SKRIPSI

ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FAKTOR DIFUSI DAN UPAYA PEMANENAN

Disusun dan diajukan oleh

ARFYAN SAPUTRA

H11114007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FAKTOR DIFUSI DAN UPAYA PEMANENAN

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi MATEMATIKA Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ARFYAN SAPUTRA

H11114007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : ARFYAN SAPUTRA

NIM : H11114007

Program Studi : MATEMATIKA

Jenjang : S1

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulisan saya berjudul

ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FAKTOR DIFUSI DAN UPAYA PEMANENAN

Adalah benar hasil karya saya sendiri bukan merupakan pengambilan alihan tulisan orang lain dan bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini merupakan hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 10 Agustus 2021

Yang Menyatakan

ARFYAN SAPUTRA

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FAKTOR DIFUSI DAN UPAYA PEMANENAN

Disetujui oleh :

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.	**Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.**
NIP. 19800904 200312 2001	**NIP. 19750816 199903 1 001**

Ketua Program Studi

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Pada Tanggal : 10 Agustus 2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FAKTOR DIFUSI DAN UPAYA PEMANENAN

Disusun dan diajukan oleh :

ARFYAN SAPUTRA
H11114007

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Sarjana pada Program Studi MATEMATIKA Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

Pada tanggal 10 Agustus 2021

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.	**Dr. Agustinus Ribal, S.Si., M.Sc.**
NIP. 19800904 200312 2001	**NIP. 19750816 199903 1 001**

Ketua Program Studi

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS HASANUDDIN DEPARTEMEN MATEMATIKA FAKULTAS MIPA

Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si.
NIP. 19700807 200003 1 002

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah Azza Wa Jalla Rabb semesta alam yang ditangan-Nya tergenggam nyawa seluruh makhluk semesta alam, yang Maha kekal sebelum sesuatunya ada, dan akan tetap kekal setelah segala sesuatunya tiada. Shalawat serta salam semoga selalu dilimpahkan kepada Nabi Muhammad ﷺ dan kepada para keluarga serta Sahabat beliau. Alhamdulillah Wasyukurillah, berkat pertolongan Allah akhirnya skripsi dengan judul **" ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FAKTOR DIFUSI DAN UPAYA PEMANENAN "** yang disusun sebagai salah satu syarat akademik untuk meraih gelar sarjana sains pada Program Studi MATEMATIKA Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin ini dapat dirampungkan. Penulis berharap skiripsi ini dapat memberikan tambahan pengetahuan baru bagi para pembelajar dalam program studi MATEMATIKA.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak lepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada ibunda **Naga** atas segala hal yang diberikan dan segala hal yang dipendam untuk diberikan baik yang terkendala waktu maupun materi. Ucapan terima kasih juga kepada saudara-saudari serahim yang memberikan dukungan fisik maupun dukungan moril, semoga harapan kalian segera terkabulkan.

Dengan segala kerendahan hati penulis meyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada :

1. Ibu **Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin berserta seluruh jajarannya.
2. Bapak **Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. Bapak **Prof. Dr. Nurdin, S.Si., M.Si,** selaku Ketua Departemen Matematika atas segala fasilitas, kebijakan dan dukungan yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
4. Ibu **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si.** dan Bapak **Dr. Agustinus Ribal. S.Si., M.Sc.** selaku dosen pembimbing utama yang dengan setulus hati telah meluangkan

waktunya ditengah berbagai kesibukan dan prioritasnya untuk membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.

5. Bapak **Prof. Dr. Moh. Ivan Azis, M.Sc.** selaku penguji atas kesediaannya untuk memberikan saran dan arahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Bapak **Dr. Muh. Nur., S.Si., M.Si.** selaku penguji sekaligus penasehat akademik atas waktu, dukungan serta motivasi yang diberikan kepada penulis dalam membimbing penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
7. **Dosen Pengajar Departemen Matematika** yang telah membekali ilmu kepada penulis selama menjadi mahasiswa di Departemen Matematika. Serta Staf Departemen Matematika yang telah membantu banyak dalam perkuliahan.
8. **Ketua Umum Himatika dan Himastat** , adinda Ardi dan Arhan yang membiarkan sekretariat digunakan untuk menyusun tugas akhir ini.
9. Teruntuk Kanda **Hedi**, Kanda **Awi**, dan kanda **Eko** dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ternyata sangat membantu dalam penulisan tugas akhir ini.
10. Kanda **FANDY HERIBET DUSIA s**elaku Ketua Angkatan **TRANSPOSE 2014.**
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas segala bentuk kontribusi, partisipasi, serta motivasi yang diberikan kepada penulis selama ini. Semoga apa yang telah diberikan akan dilipatgandakan oleh Allah Subhanahu Wa Ta’ala. Aamiin.

Makassar, 10 Agustus 2021

ARFYAN SAPUTRA

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: ARFYAN SAPUTRA
NIM	: H11114007
Program Studi	: MATEMATIKA
Departemen	: Matematika
Fakulstas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Prediktor Royalti Nonekslusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul :

Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa dengan Faktor Difusi dan Upaya Pemanenan

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal diatas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Makassar pada 10 Agustus 2021

Yang menyatakan

ARFYAN SAPUTRA

ABSTRAK

Dalam skripsi ini ditinjau sistem mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II dan pemanenan pada populasi pemangsa, dimana pemanenan pada pemangsa diasumsikan konstan. Kemudian diperoleh titik kesetimbangan positif dan stabilitas lokal. Dengan menggunakan sistem yang sama kami menambahkan suku difusi dua dimensi. Kondisi stabil dipertahankan dan kami menyelidiki nilai eigen pada sistem sehingga diperoleh kondisi untuk menghasilkan ketidakstabila Turing. Dengan simulasi numerik, penyebaran mangsa-pemangsa yang membentuk pola labirin ditunjukkan. Namun, seiring berjalannya waktu pola labirin tersebut diisi dengan titik-titik yang memiliki kepadatan yang rendah.

Kata kunci : Model Leslie-Gower, Pemanenan, Ketidakstabilan Turing.

ABSTRACT

In this study, Leslie-Gower predator-prey system with Holling-type II functional response and harvesting in predator population is considered, in which the harvesting of predator population is assumed to constan. The existence of a positive equilibrium and a local stability are obtained. In the same system we add a two-dimensional diffusion term to the system. Stability condition is maintained and we investigate the eigenvalues on the system so that conditions are obtained to generate Turing instability. With numerical simulations the prey-predator distribution forming a labyrinth pattern are showed. As time goes on the labyrinth pattern is then filled with spots that have a low density.

Keywords : Leslie-Gower, Harvesting, Turing Instability.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Model mangsa-pemangsa adalah model yang menggambarkan dinamika interaksi antara dua populasi, dimana salah satu populasi menjadi mangsa untuk populasi yang lainnya. Lotka dan Volterra pada pertengahan 1925 mengembangkan sepasang persamaan differensial sederhana yang menggambarkan fenomena mangsa-pemangsa yang dikenal sebagai model Lotka-Volterra (Murray, 2002). Dalam model Lotka-Volterra, populasi pemangsa bergantung pada kepadatan populasi mangsa. Model ini tidak mempertimbangkan keadaaan ketika kepadatan mangsa berkurang maka pemangsa akan mencari mangsa yang lain (Toaha & Azis, 2018). Selain itu dalam model Lotka-Volterra, populasi mangsa tumbuh tidak terhingga tanpa kehadiran populasi pemangsa (Berryman, 1992).

Leslie-Gower mengajukan sebuah model mangsa-pemangsa dimana kapasitas batas pada populasi pemangsa sebanding dengan kepadatan populasi mangsa, yang menekankan bahwa kepadatan populasi mangsa dan populasi pemangsa terbatas dalam pertumbuhannya. Hal ini tidak dipertimbangkan dalam model Lotka-Volterra (Yue, 2016). Istilah fungsi respon pertama kali digunakan oleh Solomon (1949) namun secara khusus dikaitkan dengan Holling (1959) melalui karyanya yang mengklasifikasikan fungsi respon menjadi 3 tipe. Fungsi respon holling tipe II menggambarkan kurva yang menurun secara yang monoton dengan meningkatnya kepadatan dari mangsa (Dawes & Souza, 2013).

Pada tahun 2003, Aziz dan Okiye memodifikasi model mangsa-pemangsa Leslie Gower dengan menambahkan parameter perlindungan lingkungan untuk menjaga keberlangsungan kehidupan mangsa dan pemangsa (Yue, 2016). Beberapa peneliti juga mempertimbangkan faktor pemanenan pada pemangsa atau mangsa. Pemanenan menggambarkan berkurangnya populasi karena perburuan atau penangkapan individu yang mengakibatkan individu tersebut lepas dari populasinya. Dari sudut pandang kebutuhan manusia, pemanenan atau perburuan yang dilakukan manusia dapat memberi pengaruh dalam dinamika ekosistem (Souna dkk., 2020).

Suku difusi ditambahkan pada sistem mangsa-pemangsa dengan pertimbangan bahwa mangsa dan pemangsa bergerak dalam ekosistem. Persamaan difusi menggambarkan gerakan populasi dari area berkonsentrasi tinggi ke area berkonsentrasi rendah. Sementara, interaksi antara dua lebih objek dalam lingkup ekologi ini disebut sebagai persamaan reaksi. Gabungan dari persamaan ini disebut sebagai persamaan reaksi-difusi.

Pada tahun 1952, Alan Turing mengusulkan bahwa formasi pola dapat dipahami menggunakan persamaan reaksi-difusi yang mewakili bahan kimia yang berinteraksi. Persaman reaksi yang stabil dapat menjadi tidak stabil akibat penambahan difusi. Fenomena ini biasanya disebut sebagai Ketidakstabilan Turing (Murray, 2003). Ketidakstabilan Turing pada model mangsa pemangsa telah dikaji sebelumnya oleh beberapa peneliti. Camara & Aziz (2009) menyebutkan perbedaan kecepatan berdifusi mangsa dan pemangsa diperlukan untuk memunculkan ketidakstabilan Turing pada model mangsa pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II namun tidak menjadi kondisi yang cukup. Peng & Liu (2016) mengkaji kemunculan ketidakstabilan Turing dengan berfokus pada pengaruh kemampuan lingkungan untuk melindungi populasi pemangsa. Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik mengkaji fenomena ketidakstabilan Turing pada model mangsa-pemangsa Leslie-Gower yang dituangkan dalam skripsi dengan judul:

“ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN FAKTOR DIFUSI DAN UPAYA PEMANENAN”.

I.2 Rumusan masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka rumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimana menganalisa kemunculan fenomena ketidakstabilan Turing pada model mangsa-pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II yang disertai dengan upaya pemanenan konstan.

I.3 Batasan Masalah

Model yang digunakan pada penelitian ini adalah model mangsa-pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II dan upaya pemanenan konstan serta faktor difusi.

I.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Menentukan kondisi stabil pada model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II yang disertai dengan upaya pemanenan tanpa adanya pengaruh difusi.
2. Menganalisis kondisi ketidakstabilan pada model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II yang disertai dengan upaya pemanenan yang diakibatkan oleh adanya difusi.
3. Melakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis yang diperoleh.

I.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat menjadi salah satu bahan kajian pustaka tentang pemodelan matematika pada ekologi khususnya pemodelan matematika dengan interaksi predasi dan difusi.

I.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab I dibahas mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab II membahas model interaksi mangsa-pemangsa, sistem persamaan differensial, kestabilan sistem linear, kestabilan sistem tak linear, kriteria kestabilan, persamaan reaksi-difusi, ketidakstabilan Turing dan metode beda hingga.

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab III membahas hasil utama dari tugas akhir yang memuat kondisi cukup untuk sistem stabil dan memunculkan ketidakstabilan Turing serta simulasi numerik.

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini memuat kesimpulan dan saran yang diperoleh pada hasil dan pembahasan.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

II.1 *State of the art*

State of the art dari penelitian ini diambil dari beberapa penelitian sebelumnya sebagai panduan atau contoh. Panduan yang diambil berupa pengaruh pemanenan dalam dinamika perilaku model mangsa-pemangsa Leslie-Gower dan fenomena ketidakstabilan Turing pada beberapa model mangsa-pemangsa. Pengaruh pemanenan terhadap dinamika perilaku sistem mangsa-pemangsa Leslie-Gower dibahas oleh Chen (2011). Sistem mangsa-pemangsa yang diamati mempertimbangkan fungsi respon tipe I dan upaya pemanenan konstan. Chen dkk. (2011) memperlihatan kepadatan populasi mangsa meningkat saat pemanenan pada populasi pemangsa meningkat namun menurunkan kepadatan populasi pemangsa pada saat yang bersamaan.

Model mangsa-pemangsa dengan mempertimbangkan penyebaran populasi dikaji oleh Li dkk. (2013). Pada penelitian tersebut diperoleh sebuah kondisi pada sistem sehingga mengalami ketidakstabilan yang diakibatkan oleh difusi atau disebut dengan ketidakstabilan Turing. Solusi periodik dari sistem yang dikaji menjadi tidak stabil setelah penyebaran populasi dipertimbangkan. Penelitian yang membahas tentang mangsa-pemangsa diantaranya oleh Toaha (2009), Asrun (2013), Yuliani (2014), Awal (2015), Rahmat (2017), Ikbal (2017), Pratama (2018), Agus (2018), Siddik (2018), Yusrianto dkk. (2019). Para peneliti tersebut meneliti kestabilan pada model mangsa-pemangsa yang telah dimodifikasi. Modifikasi yang dimaksud adalah menambahkan beberapa asumsi dengan pertimbangan seperti fungsi respon, pemanenan, tahapan struktur, waktu tunda, kehadiran pebangkai, dan area reservasi.

Peng dan Liu (2016) mengkaji perluasan dari model yang dikaji Li dkk. (2013). Peng dan Liu (2016) mempertimbangkan perlindungan lingkungan terhadap populasi pemangsa yang tidak dipertimbangkan dalam Li dkk. (2013). Kurva pengaruh perlindungan lingkungan pemangsa untuk memunculkan ketidakstabilan Turing ditampilkan. Model mangsa-pemangsa dengan fungsi respon Crowley-Martin dan pemanenan tipe Michaelis-Menten dikaji dalam Gao dkk. (2019) untuk melihat dampak waktu tunda pada dinamika difusi model mangsa-pemangsa. Difusi disarankan sebagai salah satu faktor yang perlu dipertimbangkan dalam membangun model mangsa-pemangsa karena dapat mengakibatkan ketidakstabilan Turing. Ramadhani (2021) menganalisis ketidakstabilan Turing pada model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pola spasial yang terbentuk dari model mangsa-pemangsa. Suaib (2019) memberikan simulasi numerik pembentukan pola penyebaran plankton menggunakan metode beda hingga semi-implisit.

Kondisi yang cukup untuk memunculkan ketidakstabilan Turing juga dibahas oleh Souna dkk. (2020. Fungsi respon yang digunakan mengasumsikan bahwa banyaknya konsumsi mangsa oleh pemangsa akan sebanding dengan kepadatan mangsa disekitar batas kawanan. Souna dkk. (2020) mempertimbangkan pemanenan kuadratik pada pemangsa. Pemanenan pada populasi pemangsa memberikan pengaruh positif terhadap kesetimbangan kepadatan mangsa yang berarti kepadatan mangsa meningkat saat pemanenan pemangsa ditingkatkan. Daerah yang memuat kondisi kestabilan Turing juga ditampilkan oleh Souna dkk. (2020)

Pada penelitian ini penulis akan mengkaji fenomena ketidakstabilan Turing pada model mangsa-pemangsa Leslie-Gower sesuai dengan model yang dalam Peng dan Liu (2016) dengan penambahan upaya pemanenan konstan terhadap populasi pemangsa. Penulis akan memperlihatkan kondisi pemanenan yang sesuai untuk memunculkan fenomena Ketidakstabilan Turing pada Model mangsa-pemangsa Leslie-Gower. Selain itu pola spasial yang terbentuk akibat interaksi antara mangsa dan pemangsa serta difusi keduanya melalui simulasi numerik.

II.2 Interaksi antar Mangsa-Pemangsa

Organisme hidup di alam tidak berdiri sendiri-sendiri atau tidak hidup sendiri-sendiri, melainkan menjadi satu kumpulan individu-individu yang menempati suatu tempat tertentu, sehingga antarindividu akan terjadi interaksi.

Interaksi yang terjadi dapat berupa interaksi antarindividu dari spesies yang sama atau interaksi antarindividu dari spesies yang berbeda (Odum, 1983).

Interaksi yang terjadi antarspesies anggota populasi akan memberikan pengaruh terhadap kondisi populasi mengingat keaktifan atau tindakan individu dapat memengaruhi kecepatan pertumbuhan ataupun kehidupan populasi. Menurut Odum (1983), setiap anggota populasi dapat memakan anggota-anggota populasi lainnya, bersaing terhadap makanan, mengeluarkan kotoran yang merugikan lainnya, dapat saling membunuh, dan interaksi tersebut dapat searah atau dua arah (timbal balik). Dari sisi pertumbuhan atau kehidupan populasi, interaksi antarspesies anggota populasi dapat merupakan interaksi yang positif, negatif, atau nol.

Predasi atau pemangsaan adalah salah satu bentuk interaksi antar spesies anggota populasi. Pemangsaan adalah interaksi antar dua atau lebih spesies dimana salah satu pihak (mangsa atau organisme yang dimangsa) dirugikan, sedangkan pihak lainnya (pemangsa atau organisme yang memangsa) mendapat untung. Pada tipe interaksi pemangsaan, pemangsa membunuh mangsa untuk dimangsa, sehingga secara langsung pemangsa dapat hidup karena ada hewan yang dimangsa sebab kebutuhan hidupnya diperoleh dengan cara memangsa hewan mangsaan. Adanya asosiasi antara mangsa dan pemangsa menunjukkan bahwa populasi mangsa ditentukan oleh besar kecilnya populasi pemangsa, dan populasi pemangsa ditentukan oleh ketersedian mangsa (Indriyanto, 2006).

Pola hubungan antara mangsa dengan pemangsa telah dirumuskan oleh Lotka-Volterra (1925). Berdasarkan hipotesis Lotka-Volterra bahwa pada saat populasi pemangsa meningkat, maka populasi mangsa menurun hingga pada suatu titik tertentu kemudian kembali lagi dan menghasilkan suatu isolasi mangsa dan pemangsa. Lotka-Volterra (1925) mengusulkan sebuah model berbentuk sistem persamaan differensial (Brauer & Castillo-chavez, 2010):

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dT} &= aH - bPH, \\ \frac{dP}{dT} &= -cH + dPH, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dimana H dan P adalah masing-masing kepadatan populasi mangsa dan pemangsa pada waktu T. a adalah rasio pertumbuhan intrinsik mangsa tanpa kehadiran pemangsa, c adalah rasio berkurangnya pemangsa tanpa kehadiran mangsa yang mendukung kehidupannya, b menggambarkan rasio tingkat konsumsi mangsa, dan d menggambarkan tingkat konsumsi mangsa yang menghasilkan pemangsa.

Dalam persamaan Lotka-Volterra, populasi mangsa tumbuh tanpa batas tanpa kehadiran populasi pemangsa . Untuk memperbaiki asumsi ini karena sangat jauh dari keadaan yang sebenarnya, kapasitas batas K ditambahkan dalam sistem. Leslie pada tahun 1948 mengajukan sebuah model mangsa-pemangsa yang selanjutnya dikenal sebagai model Leslie-Gower, model ini mempertimbangkan pertumbuhan logistik pada pemangsa yang sebanding dengan kepadatan mangsa. Model Leslie-Gower dinyatakan dalam bentuk sistem sebagai berikut (Toaha & Azis, 2018):

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dT} &= (a_1 - b_1 H)H - \emptyset H, \\ \frac{dP}{dT} &= \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H}\right)P, \end{aligned} \tag{2.2}$$

dimana $\emptyset$ adalah fungsi respon yang mengukur kemampuan pemangsa dalam mengkonsumsi mangsa. a_1 dan a_2 masing-masing menggambarkan rasio pertumbuhan intrinsik dari mangsa dan pemangsa. b_1 mengukur kekuatan kompetisi antara individu dalam populasi mangsa, c_2 mengukur kuantitas makanan yang disediakan mangsa dan diubah menjadi kelahiran pemangsa.

Holling mengajukan tiga tipe fungsi respon yaitu tipe I, tipe II dan tipe III. Fungsi respon tipe II menggambarkan tingkat konsumsi pemangsa yang menurun secara monoton saat kepadatan mangsa meningkat hingga akhirnya mengalami kejenuhan pada kondisi kepadatan mangsa tertentu (Dawes & Souza, 2013). Fungsi ini digambarkan dalam persamaan sebagai berikut (Toaha & Azis, 2018):

$$\emptyset = \frac{c_1 P}{H + e_1}, \tag{2.3}$$

dimana c_1 adalah nilai maksimal per perkapita penurunan kepadatan populasi mangsa yang dapat dicapai.

Aziz-Alaoui & Okiye (2003) menambahkan parameter e_2 sebagai daya dukung lingkungan terhadap populasi pemangsa. Fungsi respon Holling tipe II akan digunakan dalam model mangsa-pemangsa Leslie-Gower dengan mensubtitusi Persamaan (2.3) ke Persamaan (2.2). Model mangsa-pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II seperti yang digunakan dalam (Aziz-Alaoui & Daher Okiye, 2003; Peng & Liu, 2016) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dT} &= \left(a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + e_1}\right) H, \\ \frac{dP}{dT} &= \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H + e_2}\right) P. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Atas dasar pengembangan eksploitasi sumber daya hayati secara rasional, beberapa peneliti mempertimbangkan pemanenan dalam model mangsa-pemangsa. Pemanenan tidak hanya memberi pengaruh berupa keuntungan eksplotasi pada sisi manusia namun juga memberi pengaruh dalam dinamika sistem mangsa-pemangsa. Toaha & Azis (2018) mempertimbangkan optimalisasi upaya pemanenan konstan pada model mangsa-pemangsa Leslie Gower dengan fungsi respon Holling tipe II dengan memberikan kondisi tertentu agar sistem tetap stabil namun memberi hasil pemanenan yang tinggi.

Pemanenan dapat dibagi menjadi ke dalam tiga tipe yaitu pemanenan konstan, pemanenan proporsional dan pemanenan taklinier (Souna dkk., 2020). Pada pemanenan konstan, saat jumlah kepadatan populasi meningkat maka jumlah spesies yang dipanen meningkat secara linier. Pemanenan populasi pemangsa berdampak pada keberedaan spesies, dimana untuk persaingan rendah akan berdampak negatif terhadap kepadatan populasi mangsa dan positif terhadap kepadatan populasi pemangsa serta berlaku sebaliknya untuk persaingan yang besar dalam populasi pemangsa. Pada skripsi ini, penulis akan membahas upaya pemamenan konstan pada populasi pemangsa. Saat upaya pemanenan konstan dipertimbangkan dalam model mangsa-pemangsa Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II akan membentuk sistem sebagai berikut:

$$\frac{dH}{dT} = \left(a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + e_1}\right) H,$$
$$\frac{dP}{dT} = \left(a_2 - \frac{c_2 P}{H + e_2}\right) P - hP, \quad (2.5)$$

dimana h adalah usaha pemanenan konstan terhadap pemangsa.

II.3 Sistem Persamaan Differensial

Persamaan differensial adalah persamaan yang menghubungkan turunan dari fungsi yang tidak diketahui, fungsi itu sendiri yang digunakan untuk mendefinisikan fungsi dan konstanta. Jika fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu variable, persamaan differensial disebut persamaan differensial biasa. Jika fungsi bergantung pada dua atau lebih variabel disebut persamaan differensial parsial (Boyce & DiPrima, 2009).

Persamaan differensial dapat juga dibedakan atas persamaan differensial linear dan persamaan differensial taklinear. Fungsi dari turunan ini menentukan jenis persamaanya. Fungsi yang linear pada persamaan differensial disebut dengan persamaan differensial linear dan sebaliknya persamanaan differensial yang memuat fungsi taklinear disebut dengan persamaan differensial taklinear. Beberapa pembagian persamaan differensial juga bergantung pada banyaknya fungsi yang termuat. Dua atau lebih persamaan differensial yang termuat dan saling terhubung membentuk sebuah sistem yang disebut sebagai sistem persamaan differensial.

Fenomena perubahan yang diakibatkan oleh variabel waktu dan posisi sekaligus, model matematikanya berbentuk persamaan differensial parsial. Variabel waktu dikaitkan dengan syarat awal dan variabel posisi dikaitkan dengan syarat batas (Kartono, 2012). Secara umum syarat batas ada persamaan differensial parsial dapat dibagai menjadi 3 macam kategori yaitu (Kusuma, 2018):

1. Persoalan Dirichlet, ditandai dengan keseluruhan syarat batas yang berupa fungsi yang dicari dalam persamaan differensial parsialnya
2. Persoalan Neumann, masalah syarat batas berupa turunan dari fungsi yang dicari

3. Persoalan Robin, masalah syarat batas yang bercampur antara syarat batas Dirichlet dan syarat batas Neumann.

Model mangsa-pemangsa pada persamaan (2.5) berbentuk persamaan differensial biasa, penambahan faktor difusi persamaan tersebut menjadi persamaan differensial parsial. Kedua persamaan differensial pada persamaan (2.5) membentuk sebuah sistem takliner antara mangsa dan pemangsanya.

II.3.1 Sistem Linier

Sebuah sistem $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$, dimana $\boldsymbol{x}$ adalah sebuah vektor dalam $\mathbb{R}^n$ disebut sebagai sistem linier berdimensi n, jika $\boldsymbol{X}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ adalah sebuah pemetaan linier. Jika pemetaan $\boldsymbol{X}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dimana $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$, adalah linier, maka $\boldsymbol{X}$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks,

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ X_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \tag{2.7}$$

dimana A adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$. Tiap komponen X_i, $i = 1, \dots, n$ dari $\dot{\boldsymbol{x}}$ adalah fungsi linear terhadap variabel $x_1, \dots, x_n$ (Arrowsmith & Place, 1992).

Definisi 1 (Anton & Rorres, 2004) *Jika A adalah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$ yang dapat dituliskan dalam bentuk,*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{2.8}$$

untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Nilai eigen λ dari matriks A diperoleh dengan terlebih dahulu menuliskan Persamaan (2.8) menjadi $A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$ atau dapat ditulis

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{2.9}$$

Nilai eigen λ diperoleh jika terdapat solusi taknol dari Persamaan (2.9). Persamaan (2.9) memiliki solusi taknol jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) disebut persamaan karakteristik dari matriks A. Apabila diperluas lagi, persamaan (2.10) adalah sebuah perluasan polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks A. Polinomial karakteristik $p(\lambda)$ dari sebuah matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n. \tag{2.11}$$

Persamaan karakteristik (2.10) menjadi

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \tag{2.12}$$

yang memiliki sebanyak n solusi, sehingga matriks $n \times n$ memilki sebanyak n nilai eigen.

II.3.2 Sistem Tak Linier

Diberikan suatu sistem persamaan differensial tak linier,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Definisi 2 (Perko, 2001) *Titik* $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ *disebut sebagai titik kesetimbangan atau titik kritis dari sistem (2.13) jika* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0}$.

Teorema 1 (Perko, 2001) *Jika* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *adalah fungsi yang dapat diturunkan di* $\boldsymbol{x_0}$, *maka turunan parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, \ldots, n$, *ada pada* $\boldsymbol{x_0}$ *untuk semua* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x_j}}(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x_j}. \tag{2.14}$$

Jadi, jika f adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka turunan Df diberikan dengan matriks Jacobian $n \times n$,

$$D\boldsymbol{f} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f_i}}{\partial \boldsymbol{x_j}}\right]. \tag{2.15}$$

Perilaku sistem pada Persamaan (2.13) disekitar titik kesetimbangan x_0 dapat diketahui dengan melinierkan sistem pada Persamaan (2.13) disekitar titik kesetimbangan x_0. Hasil linierisasi sistem pada Persamaan (2.16) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \qquad (2.16)$$

dengan matriks $A = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ adalah sebuah matriks Jacobian. Linierisasi adalah proses membawa sistem tak linier ke sistem linier.

Selanjutnya sistem linier pada Persamaan (2.16) dianalisis nilai eigennya. Hubungan nilai eigen dan jenis kestabilan sistem pada Persamaan (2.13) disekitar titik kesetimbangan $\boldsymbol{x_0}$, berlaku sebagai berikut:

1. Stabil, jika memenuhi kriteria berikut:
   - Setiap nilai eigen riil adalah negatif ($\lambda_i \leq 0$) untuk setiap i.
   - Setiap komponen riil dari nilai eigen kompleks adalah negatif yaitu ($\lambda_i \leq 0$) untuk setiap i dengan $Re(\lambda_i)$ menyatakan bagian riil dari nilai eigen λ_i.
2. Tidak stabil, jika memenuhi kriteria berikut:
   - Terdapat nilai eigen riil adalah positif ($\lambda_i > 0$).
   - Terdapat komponen riil dari nilai eigen kompleks adalah positif yaitu ($\lambda_i > 0$) dengan $Re(\lambda_i)$ menyatakan bagian riil dari nilai eigen λ_i.

II.4 Persamaan Reaksi-Difusi

Persamaan reaksi-difusi yang terdiri atas dua suku yaitu suku reaksi dan suku difusi. Dalam ekologi persamaan reaksi-difusi digunakan untuk menggambarkan penyebaran dan reaksi antara satu atau lebih populasi. Secara sederhana dalam satu dimensi, misalkan $u(x, t)$ adalah konsentrasi dari beberapa spesies yang ditempatkan, maka perubahan konsentrasi dapat dinyatakan dalam (Murray, 2003),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2.17)$$

dimana D_u adalah koefisien yang dihubungkan dengan penyebaran dari u dan $f(u)$ adalah fungsi yang menggambarkan dinamika dari u yang bergantung pada perubahan konsentrasi.

Misalkan diberikan sebuah sistem persamaan differensial tak linier:

$$\begin{aligned} u_t &= f(u,v), \\ v_t &= g(u,v), \end{aligned} \tag{2.18}$$

dengan titik kesetimbangan (u_0, v_0). Hasil linierisasi dari persamaan (2.18) diperoleh

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix}_{u_0 v_0} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

dimana f_u dan f_v masing-masing adalah turunan $f(u,v)$ terhadap u dan v, g_u dan g_v masing-masing turunan $g(u,v)$ terhadap u dan v. Persamaan karakteristik dari Persamaan (2.19) diperoleh

$$\lambda^2 - (f_u + g_v)\lambda + f_u g_v - f_v g_u = 0. \tag{2.20}$$

Sifat kestabilan pada Persamaan (2.18) disekitar titik kesetimbangan (u_0, v_0) bergantung dengan nilai λ pada Persamaan (2.20). Sistem stabil saat solusi dari Persamaan (2.20) bernilai negatif atau Re $(\lambda_{1,2}) < 0$. Kondisi dari Re $\left(\lambda_{1,2}\right) < 0$ diperoleh jika

$$f_u + g_v < 0 \ \& \ f_u g_v - f_v g_u > 0. \tag{2.21}$$

Konsep difusi dapat dipandang secara sederhana sebagai kecenderungan sekelompok partikel yang awalnya terkonsentrasi di suatu titik untuk menyebar dalam waktu, secara bertahap menempati area yang semakin luas di sekitar titik awal. Di sini istilah "partikel" tidak hanya mengacu pada partikel fisik, tetapi juga individu populasi biologis atau unit teridentifikasi lainnya. Difusi dapat dikaitkan sebagai gerak tak beraturan secara mikroskopis dari setiap partikel namun menimbulkan keteraturan gerakan secara makroskopis.

Adolf Fick menggambarkan difusi secara matematika atau dikenal dengan hukum Fick. Menurut hukum Fick pertama, jumlah perpindahan materi kearah x

melintasi satuan luas dalam satuan waktu, yaitu flux J_x, sebanding dengan gradient konsentrasi materi, yaitu

$$J_x = -D\frac{\partial C}{\partial x}, \tag{2.22}$$

dimana D adalah konstanta difusi. Kombinasi antara hukum Fick pertama dan hukum konversi massa menghasilkan suatu persamaan yang mendeskripsikan proses difusi, yaitu

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \tag{2.23}$$

Persamaan reaksi pada persamaan (2.18), jika digabungkan dengan sebuah persamaan difusi satu dimensi maka akan membentuk persamaan reaksi-difusi yang dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u,v) + d_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u,v) + d_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

II.5 Ketidakstabilan Turing

Sistem reaksi-difusi menunjukkan ketidakstabilan yang didorong oleh difusi atau disebut ketidakstabilan Turing. Ketidakstabilan Turing terjadi jika titik kesetimbangan homogen stabil untuk gangguan kecil tanpa adanya difusi tetapi tidak stabil untuk gangguan spasial kecil ketika difusi hadir. Turing menjelaskan bagaimana gangguan heterogen amplitudo kecil dari titik kesetimbangan homogen yang stabil dari sistem reaksi-difusi dapat menyebabkan ketidakstabilan, yang dikenal sebagai ketidakstabilan difusi, dan menghasilkan pola Turing. Kimura (2014) memberikan kondisi yang diperlukan untuk mendapatkan ketidakstabilan Turing yaitu sistem dalam keadaan stabil ketika bereaksi tanpa adanya faktor difusi dan sistem tidak stabil saat terjadi penambahan faktor difusi. Camara & Aziz (2009) menyampaikan bahwa syarat perlu terjadinya difusi pada sistem mangsa-pemangsa dengan faktor difusi yaitu pemangsa berdifusi lebih cepat daripada mangsanya. Perbedaan koefisien difusi adalah perlu namun tidak cukup untuk terbentuknya ketidakstabilan Turing.

Tinjau kembali Persamaan (2.24). Linierisasi dilakukan disekitar titik kesetimbangan (u_0, v_0) untuk mengetahui jenis kestabilan sistem dengan faktor difusi. Misalkan $\boldsymbol{w} = [u\ v]^T$, dengan

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = A\boldsymbol{w} + D\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial x^2}, \tag{2.25}$$

dimana

$$D = \begin{bmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)}. \tag{2.27}$$

Misalkan $\boldsymbol{W}(x)$ solusi tak bergantung pada waktu yang memenuhi,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial x^2} + k^2 \boldsymbol{W} = 0, \tag{2.28}$$

dengan syarat batas,

$$\frac{\partial W(0)}{\partial x} = \frac{\partial W(\pi)}{\partial x} = 0, \tag{2.29}$$

dimana k adalah nilai eigen. $\mathbf{W_k}(x)$ merupakan fungsi eigen yang bergantung pada nilai k. Solusi umum $\mathbf{w}(x,t)$ untuk Persamaan (2.25) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{w}(x,t) = \sum_k C_k e^{\lambda t} \boldsymbol{W_k}(x). \tag{2.30}$$

Subtitusi solusi umum pada Persamaan (2.30) dan Persamaan (2.28) ke Persamaan (2.25) maka diperoleh,

$$\lambda \boldsymbol{W}_k = A\boldsymbol{W}_k - Dk^2 \boldsymbol{W}_k. \tag{2.31}$$

Solusi taknol dari Persamaan (2.31) diperoleh jika dan hanya jika:

$$|\lambda I - A + Dk^2| = 0. \tag{2.32}$$

Substitusi I, A dan D pada Persamaan (2.26) dan (2.27) sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\Delta_k = \lambda^2 - T_k\lambda + D_k = 0, \tag{2.33}$$

dimana

$$T_k = f_u + g_v - (d_1 + d_2)k^2, \tag{2.34}$$

$$D_k = d_1 d_2 k^4 + (d_2 f_u - d_1 g_v)k^2 + (f_u g_v - f_v g_u). \tag{2.35}$$

Persamaan (2.24) disekitar titik kesetimbangan (u_0, v_0) menjadi tidak stabil jika $T_k > 0$ atau $D_k < 0$.

II.6 Metode Beda Hingga

Deret Taylor merupakan representasi dari fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Persamaan deret Taylor dari $y = f(x)$ di sekitar (x_0) adalah sebagai berikut (Ribal, 2008):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots. \tag{2.36}$$

Secara umum Persamaan (2.36) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{2.37}$$

dengan $f(x_0)$ menyatakan nilai fungsi f dititik x_0, $n!$ melambangkan faktorial di n dan $f^{(n)}(x_0)$ melambangkan nilai dari turunan ke-n fungsi f di x_0.

Jika diberikan sebuah fungsi $f(x,t)$ yang kontinu, maka $f(x + \Delta x, t)$ dapat diekspansi dalam sebuah deret Taylor disekitar titik x sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t) &= f(x,t) + \Delta x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} + \cdots \\ &= f(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!}\frac{\partial^n f(x,t)}{\partial x^n}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Dengan memanfaatkan ekspansi deret Taylor pada Persamaan (2.36), diskritisasi persamaan differensial parsial dibagi menjadi tiga skema beda hingga yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*) dan beda pusat (*central difference*).

Dari Persamaan (2.38), diperoleh:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} + \cdots. \tag{2.39}$$

Jika suku-suku yang memuat faktor Δx atau yang lebih tinggi dijumlahkan dan dinotasikan dengan $O(\Delta x)$, maka $\frac{\partial f}{\partial x}$ dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x} + O(\Delta x). \tag{2.40}$$

Persamaan (2.40) adalah sebuah hampiran turunan parsial orde pertama fungsi f terhadap variabel bebas x. Jika indeks i digunakan untuk menggambarkan titik-titik diskrit dalam sumbu x, dan indeks n digunakan untuk menggambarkan titik-titik diskrit dalam sumbu t, maka Persamaan (2.40) dapat dituliskan sebagai:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}. \tag{2.41}$$

Persamaan (2.41) disebut sebagai pendekatan beda maju dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dengan orde Δx. Pertimbangkan ekspansi deret Taylor pada $f(x-\Delta x)$ di x, yaitu

$$\begin{aligned} f(x-\Delta x,t) = f(x) - (\Delta x)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \\ -\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} + \cdots. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Penyelesaian untuk $\frac{\partial f}{\partial x}$ adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \tag{2.43}$$

atau

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}. \tag{2.44}$$

Persamaan (2.44) merupakan hampiran beda mundur $\frac{\partial f}{\partial x}$ orde Δx.

Lebih lanjut dengan mempertimbangkan kembali ekspansi deret Taylor pada Persamaan (2.38) dan Persamaan (2.42), dengan mengurangkan Persamaan (2.38) dengan Persamaan (2.42) diperoleh:

$$f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)=2(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial f^3 f}{\partial x^3}+\cdots. \tag{2.45}$$

Penyelesaian untuk $\frac{\partial f}{\partial x}$ adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}+O(\Delta x)^2, \tag{2.46}$$

atau

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n=\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}. \tag{2.47}$$

Persamaan (2.47) dikenal dengan hampiran beda pusat dengan orde $(\Delta x)^2$.

Adapun hampiran turunan parsial orde dua terhadap x untuk beda pusat dapat diperoleh melalui penjumlahan Persamaan (2.38) dan Persamaan (2.42), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}=\frac{f(x+\Delta x,t)-2f(x,t)+f(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2, \tag{2.48}$$

atau

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{f_i^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}. \tag{2.49}$$

Salah satu metode beda hingga eksplisit untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial adalah FCTS. Metode FTCS (*Forward Time Center Space*) merupakan metode beda hingga eksplisit yang menghampiri turunan terhadap waktu dengan skema beda maju dan menghampiri turunan terhadap ruang dengan skema beda pusat. Orde dari skema FTCS adalah $[(\Delta t),(\Delta x)^2]$. Persamaan (2.24) didiskritisasi menggunakan FCTS menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}&=f(u_i^n,v_i^n)+\frac{v_i^n-2v_i^n+v_{i-1}^n}{(\Delta x)^2},\\ \frac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}&=g(u_i^n,v_i^n)+\frac{v_i^n-2v_i^n+v_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}.\end{aligned} \tag{2.50}$$