ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN TRANSFORMASI MODEL REGRESI MENGGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL LINIER

Skripsi

Disusun oleh :

A. MUSDALIFA

H 121 09 002

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

2013

"ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN TRANSFORMASI MODEL REGRESI MENGGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL LINIER"

S K R I P S I

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar

Oleh:

A. MUSDALIFA

H 121 09 002

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2013

P E R N Y A T A A N

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan dengan sesungguh-sungguhnya bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

“ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN TRANSFORMASI MODEL REGRESI MENGGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL LINIER”

adalah benar hasil kerja saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 22 Juli 2013

A. MUSDALIFA
NIM : H 121 09 002

“ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN TRANSFORMASI MODEL REGRESI MENGGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL LINIER”

Disetujui Oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Drs. RAUPONG, M. Si.	**ANNA ISLAMIYATI, S.Si. M.Si**
NIP. 19621015 198810 1 001	**NIP. 19770808 200501 2 002**

Pada tanggal : 22 Juli 2013

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

Pada hari ini, Senin tanggal 22 Juli 2013, Panitia Ujian Skripsi menerima dengan baik skripsi yang berjudul :

"ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DENGAN TRANSFORMASI MODEL REGRESI MENGGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL LINIER"

yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Makassar, 22 Juli 2013

PANITIA UJIAN SKRIPSI

Tanda Tangan

1. Ketua : **Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc** (..)

2. Sekretaris : **Muh. Nur, S.Si, M.Si** (..)

3. Anggota : **Andi Kresna Jaya, S.Si, M.Si** (....)

4. Anggota : **Drs. Raupong, M. Si.** (..)

5. Anggota : **Anna Islamiyati, S.Si, M.Si** (.......................................)

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah Rabbil Alamin penulis panjatkan ke hadirat ***Allah SWT*** atas limpahan rahmat dan ridho-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Salam dan sholawat penulis hanturkan kepada Baginda Rasulullah ***Muhammad SAW*** sebagai satu-satunya suri tauladan dalam menjalankan kehidupan dunia dan akhirat.

Penyusunan skripsi ini tentunya tidak lepas bantuan berbagai pihak baik moril maupun materil. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus dan penghargaan yang tak terhingga kepada Ayahanda dan Ibunda tercinta **Suloi Nontji S.Pd** dan **Andi Hafsah** yang telah mendidik penulis dengan penuh kesabaran bertabur cinta, kasih sayang dan dengan penuh ketulusan hati serta telah mencurahkan seluruh cinta, kasih sayang, cucuran keringat dan air mata, untaian doa serta pengorbanan tiada henti, yang hingga kapanpun penulis takkan bisa membalasnya.

Maafkan jika Ananda sering menyusahkan, merepotkan, serta melukai perasaan Ibunda dan Ayahanda. Keselamatan Dunia Akhirat semoga selalu untukmu. Semoga Allah selalu menyapamu dengan Cinta-Nya.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. Rektor Universitas Hasanuddin, Bapak **Prof. Dr. dr. Idrus Patturusi, Sp.BO** beserta jajarannya**.**
2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin, Bapak **Prof. Dr. Hanapi Usman, M.Sc**, beserta jajarannya.
3. Ketua Jurusan Matematika, Ibu **Dr. Hasmawati, M.Si.**
4. Bapak **Drs. Raupong, M.Si** dan Ibu **Anna Islamiyati, S.Si., M.Si** yang telah meluangkan waktunya dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, arahan dan saran kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak **Andi Kresna Jaya, S.Si, M.Si.** selaku penasehat akademik yang telah memberikan perhatiannya selama perkuliahan.
6. Bapak **Dr. Amir Kamal Amir M. Sc** Bapak **Muh. Nur, S.Si., M.Si,** dan Bapak **Andi Kresna Jaya, S.Si, M.Si** selaku panitia penguji yang telah memberikan kritikan membangun dalam penyempurnaan penyusunan skripsi ini.
7. Para **Dosen Jurusan Matematika** yang telah menyuapi penulis dengan banyak ilmu selama menjalani perkuliahan hingga berhasil menyelesaikan studi.

8. Para **Staf Jurusan Matematika,** Pak Sutamin, S.Sos. dan Pak Nasir. Terima kasih atas segala bantuan, pelayanan, dan kerjasama yang diberikan selama pengurusan administrasi di jurusan.
9. Saudara-saudariku yang tercinta **Andi Fitra Suloi S.Tp, Andi Paliu Suloi, Andi Nur Fajri Suloi** yang selalu memberikan dukungan dan kasih sayangnya.
10. Teman-teman terbaik **Stat'09** (*Uni, Ivin, Kiki, Yuli, Andha, Ayu, Cimmank, Endy, Evi, Fachrun, Fitra, Fitri, Hera, Hesty, Ida, Iman, Ira, Irsan, Isna, Jejen, Jumi, Mimi, Mirsam, Naser, Niki, Nonot, Nurmi, Risma, Tenry, Try, Vinni, Whay, Yanti, Yuni*), terimakasih atas kebersamaan dan persaudaraan terindah yang terjalin.
11. Teman-teman **Math'09** (*Ali, Cia, Icha, Rina, Sadno, Faisal, Jamal, Edy, Delia*)
12. Kanda-kanda dan dinda-dinda di **Himatika** tanpa terkecuali. ***Bravo Himatika.***
13. Kepala Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Maros dan seluruh staf BPS Kabupaten Maros atas sambutannya pada saat pelaksanaan Kerja Praktek.
14. Teman-teman KKN Gel. 84 Kec. Bungoro Kab. Pangkep.
15. Semua pihak yang tak sempat disebutkan satu persatu atas segala bentuk bantuan dan perhatiannya hingga terselesaikannya skripsi ini.

Terisitmewa penulis haturkan rasa cinta dan terima kasih sedalam-dalamnya kepada *my special one*, yang senantiasa menemani dan memberikan dukungan moril kepada penulis dalam kebersamaan selama ini.

Selain itu, penulis juga mengucapkan permohonan maaf yang sedalam-dalamnya jika penulis telah banyak melakukan kesalahan dan kekhilafan, baik dalam bentuk ucapan maupun tingkah laku, semenjak penulis menginjakkan kaki pertama kali di Universitas Hasanuddin hingga selesainya studi penulis. Semua itu adalah murni dari penulis sebagai manusia biasa yang tak pernah luput dari kesalahan dan kekhilafan. Adapun mengenai kebaikan-kebaikan penulis, itu semata-mata datangnya dari Allah SWT, karena segala kesempurnaan hanyalah milik-Nya.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima dengan tangan terbuka. Semoga tulisan ini bermanfaat bagi semua pihak. *Amin Yaa Rabbal Alamin*.

Makassar, 22 Juli 2013

Penulis

ABSTRAK

Estimasi parameter adalah merupakan hal yang sangat penting dalam statistika. Oleh karena itu, salah satu distribusi kontinu dalam statistika adalah distribusi *Weibull*. Parameter distribusi *Weibull* akan diestimasi menggunakan metode kuadrat terkecil linier. Dalam mengestimasi parameter distribusi *Weibull*, distribusi kumulatif *Weibull* harus ditentukan terlebih dahulu dengan mengintegralkan fungsi kepadatan peluang distribusi *Weibull*. Selanjutnya fungsi distribusi kumulatif *Weibull* yang merupakan fungsi non-linier akan ditransformasi ke fungsi linier dengan melogaritmakan kedua ruas distribusi kumulatif *Weibull*. Proses ini disebut transformasi logaritma. Selanjutnya, dengan menggunakan metode kuadrat terkecil linier untuk memperoleh nilai estimasinya.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah kecepatan angin terbesar per bulan di Makassar pada Januari 2008 sampai Desember 2012. Hasil olahan data yang dilakukan maka diperoleh model distribusi *Weibull*.

Kata Kunci : Distribusi *Weibull*, Metode Kuadrat Terkecil Linier, Transformasi Logaritma.

ABSTRACT

Parameter estimation is very important thing in statistics. Therefore, one of the continiuous distribution in statistics is the *Weibull* distribution. *Weibull* distribution parameters will be estimated using linear least squares method. In estimating the parameter of *Weibull* distribution, *Weibull* cumulative distribution must be determined by the density functions integrate *Weibull* distribution opportunities. Furthermore *Weibull* cumulative distribution function which is a non linear function will be transformed into a linear function with both sides melogaritmakan cumulative *Weibull* distribution. This process is called logarithmic transformation. Furthermore, by using linear least squares method to obtain value estimates.

The data used in this study is the largest wind speed per month in Makassar in January 2008 to Desember 2012. The processed data which is obtained in doing *Weibull* distribution model.

Keywords: *Weibull* Distribution, Linear Least Square Method, Logarithmic Transformation.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SINGKATAN DAN LAMBANG

Singkatan/ Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
SINGKATAN		
MLE	*Maximum Likelihood Estimation*	1
LLSM	*Linear Least Square Method*	1
fkp	*Fungsi Kepadatan Peluang*	11
fdk	*Fungsi Distribusi Kumulatif*	11
LAMBANG		
Y_i	Variabel tak bebas	7
X_i	Variabel bebas	7
α_0, α_1	Parameter atau koefisien regresi linier sederhana	7
e_i	Error atau kesalahan	7
$\hat{\alpha}_0$ dan $\hat{\alpha}_1$	Nilai Estimasi	8
α	Parameter bentuk pada Weibull	12
β	Parameter skala pada Weibull	12
$F(x)$	Fungsi distribusi kumulatif	12
$F^{'}(x)$	Fungsi kepadatan peluang	12
$WEI(\alpha, \beta)$	Distribusi Weibull dengan parameter α, β	13
$E(x)$	Mean	13
$V(x)$	Variansi	13
S	Jumlah kuadrat galat	23
t	Waktu	25
s	Kecepatan angin terbesar perbulan	25
M	Nilai pendekatan Mann	26
$r = n$	Jumlah data	26
k_1	Jumlah data dibagi 2	26
k_2	$\frac{r-1}{2}$	26
s_i	Data ke-i	26
t_i	Waktu ke-i	
$F(s_i)$	Fungsi distribusi kumulatif data	26
M_{tabel}	Nilai table distribusi F	27
$f(t_i)$	Model Weibull dari data	31

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu distribusi kontinu dalam teori probabilitas dan statistika adalah distribusi Weibull. Distribusi Weibull adalah distribusi penting terutama untuk keandalan (*reliability*) dan analisis rawatan (*mantainability*). Distribusi Weibull mempunyai aplikasi paling luas dalam menganalisa data uji hidup. Data uji hidup atau uji reliabilitas merupakan peluang bahwa komponen tersebut akan berfungsi sebagaimana mestinya, sampai jangka waktu tertentu dalam percobaan yang telah ditentukan. Dalam uji reliabilitas terdapat beberapa fungsi yang digunakan untuk menentukan reliabilitas suatu sistem diantaranya adalah fungsi ketahanan (*survival function*) dan fungsi kegagalan (*failure rate function*).

Distribusi lain yang mempunyai aplikasi yang sama dengan distribusi Weibull adalah distribusi Gamma. Namun, kekurangan dari distribusi Gamma adalah memiliki fungsi ketahanan (*survival function*) yang tidak dapat ditentukan bentuk khususnya, kecuali jika parameter bentukannya berupa bilangan asli. Hal ini menyebabkan distribusi Gamma sedikit digunakan dibandingkan dengan distribusi Weibull karena mempunyai fungsi kegagalan dan ketahanan yang lebih sederhana. (Setiawan Yoga)

Hal yang penting dalam mengkaji suatu distribusi adalah masalah mengestimasi parameternya. Umumnya estimasi parameter suatu distribusi digunakan *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE). Dalam regresi linier sederhana, metode yang biasa digunakan dalam mengestimasi parameter regresi adalah metode kuadrat terkecil. Konsep metode ini adalah untuk mengestimasi parameter dengan memilih garis regresi yang terdekat dengan garis dari semua data. Secara matematika penentuan parameter regresi ini dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat dari residualnya (Walpole dan Myers, 1986). Metode ini juga dapat dipakai untuk mengestimasi parameter Weibull.

Oleh karena itu pada penelitian ini dikemukakan suatu metode yang merupakan kasus khusus untuk metode kuadrat terkecil yaitu Motode Kuadrat Terkecil Linier (*Linear Least Square Method = LLSM).* Namun untuk distribusi Weibull harus dilakukan transformasi ke model regresi.

Tugas akhir ini membahas mengenai estimasi parameter dari distribusi Weibull yang telah ditransformasi ke model regresi liner dengan menggunakan metode kuadrat terkecil linier. Oleh karena itu penulis menuangkan pembahasan tersebut dalam tulisan dengan judul:

”Estimasi Parameter Distribusi Weibull dengan Transformasi Model Regresi Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil Linier ”.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam penulisan tugas akhir ini, permasalahan yang akan dibahas adalah:

1. Bagaimana mengestimasi parameter distribusi Weibull dengan transformasi model regresi menggunakan metode kuadrat terkecil linier?
2. Bagaimana memodelkan data kecepatan angin terbesar per bulan di Makassar yang berdistribusi Weibull?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan tugas akhir ini dibatasi pada estimasi parameter distribusi Weibull dua parameter menggunakan metode kuadrat terkecil linier.

1.4 Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Mengestimasi parameter distribusi Weibull dengan transformasi model regresi menggunakan metode kuadrat terkecil linier.
2. Memodelkan data kecepatan angin terbesar per bulan di Makassar yang berdistribusi Weibull.

1.5 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk memberikan wacana lain dalam estimasi parameter model, khususnya model-model yang berdistribusi Weibull.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Regresi Linier Sederhana

Regresi adalah pengukur hubungan dua variabel atau lebih yang dinyatakan dengan bentuk hubungan atau fungsi. Untuk menentukan bentuk hubungan (regresi) diperlukan pemisahan yang tegas antara variabel bebas yang sering diberi simbol X dan variabel tak bebas dengan simbol Y. Pada regresi harus ada variabel yang ditentukan dan variabel yang menentukan atau dengan kata lain adanya ketergantungan variabel yang satu dengan variabel yang lainnya dan sebaliknya. Kedua variabel biasanya bersifat kausal atau mempunyai hubungan sebab akibat yaitu saling berpengaruh. Sehingga dengan demikian, regresi merupakan bentuk fungsi tertentu antara variabel tak bebas (Y) dengan variabel bebas (X) atau dapat dinyatakan bahwa regresi adalah sebagai suatu fungsi $Y = f(X)$. Bentuk regresi tergantung pada fungsi yang menunjangnya atau tergantung pada persamaannya. (Santuo. 2012)

Dalam regresi, perlu ditekankan bahwa dalam bentuk hubungan tersebut terdapat sebuah variabel tak bebas (Y), dengan sekurang-kurangnya sebuah variabel bebas (X). Untuk mendapatkan bentuk hubungan yang sesuai antara variabel bebas (X) dengan variabel tak bebas (Y) maka kedua variabel tersebut harus dinyatakan dalam nilai yang terukur atau kuantitatif sekurang-kurangnya dengan skala interval.(Santuo. 2012)

Variabel-variabel yang akan dicari bentuk hubungannya terlebih dahulu hendaknya dijelaskan mana yang sebagai variabel bebas (X) dan mana yang sebagai variabel tak bebas (Y). Dalam hal-hal tertentu, penentuan variabel bebas (X) dan variabel tak bebas (Y) sangat mudah, tetapi kadang-kadang hal tersebut sangat sulit ditelusuri antara yang mana variabel bebas (X) maupun yang mana variabel tak bebas (Y). Apabila hubungan antara dua variabel atau lebih bersifat kausal atau hubungan sebab-akibat, maka variabel yang sebagai sebab merupakan variabel bebas atau variabel (X) dan akibat yang ditimbulkannya menjadi variabel tak bebas atau variabel (Y). (Santuo. 2012)

2.1.1 Penaksiran Parameter Model Regresi Linier Sederhana

Regresi linier adalah metode statistika yang digunakan untuk membentuk model hubungan antara variabel terikat (dependen, respon, Y) dengan satu atau lebih variabel bebas (independen, prediktor, X). Apabila banyaknya variabel bebas hanya ada satu, disebut sebagai regresi linier sederhana.

Bentuk hubungan yang paling sederhana antara variabel X dengan variabel Y adalah berbentuk garis lurus atau berbentuk hubungan linier yang disebut dengan regresi linier sederhana atau sering disebut regresi linier saja dengan persamaan matematikanya adalah sebagai berikut:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + e_i \ , \quad i = 1,2, \ldots, n \qquad (2.1)$$

dimana:

Y_i : variabel tak bebas

X_i : variabel bebas

α_0, α_1 : parameter atau koefisien regresi linier sederhana

e_i : error atau kesalahan

Teknik penaksiran parameter yang sangat terkenal dalam statistika adalah metode kuadrat terkecil. Metode kuadrat terkecil digunakan untuk menghitung estimasi parameter. Metode kuadrat terkecil terdiri dari beberapa macam salah satunya ialah metode kuadrat terkecil linier.

2.1.2 Penaksiran Parameter Metode Kuadrat Terkecil Linier (*LLSM*)

Metode kuadrat terkecil digunakan untuk menghitung parameter dalam formula ketika pemodelan eksperimen dan dapat memberikan estimasi dari parameter. Jika menggunakan metode kuadrat terkecil, maka jumlah dari kuadrat dari penyimpangan harus diminimumkan.

Dalam skripsi ini akan dibahas teknik estimasi yang dikenal sebagai Metode Kuadrat Terkecil Linier (*Linear Least Square Methode = LLSM).* Metode kuadrat terkecil linier (*LLSM*) adalah kasus khusus pada metode kuadrat terkecil dengan formula yang terdiri dari fungsi linier.

Persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk:

$$e_i = Y_i - \alpha_0 - \alpha_1 X_i \qquad (2.2)$$

Untuk mengestimasi α_0 dan α_1 akan dipilih $\hat{\alpha}_0$ dan $\hat{\alpha}_1$ sebagai nilai estimator yang dapat meminimumkan e_i. Nilai $\hat{\alpha}_0$ dan $\hat{\alpha}_1$ dapat ditentukan dengan mendiferensialkan persamaan (2.2) terhadap α_0 dan α_1 . Sehingga didapatkan

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2}{\partial \alpha_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha_0 - \alpha_1 X_i) \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2}{\partial \alpha_1} = -2\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \alpha_0 - \alpha_1 X_i) \qquad (2.4)$$

Selanjutnya persamaan (2.3) dan (2.4) disamakan dengan nol, dan dengan mengganti α_0 dan α_1 dengan nilai estimatornya, yaitu $\hat{\alpha}_0$ dan $\hat{\alpha}_1$, maka diperoleh:

$$-2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i) = 0 \qquad (2.5)$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i) = 0 \qquad (2.6)$$

Setelah disederhanakan, diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i) = 0 \qquad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 X_i) = 0 \qquad (2.8)$$

Dari persamaan (2.7) dan (2.8) dapat diperoleh persamaan normal

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(2.9)

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\alpha}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2. \qquad (2.10)$$

Selanjutnya persamaan (2.9) dan (2.10) akan diperoleh nilai $\hat{\alpha}_0$ dan $\hat{\alpha}_1$ dengan menggunakan aturan *Cramer* yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} XY_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} XY_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix}} \; , \; \det \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

dan

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} XY_i \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix}} \; , \; \det \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

2.2 Distribusi Gamma dan Distribusi Eksponensial

Distribusi gamma adalah distribusi fungsi kepadatan yang terkenal luas dalam bidang matematika. Pentingnya distribusi gamma terletak pada kenyataan bahwa distribusi ini merupakan suatu keluarga distribusi eksponensial. Tetapi, distribusi gamma sendiri mempunyai terapan penting dalam waktu menunggu dan teori keandalan.

Distribusi gamma dan eksponensial memainkan peran yang sangat penting dibidang teori antrian dan teori keandalan (*reliabilitas*). Distribusi Eksponensial merupakan keadaan khusus dari distribusi gamma.

Sebelum membahas lebih lanjut tentang distribusi gamma, terlebih dahulu akan diperkenalkan sebuah fungsi yang banyak memegang peranan penting dibanyak cabang matematika terapan, yaitu fungsi gamma. Didefinisikan untuk $\alpha > 0$ fungsi gamma $\Gamma(\alpha)$ adalah

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} \exp(-y)\ dy \qquad (2.11)$$

Jika $\alpha = 1$, maka

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-y)\ dy = 1 \qquad (2.12)$$

Jika $\alpha > 1$ maka

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)! \qquad (2.13)$$

Misalkan $y = \frac{x}{\beta}$, $\beta > 0$, maka persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \frac{1}{\beta}\, dx \qquad (2.14)$$

atau

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\, dx \quad \alpha > 0, \beta > 0, \Gamma(\alpha) > 0 \qquad (2.15)$$

Diketahui X adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan peluang (*probability density function = fkp)* yaitu $f(x)$, maka berdasarkan fungsi gamma dapat ditulis:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \qquad 0 < x < \infty \qquad (2.16)$$

$$= 0 \qquad lainnya,$$

(Hoog and Craig)

Fungsi eksponensial adalah salah satu fungsi yang paling penting dalam matematika. Biasanya, fungsi ini ditulis dengan notasi exp(x) atau e^x, dimana e adalah basis logaritma natural yang kira-kira sama dengan $2.71828183 \cdots$.

Distribusi eksponensial merupakan kasus khusus dari distribusi gamma dengan faktor bentuk $\alpha = 1$ dan faktor skala $\beta = \frac{1}{\lambda}$. Distribusi ini banyak digunakan sebagai model dibidang teknik dan sains. Distribusi eksponensial merupakan model waktu (atau panjang atau area) antara kejadian Poisson. Dengan fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif sebagai berikut:

Fungsi kepadatan peluang (fkp*)* dari distribusi eksponensial diberikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & untuk\ x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & untuk\ yang\ lain \end{cases} \qquad (2.17)$$

Fungsi distribusi kumulatif (C*umulative Density Function = Fdk)* dari distribusi eksponensial diberikan sebagai berikut:

$$F(x) = \int_0^x \lambda \exp(-\lambda x)\, dt = 1 - \exp(-\lambda x) \tag{2.18}$$

2.3 Distribusi Weibull

Teknologi modern telah memungkinkan orang merancang banyak sistem yang rumit penggunaannya atau bergantung pada keandalan berbagai komponen dalam sistem tersebut. Komponen yang sama dalam lingkungan yang sama akan rusak dalam waktu yang berlainan yang tak dapat diramalkan. (Walpole dan Myers. 1995)

Fdk diberikan sebagai berikut:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{2.19}$$

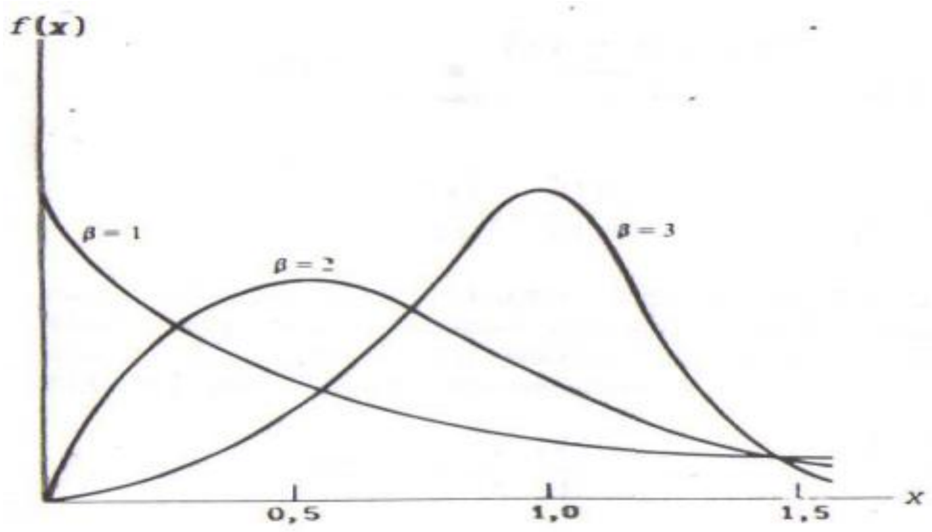
Definisi 2.5 :

Variabel acak X berdistribusi Weibull, dengan parameter bentuk $\alpha > 0$ dan parameter skala $\beta > 0$, jika fkp berbentuk:

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right], & x \geq 0 \\ 0 & , untuk\ x\ lainnya \end{cases} \tag{2.20}$$

(Akritas, George, M.)

Grafik distribusi Weibull untuk $\alpha = 1$ dan berbagai parameter β digambarkan pada Gambar 1. Gambar 1 dibawah dapat dilihat bahwa kurva tersebut berubah bentuknya untuk nilai parameter yang berbeda terutama parameter β. Bila $\beta = 1$ maka distribusi Weibull menjadi distribusi eksponensial. Untuk $\beta > 1$ maka kurvanya menyerupai kurva normal tapi agak mencong.



Gambar 1. Grafik Distribusi Weibull

Misalkan X variabel acak berdistribusi Weibull $X \sim WEI(\alpha, \beta)$. Maka

$$E(X) = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \tag{2.21}$$

$$V(X) = \beta^2\left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\} \tag{2.22}$$

Distribusi Weibull dipakai pada persoalan keandalan dan pengujian panjang umur (*life testing*) seperti waktu sampai rusak atau panjang umur suatu komponen, diukur dari suatu waktu tertentu sampai rusak. (Walpole dan Myers. 1995)

2.4 Transformasi Model Regresi

Transformasi digunakan untuk menyederhanakan model non-linier menjadi model yang linier. Jenis-jenis transformasi terdiri dari transformasi resiprokal, transformasi logaritma, transformasi akar, dll.

Transformasi yang digunakan pada distribusi Weibull adalah transformasi logaritma. (Draper dan Smith)

Fungsi distribusi kumulatif Weibull seperti pada persamaan (2.19) merupakan fungsi non-linier yang akan ditransformasi ke fungsi linier, selanjutnya akan menghasilkan suatu model regresi linier sederhana.