan untuk menjawabnya berbentuk asumsi atau persyaratan tertentu pada fungsi-fungsi ini.

Berdasarkan asumsi atau persyaratan ini, masalah yang akan dibahas terbagi atas 12 submasalah yang bisa dinyatakan melalui skema berikut:

Kriteria untuk ***n* = banyak bola** ***k* = banyak wadah**	**Tanpa syarat**	**1 – 1**	**Pada (onto)**
***n* berlabel** ***k* berlabel**	Submasalah 1 (k^n fungsi - fungsi)	Submasalah 2	Submasalah 3
***n* tdk berlabel** ***k* berlabel**	Submasalah 4	Submasalah 5	Submasalah 6
***n* berlabel** ***k* tdk berlabel**	Submasalah 7	Submasalah 8	Submasalah 9
***n* tdk berlabel** ***k* tdk berlabel**	Submasalah 10	Submasalah 11	Submasalah 12

Tabel 1 submasalah untuk distribusi bola ke wadah

Ke-12 submasalah tersebut sebenarnya telah dibahas oleh berbagai buku teks, walaupun biasanya tidak lengkap. Dalam penulisan ini, sumber utama penulisan adalah berbagai buku teks (Aigner, 2007), (vanLint, 1993), tulisan yang bersumber dari situs suatu universitas dan catatan elektronik (Wagner, diakses 2012), (Dowling, 1991), (Sprugnoli, 2006). Isi skripsi ini akan menguraikan secara lebih lengkap dan sistematis tentang ke-12 submasalah yang berhubungan dengan distribusi bola ke dalam wadah.

1.3 Batasan Masalah

1. Setiap cara distribusi yang dibahas menghasilkan bentuk fungsi atau kumpulan fungsi-fungsi. Artinya, setiap bola harus distribusikan, tak ada bola yang tertinggal. Ini adalah bahasa lain untuk menyatakan syarat suatu pengawanan adalah sebuah fungsi.
2. Untuk setiap submasalah, diberi batasan khusus. Misalnya untuk submasalah (3, 6, 9, dan 12), banyak bola yang dapat ditempatkan dalam wadah paling sedikit 1.

1.4 Tujuan Penelitian

1. Mendapatkan perumusan banyak cara berbeda dalam masalah distribusi bola ke dalam wadah, sesuai ketentuan atau syarat yang diberikan pada caa distribusi bola ke dalam wadah tersebut.
2. Memberi intreprestasi beberapa masalah distribusi bola ke dalam wadah ke bentuk masalah yang berbeda (tetapi ekuivalen).
3. Merumuskan hubungan antara beberapa konsep matematika yang terkait dengan masalah distribusi bola ke dalam wadah, sesuai dengan hasil studi literatur.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Memberikan batasan-batasan yang tegas antara suatu masalah dengan masalah lain apabila kedua masalah sama-sama bisa dirumuskan dalam bentuk distribusi bola ke dalam wadah (klasifikasi masalah).

2. Masalah distribusi bola ke dalam wadah dapat di intreprestasikan kebeberapa masalah yang ekuivalen.

3. Memberikan alat (*mathematical tools*) pada konsep matematika lain yang terkait dengan konsep distribusi bola ke dalam wadah

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi Fungsi

Fungsi merupakan keadaan khusus dari suatu relasi. Diberikan himpunan N dan K. Suatu fungsi f dengan daerah asal N dan daerah kawan K didefinisikan sebagai himpunan pasangan-pasangan (n,k) dimana $n \in N$ dan $k \in K$ yang memenuhi syarat:

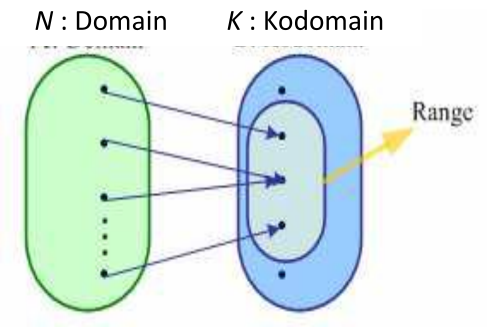
1. Untuk setiap $n \in N$ terdapat $k \in K$ sedemikian sehingga $(n, k) \in f$.
2. Untuk setiap $(n_1, k_1) \in f$ dan $(n_2, k_2) \in f$ berlaku implikasi:

   jika $n_1 = n_2$ maka $k_1 = k_2$.

Dari semua pasangan tersebut, himpunan N disebut daerah asal (domain) dan himpunan K disebut daerah kawan (ko-domain) dari fungsi.

Pemetaan dari N ke K yang diberi simbol f bisa dinyatakan sebagai

$$f: N \longrightarrow K \quad \text{atau} \quad N \xrightarrow{f} K$$

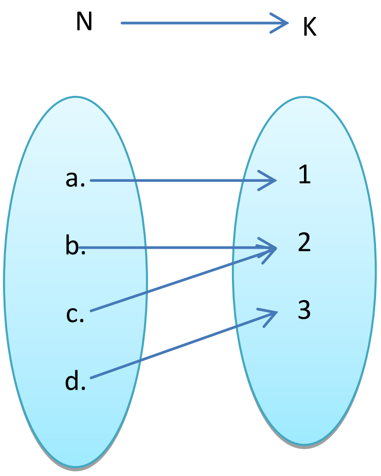


Gambar 2.1

Fungsi f: $N \longrightarrow K$ bisa juga ditafsirkan sebagai aturan pengawanan antara setiap unsur $n \in N$ dengan satu dan hanya satu $k \in K$. Unsur sekawan k dari n biasa ditulis sebagai $k = f(n)$. Karena tidak setiap nilai y memiliki kawan x dan himpunan semua nilai y yang memiliki kawan disebut daerah jangkauan (*range*) dari fungsi f.

Contoh 2.1:

Misalkan N = {a, b, c,d} dan K = {1,2,3}. Sebuah fungsi f: $N \rightarrow K$ bisa digambarkan oleh gambar berikut.



Gambar 2.2

Didalam Gambar 2.2, tersirat

f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 2, dan f(d) = 3

Daerah hasil f adalah {1,2,3} atau ditulis secara formal f [N] = {1,2,3}.

2.2 Jenis – jenis fungsi

Ditinjau dari cara mengawankannya, fungsi dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu fungsi *injektif*, *surjektif*, dan *bijektif*. Jenis fungsi tersebut ada kaitannya dengan sifat pemetaan dari daerah asal ke daerah hasil.

a. Fungsi Injektif

Misalkan f suatu fungsi dari N ke K. Jika setiap unsur – unsur dalam N berkawan secara tunggal ke suatu unsur dalam K artinya tidak ada dua buah elemen dalam N yang mempunyai peta yang sama di K maka f disebut **fungsi injektif.**

Secara formal,

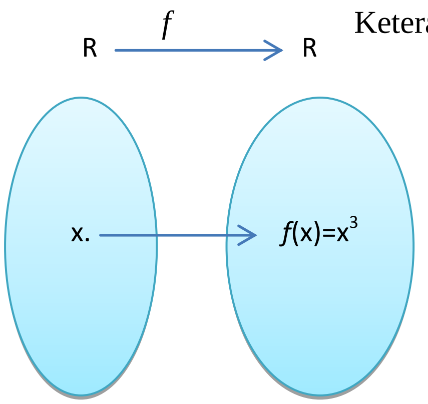
fungsi $f: N \rightarrow K$ disebut **injektif (satu – satu)** jika untuk setiap $a,b \in N$

berlaku jika $f(a) = f(b)$ maka a = b atau jika untuk setiap $a,b \in N$ berlaku

jika $f(a) \neq f(b)$ maka $a \neq b$

Contoh 2.2:

Misalkan fungsi $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^3$ .Maka f adalah fungsi satu – satu karena pangkat tiga dari dua bilangan riil yang berbeda juga berbeda.



Gambar 2.3

Keterangan : f merupakan fungsi injektif

$f(1) = 1$

$f(-1) = -1$

$f(2) = 8$

$f(-2) = -8$.

b. Fungsi Surjektif

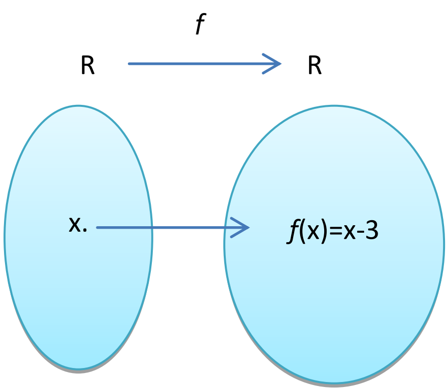
Misalkan f suatu fungsi dari N ke K, jika f(N) = K, artinya jika setiap unsur K muncul sebagai bayangan dari sekurang – kurangnya satu unsur dalam N, maka dikatakan " f suatu **fungsi surjektif** dari N ke K ". Fungsi f ini juga disebut *fungsi pada* (onto function).

Secara formal, fungsi $f: N \longrightarrow K$ disebut fungsi **surjektif (fungsi pada)** jika untuk setiap $k \in K$ terdapat $n \in N$ sehingga $k = f(n)$.

Contoh 2.3:

Misalkan fungsi f: $R \rightarrow R$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x - 3$.

Keterangan : f merupakan fungsi surjektif, jadi himpunan prapeta setiap y ($f^{-1}(y)$) tidak pernah kosong, misalnya



Gambar 2.4

$f^{-1}(0) = \{3\}$

$f^{-1}(1) = \{4\}$

$f^{-1}(2) = \{5\}$

$f^{-1}(3) = \{ 6\}$.

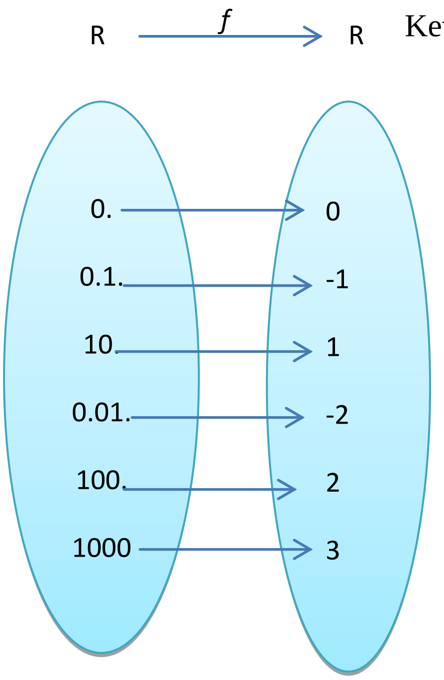
a. Fungsi Bijektif

Fungsi $f : N \rightarrow K$ dikatakan fungsi bijektif jika f bersifat injektif (satu – satu) dan surjektif (pada). Pada fungsi bijektif, setiap anggota K mempuyai tepat satu pra-peta di N.

Contoh 2.4 :

Misalkan fungsi f: $R \xrightarrow{f} R$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = \log x$,

dengan x = {0.01, 0.1, 0, 10, 100, 1000}



Keterangan : f merupakan fungsi bijektif

$f(0) = 0$

$f(0.1) = -1$

$f(10) = 1$

$f(0.01) = -2$

$f(100) = 2$

$f(1000) = 3$

Gambar 2.5

2.3 Permutasi

Dalam matematika, penyusunan obyek yang terdiri dari beberapa unsur dengan memperhatikan urutan disebut dengan **permutasi.**

- Misalkan S adalah himpunan dengan *n* objek

- Misalkan $k \leq n$. Permutasi *k* objek dari himpunan *S* adalah *susunan objek-objek berbeda dalam urutan tertentu* yang terdiri dari *k* objek anggota himpunan *S*

- Notasi Permutasi *k* objek dari *n* objek yang berbeda dilambangkan

$$ {}_{n}P_{k} \ , P(n,k)\ , \text{ atau } P_{k}^{n} $$

2.3.1 Permutasi *n* objek dari *n* objek yang berbeda

Masalah yang dibahas di sini dapat dipandang sebagai masalah menempatkan *n* bola berlabel ke dalam *n* wadah yang juga berlabel dimana setiap wadah hanya bisa diisi tepat 1 bola.

wadah ke- 1 2 ……………… $n - 1$ n

Tahap pertama adalah mengisi wadah ke-1, tahap kedua adalah mengisi wadah ke-2, dan seterusnya sampai tahap ke-*n* .

Tahap	Pengisian wadah ke-	Banyak cara
1	1	n
2	2	$n - 1$
…	…	…
$n - 1$	$n - 1$	2
n	N	1

Sehingga berdasarkan **Prinsip kaidah perkalian,** banyak cara mengisi wadah tersebut adalah

$$n.(n-1).(n-2)....2.1 = n!$$

2.3.2 Permutasi *k* objek dari *n* objek yang berbeda, $k \leq n$

Masalah yang dibahas di sini dapat dipandang sebagai masalah memilih k diantara n bola berlabel kemudian menempatkan ke dalam n wadah yang juga berlabel dimana setiap wadah hanya bisa diisi tepat 1 bola.

Wadah ke- 1 2 ……………… $k - 1$ k

Tahap pertama adalah mengisi wadah ke-1, tahap kedua adalah mengisi wadah ke-2, dan seterusnya sampai tahap ke-k .

Tahap	Pengisian wadah ke-	Banyak cara
1	1	n
2	2	$n - 1$
…	…	…
$k - 1$	$k - 1$	n - (k - 2) = $n - k + 2$
k	K	$n - (k - 1) = n - k + 1$

Sehingga berdasarkan **Prinsip kaidah perkalian,** banyak cara mengisi wadah tersebut adalah $n(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3) \ldots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

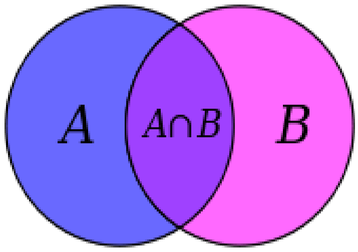
$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(Charalambides, 2002).

2.4 Prinsip Inklusi dan Eksklusi

Diberikan himpunan semesta S yang berhingga. Banyaknya anggota himpunan gabungan antara himpunan $A \subseteq S$ dan himpunan $B \subseteq S$ merupakan jumlah banyaknya anggota dalam himpunan A dan B dikurangi banyaknya anggota di dalam irisannya. Dengan kata lain,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Gambar 2.6 Diagram dua himpunan

Selanjutnya di uraikan bagaimana cara-cara menentukan banyaknya anggota didalam gabungan beberapa himpunan berhingga. Hasil ini kemudian akan dikembangkan menjadi sebuah prinsip yang dinamakan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

Sebelum membicarakan banyak unsur didalam gabungan n himpunan, dengan n sebagai bilangan bulat positif, sebuah rumusan bagi banyaknya anggota dalam gabungan 3 himpunan $A, B, C \subseteq s$,

$$|A \cup B \cup C|$$

akan diturunkan.

Untuk menyusun rumus ini perlu diperhatikan bahwa $|A| + |B| + |C|$ membilang tiap anggota A, B dan C tepat satu kali. Tetapi anggota-irisan setiap pasang himpunan ($A \cap B$, $A \cap C$ dan $B \cap C$) terbilang dua kali. Selanjutnya amati jumlahan

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Di dalam jumlahan ini, setiap unsur yang berada di dalam tepat dua himpunan (tidak berada di dalam himpunan ketiga) terbilang tepat satu kali. Tetapi unsur-unsur yang berada di dalam ketiga himpunan (berada di dalam $A \cap B \cap C$) di dalam ke tiga himpynan $A \cap B$, $A \cap C$ dan $B \cap C$ terbilang tiga kali, padahal ketika menghitung $|A| + |B| + |C|$ totalnya terbilang tiga kali. Jadi di dalam ekspresi

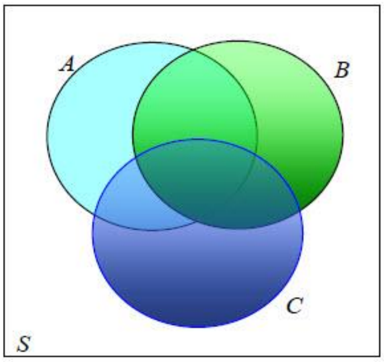
$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|,$$

unsur-unsur $A \cap B \cap C$ tidak terbilang (atau terbilang nol kali) sehingga untuk menghitung

$$|A \cup B \cup C|$$

harus ditambahkan $|A \cap B \cap C|$ sehingga diperoleh

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Gambar 2.7 Diagram tiga himpunan

Secara umum berlaku,

Teorema 2.1 (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Misalkan $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ *adalah himpunan berhingga, maka*

$$| A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n | =$$
$$\sum_{1 \le i \le n} \left| A_i \right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left| A_i \cap A_j \right| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left| A_i \cap A_j \cap A_k \right| - \ldots + (-1)^{n+1} \left| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n \right|.$$

(Charalambides, 2002).

Contoh 2.5 :

Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih 1000 yang habis dibagi oleh 5, 7 atau 11 ?

Jawab :

Misalkan A_1 himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 5, A_2 himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 7, dan A_3 himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 11. Dengan demikian $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 5, 7, atau 11, dan $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 5, 7, atau 11

$A_1 \cap A_2$ adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 5 dan 7, $A_1 \cap A_3$ adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 5 dan 11, dan $A_2 \cap A_3$ adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 7 dan 11.

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200 \;,\; |A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142 \;,\; |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(5,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28 \;,$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(5,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{55} \right\rfloor = 18$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(5,7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{385} \right\rfloor = 2$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 200 + 142 + 90 - 28 - 18 - 12 + 2 = 376$$

Jadi, terdapat 376 bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 1000 yang habis dibagi 5, 7, atau habis dibagi 11.

2.5 Koefisien Binomial

Definisi 2.1 (Fungsi faktorial)

Didefinisikan

$$0! = 1$$

dan untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) \qquad (2.1)$$

Permutasi k dari n dengan $n \geq k$, dilambangkan oleh simbol $P(n,k)$, didefinisikan sebagai banyaknya cara memilih k obyek yang berbeda dari n obyek yang berbeda dimana urutan obyek sangat diperhatikan. $P(n,k)$ juga bisa didefinisikan sebagai banyaknya pemetaan satu-satu yang berbeda dari daerah asal X dengan $|X| = k$ ke daerah hasil Y dengan $|Y| = n$. Dari definisi ini bisa dibuktikan

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (2.2)$$

Definisi 2.2 (Koefisien Binomial)

Untuk setiap bilangan bulat tak negatif dengan k dan n dengan $k \leq n$, bilangan-bilangan bulat.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2.3)$$

disebut koefisien binomial.

Koefisien binomial bisa digunakan untuk mencari banyaknya subhimpunan yang berbeda dengan banyak elemen k dari himpunan dengan n elemen.

Contoh 2.6 :

Menghitung banyak subhimpunan dari himpunan {a, b, c, d} yang banyak elemennya ada 2. Semua subhimpunan adalah {a,b}, {b,c}, {c,d}, {a,c}, {a,d}, dan {b,d}, semuanya berjumlah 6. Dengan koefisien binomial, banyak subhimpunan dengan 2 elemen adalah $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Teorema 2.2 (*Binomial*)

Untuk setiap a,b $\in \mathbb{R}$ *dan bilangan bulat positif n ,*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{2.4}$$

Bukti:

Ketika menjabarkan $(a + b)^n$, koefisien $A(n; k)$ dari $a^k b^{n-k}$ diperoleh dari penjumlahan suku-suku hasil perkalian n faktor yang berbentuk

$$aa\ldots aabb..b, \qquad aa..abab..bb, \qquad \ldots, \qquad bb..bbaa..a$$

yang terdiri atas k faktor-faktor a dan $(n - k)$ faktor-faktor b. Namun, karena perkalian di $\mathbb{R}$ bersifat komutatif (misalnya: $babaa = aaabb = a^3b^2$), semua bentuk hasil perkalian dari n faktor tersebut sama nilainya. Untuk mengetahui banyaknya n faktor dengan hasil yang sama, digunakan cara semacam berikut:

Karena bersifat komutatif, maka

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} A(n; k) a^k b^{n-k}$$

dimana $A(n; k)$ merupakan banyaknya bentuk perkalian dari n faktor di atas dengan nilai yang sama, yaitu $a^k b^{n-k}$.

Nilai dari $A(n;k)$ diperoleh dengan menghitung banyaknya cara memasukkan k variabel a ke n faktor hasil perkalian a dan b. Untuk setiap bentuk perkalian dengan nilai $a^k b^{n-k}$, terdapat satu dan hanya satu subhimpunan

$$\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$$

Sedemikian sehingga semua k faktor a dalam bentuk perkalian $a^k b^{n-k}$ berada pada posisi $i_1, i_2, ..., i_k$, Misalnya bentuk perkalian *abaab* bersesuaian dengan subhimpunan $\{1,3,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$. Dengan demikian, cara memperoleh $A(n;k)$ sama dengan cara memperoleh koefisien binomial $\binom{n}{k}$. Dengan kata lain, persamaan (2.4) berlaku. ■

Ada banyak penerapan dari teorema binomial. Misalnya untuk menghitung banyaknya semua subhimpunan yang dimiliki dari himpunan dengan n elemen,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k . 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

atau dalam komputasi pada teori peluang, untuk menghitung peluang mendapatkan k kali sukses di antara n kali percobaan, dsb. (Aigner, 2007).

2.6 Bilangan Stirling

Konsep faktorial $k!$ mensyaratkan k bulat tak negatif. Generalisasi terhadap faktorial $k!$ dengan k bulat tak negatif dilakukan dengan memperlonggar persyaratan bilangan bulat tak negatif k menjadi sembarang bilangan real t dan kemudian mengelompokkan atas dua jenis faktorial sebagai berikut.

Untuk setiap bilangan real t dan bilangan bulat positif n, faktorial naik adalah polinom derajat n yang didefinisikan dan diberi lambang seperti berikut

$$t^{\overline{n}} = t(t+1)(t+2)...(t+n-1)$$

(Charalambides, 2002).

Demikian pula faktorial turun adalah polinom derajat n berikut

$$t^{\underline{n}} = t(t-1)(t-2)...(t-n+1).$$

Jika $n \leq t$, maka

$$t^{\underline{n}} = P(t,n) \qquad \text{(lihat ekspresi 2.2).}$$

Dengan faktorial turun, bilangan Stirling jenis pertama $s(n,k)$ didefinisikan sebagai koefisien dari jumlahan di ruas kanan kesamaan

$$t^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k$$

sedangkan bilangan Stirling jenis kedua $S(n,k)$ didefinisikan sebagai koefisien di ruas kanan kesamaan

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) t^{\underline{k}}$$

(Charalambides, 2002).

Teorema berikut memberikan definisi lain dari bilangan Stirling jenis kedua.

Teorema 2.3

Bilangan Stirling jenis kedua $S_{n,k}$ adalah banyaknya partisi suatu himpunan berukuran n atas k subhimpunan.

Pembuktian bahwa teorema di atas memberikan definisi kedua dari $S_{n,k}$ bisa dilihat di dalam (Fifik 2013, Teorema 3.5). Inti pembuktian kedua definisi $S_{n,k}$ bisa dinyatakan secara rekursif dengan relasi rekurensi yang sama dan nilai awal yang sama.

2.7 Partisi Bilangan

Partisi dari suatu bilangan bulat adalah cara untuk menuliskan bilangan tersebut sebagai jumlah dari bilangan bulat positif. Fungsi partisi $p(n)$ ialah jumlah partisi yang bisa dimiliki oleh suatu bilangan bulat positif n.

Definisi 2.3 :

Partisi dari bilangan n adalah sebuah barisan yang diberi lambang

$$\boldsymbol{\lambda} = <\lambda_1,\ \lambda_2, \dots , \lambda_k > \tag{2.5}$$

dan memenuhi sifat

i. $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$, *dan*

ii. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$.

Jadi, $|\boldsymbol{\lambda}| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ adalah bilangan asli yang dipartisi menjadi barisan $\boldsymbol{\lambda}$. Jadi jika $\boldsymbol{\lambda}$ adalah partisi dari bilangan asli n maka $|\boldsymbol{\lambda}| = n$. Apabila $\boldsymbol{\lambda}$ adalah partisi dari n atas jumlahan sebanyak k suku yaitu, $\boldsymbol{\lambda}= (\lambda_1,\ \lambda_2, \dots , \lambda_k)$, dikatakan $\boldsymbol{\lambda}$ adalah partisi-k. Dalam hal ini, $1 \leq k \leq n$. (Aigner, 2007)

Par(n) dinotasikan sebagai himpunan semua partisi dari n. Jika $n = 0$, maka Par(n) hanya memuat partisi kosong, yang diberi notasi $\varnothing$ (Di sini $\varnothing$ bukan lambang himpunan kosong, tetapi partisi kosong).

Demikian pula Par($n;k$) dinotasikan sebagai himpunan semua partisi -k dari n, ukuran (banyak partisi di dalam) masing-masing himpunan Par(n) dan Par($n;k$) adalah

$$p(n) = |\mathrm{Par}(n)| \qquad \text{dan} \qquad p(n;k) = |\mathrm{Par}(n;k)| \tag{2.6}$$

Dari definisi, Par(0) = Par(0;0) = {∅} sehingga ukuran himpunan ini adalah $p(0) = p(0;0) = 1$. Jika $n > 0$, semua partisi di dalam Par(n) tidak boleh kosong. Ini berarti $p(n;0) = 0$. (Aigner, 2007)

Contoh 2.7:

Untuk $n = 5$, diperoleh 7 partisi (unsur-unsur Par(5)) yakni,

$<5>$ $<4, 1>$ $<3, 2>$ $<3, 1, 1>$ $<2, 2, 1>$ $<2, 1, 1, 1>$ $<1, 1, 1, 1, 1>$;

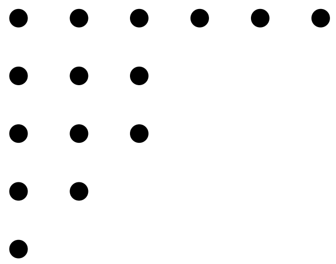
sehingga $p(5) = |\mathrm{Par}(5)| = 7$.

- $\mathrm{Par}(5, 1) = \{<5>\} \Rightarrow p(5, 1) = 1,$
- $\mathrm{Par}(5, 2) = \{<4, 1>, <3, 2>\} \Rightarrow p(5, 2) = 2,$
- $\mathrm{Par}(5,3) = \{<3, 1, 1>, <2, 2, 1>\} \Rightarrow p(5, 3) = 2,$
- $\mathrm{Par}(5, 4) = \{<2, 1, 1, 1>\} \Rightarrow p(5, 4) = 1,$
- $\mathrm{Par}(5, 5) = \{<1, 1, 1, 1, 1>\} \Rightarrow p(5, 5) = 1.$

Partisi bilangan bisa dinyatakan melalui **diagram Ferrer**. Diagram Ferrer untuk partisi λ ini dibuat dengan cara meletakkan n buah titik pada k baris dengan aturan sebagai berikut: sebanyak λ_1 titik diletakkan pada baris pertama, sebanyak λ_2 titik pada baris kedua, … hingga sebanyak λ_k titik pada baris ke-k dan semuanya dimulapi dari kolom yang sama, kolom paling kiri. Diagram Ferrer untuk $\lambda \in \mathrm{Par}(n;k)$, diagram mempunya k baris.

Contoh 2.8 :

Partisi $\lambda = (6, 3, 3, 2, 1) \in Par(15;5)$ dinyatakan oleh diagram Ferrer berikut



Gambar 2.8 Diagram Ferrer $\lambda = (6, 3, 3, 2, 1)$

(Aigner, 2007).