SKRIPSI

ESTIMASI PARAMETER MODEL RANCANGAN ACAK LENGKAP TIGA FAKTOR DENGAN METODE *ROBUST* MM

Disusun dan diajukan oleh

NURKAMALIA

H051171008

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

ESTIMASI PARAMETER MODEL RANCANGAN ACAK LENGKAP TIGA FAKTOR DENGAN METODE *ROBUST* MM

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

NURKAMALIA

H051171008

PROGRAM STUDI STATISTIKA DEPARTEMEN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2021

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Nurkamalia
NIM	: H051171008
Program Studi	: Statistika
Jenjang	: Sarjana (S1)

Menyatakan dengan ini bahwa karya tulis saya yang berjudul

ESTIMASI PARAMETER MODEL RANCANGAN ACAK LENGKAP TIGA FAKTOR DENGAN METODE *ROBUST* MM

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan skripsi ini hasil karya orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar, 19 Agustus 2021

SEPULUH RIBU RUPIAH
METERAI TEMPEL
0F7AJX346489687

NURKAMALIA

NIM. H051171008

ESTIMASI PARAMETER MODEL RANCANGAN ACAK LENGKAP TIGA FAKTOR DENGAN METODE *ROBUST* MM

Disetujui Oleh:

Pembimbing Utama,	**Pembimbing Pertama,**
Anisa, S.Si., M.Si.	**Dra. Nasrah Sirajang, M.Si.**
NIP. 19730227 199802 2001	**NIP. 19650519 199303 2002**

Ketua Departemen Statistika

Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.

NIP. 19720117 199703 2002

Pada Tanggal : 19 Agustus 2021

LEMBAR PENGESAHAN

ESTIMASI PARAMETER MODEL RANCANGAN ACAK LENGKAP TIGA FAKTOR DENGAN METODE *ROBUST* MM

Disusun dan diajukan oleh

NURKAMALIA

H051171008

Telah dipertahankan dihadapan Panitia Ujian yang dibentuk dalam rangka Penyelesaian Studi Program Studi Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

pada tanggal 19 Agustus 2021

dan dinyatakan telah memenuhi syarat kelulusan.

Menyetujui,

Pembimbing Utama,	Pembimbing Pertama,
Anisa, S.Si., M.Si.	**Dra. Nasrah Sirajang, M.Si.**
NIP. 19730227 199802 2001	**NIP. 19650519 199303 2002**

Ketua Departemen Statistika

Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.

NIP. 19720117 199703 2002

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.

Alhamdulillahi robbil'alamin, Puji syukur kepada Allah SWT atas segala limpahan rahmat, nikmat, dan hidayah yang diberikan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Estimasi Parameter Model Rancangan Acak Lengkap Tiga Faktor dengan Metode *Robust* MM "** sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Statistika Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Salam dan sholawat *InsyaAllah* senantiasa tercurah kepada **Nabi Muhammad *Shallallahu'alaihi Wasallam***, sang kekasih tercinta yang telah memberikan petunjuk cinta dan kebenaran dalam kehidupan.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis telah melewati perjuangan panjang dan pengorbanan yang tidak sedikit. Namun berkat rahmat dan izin-Nya serta dukungan dari berbagai pihak yang turut membantu baik moril maupun material sehingga akhirnya tugas akhir ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang setinggi-tingginya dan penghargaan yang tak terhingga kepada Ayahanda ***Drs. Muh. Amin*** dan Ibunda tercinta ***Sitti Aminah, S.Pd.,*** yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan dengan limpahan cinta dan kasih sayang serta telah memberikan dukungan dan doa kepada penulis yang tidak terhenti. Dan kakak tersayang ***Abdul Hamid, S.Pd. I., M.Ag., Nurlatifa Amilda, A.Ma. Pust****., serta* ***Nurlaelah S.Pd.,*** yang telah memberikan dukungan baik secara materil maupun moril dan menjadi motivasi bagi penulis.

Ucapan terima kasih yang juga penulis ucapkan kepada:

1. **Ibu Prof. Dr. Dwia Aries Tina Palubuhu, MA,** selaku Rektor Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
2. **Bapak Dr. Eng. Amiruddin,** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin beserta seluruh jajarannya.
3. **Ibu Dr. Nurtiti Sunusi, S.Si., M.Si.,** selaku Ketua Departemen Statistika yang telah seperti orang tua sendiri. Segenap dosen pengajar dan staf

Departemen Statistika yang telah membekali ilmu dan kemudahan kepada penulis dalam berbagai hal selama menjadi mahasiswa di Departemen Statistika.

4. **Ibu Anisa, S.Si., M.Si.,** selaku Pembimbing Utama penulis yang telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk memberikan arahan, pengetahuan dan bimbingan kepada penulis mulai dari awal hingga selesainya penulisan tugas akhir ini. **Ibu Dra. Nasrah Sirajang, M.Si.,** selaku Pembimbing Pertama penulis yang telah meluangkan waktunya ditengah kesibukan untuk memberikan arahan bagi penulis.
5. **Bapak Andi Kresna Jaya, S.Si., M.Si.,** selaku penguji sekaligus penasehat akademik penulis yang telah meluangkan waktu dan pemikirannya untuk memberikan arahan dan saran sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. **Bapak Siswanto, S.Si., M.Si.,** selaku penguji yang telah memberikan saran dan pertanyaan yang tak terhingga nilainya yang bersifat membangun sehingga penulis dapat menuntaskan skripsi ini.
6. Kepada keluarga tercinta **"Wahid Family",** terima kasih telah memberikan semangat, dorongan, serta dukungan baik secara moril maupun materil. Dan yang pasti selalu mendoakan penulis, sehingga bisa melewati drama skripsi ini.
7. Spesial untuk orang terdekat penulis, **Fitri** yang telah menjadi sahabat bahkan saudari penulis dan senantiasa mendengarkan curhatan, memberikan semangat, dorongan dan motivasi dalam setiap kondisi. Terima kasih atas segala pengorbanan, kebersamaan, suka dan duka dalam berjuang menjalani kehidupan dan pendidikan di Departemen Statistika.
8. Spesial untuk sahabat seperjuangan **"BONE SQUAD" Riska Rasyid, Fitri, dan Musdalifah** yang telah menjadi keluarga, sahabat sejak awal perkuliahan dan senantiasa mendengarkan curhatan, memberikan semangat, dan motivasi dalam setiap keadaan sehingga penulis bisa mendapatkan lebih banyak pelajaran hidup.
9. Sahabat seperjuangan yang selalu menemani dibangku perkuliahan **Siti Ihza Arsella, Aqilah Salsabila Rahman, Risnawati Azali, dan Nur Alya**

Tussa'ada, Terima kasih atas kajian malamnya, kebahagiaan, kebersamaan, kesedihan, dan kebaikannya selama masa perkuliahan.

10. Teman-teman **Statistika 2017**, terima kasih atas kebersamaan, suka dan duka selama menjalani pendidikan di Dapartemen Statistika.
11. Keluarga besar **DISKRIT 2017**, terima kasih telah memberikan pelajaran yang berharga dan arti kebersamaan selama ini kepada penulis. Pengalaman yang berharga telah penulis dapatkan dari teman-teman selama berproses.
12. **Keluarga Mahasiswa FMIPA Unhas** terkhusus anggota keluarga **Himatika FMIPA Unhas** dan **Himastat FMIPA Unhas**, terima kasih atas ilmu yang mungkin tidak bisa didapatkan di proses perkuliahan dan telah menjadi keluarga selama penulis kuliah di Universitas Hasanuddin.
13. Teman-teman **KKN Bone 2 Gelombang 104**, terima kasih telah membersamai penulis selama sebulan lebih, terkususnya **Nur Idayu** yang juga teman kamar penulis selama 3 tahun. Semangat dan sukses sis!.
14. Kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih setinggi-tingginya untuk segala dukungan dan partisipasi yang diberikan kepada penulis semoga bernilai ibadah di sisi **Allah SWT.**

Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan tambahan pengetahuan baru bagi para pembelajar statistika. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih banyak terdapat kekurangan. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf. Akhir kata, semoga dapat bermanfaat bagi pihak-pihak yang berkepentingan. *Aamiin Yaa Rabbal Alamin.*

Makassar, 19 Agustus 2021

Nurkamalia

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Nurkamalia
NIM	: H051171008
Program Studi	: Statistika
Departemen	: Statistika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	: Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Non eksklusif (*Non-exclusive Royalty- Free Right*)** atas tugas akhir saya yang berjudul:

"Estimasi Parameter Model Rancangan Acak Lengkap Tiga Faktor dengan Metode *Robust* MM"

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.
Dibuat di Makassar pada tanggal 19 Agustus 2021

Yang menyatakan

Nurkamalia

ABSTRAK

Saat melakukan percobaan, kerap kali ditemukan adanya kesalahan pada respon yang diamati. Hal ini dapat menyebabkan munculnya data *outlier*. Keberadaan *outlier* akan berakibat pada pengambilan kesimpulan yang tidak tepat dari hasil analisis. Oleh karena itu *outlier* perlu diatasi dengan menerapkan metode regresi *robust*. Metode *robust* yang digunakan adalah metode *robust* MM karena memiliki tingkat efisiensi dan *breakdown point* yang tinggi sehingga diperoleh estimasi yang kekar terhadap *outlier*. Metode *Robust* MM berguna untuk mendapatkan estimasi parameter pada Rancangan Acak Lengkap (RAL) tiga faktor yang diterapkan pada data rata-rata lemak abdomen ayam broiler yang mengalami *outlier* pada empat amatan. Berdasarkan hasil analisis variansi pada data yang mengandung *outlier* bahwa tidak terdapat pengaruh perbedaan umur ternak dan interaksi antara umur ternak dengan pemberian kiambang fermentasi terhadap rata-rata lemak abdomen ayam broiler. Namun, setelah *outlier* diatasi dengan mengganti data tersebut dengan data hasil estimasi yang diperoleh dari metode *Robust* MM, analisis variansi kembali dilakukan. Hasil yang diperoleh adalah terdapat pengaruh perbedaan umur ternak dan interaksi antara umur ternak dengan pemberian kiambang fermentasi terhadap rata-rata lemak abdomen ayam broiler.

Kata Kunci : Rancangan Acak Lengkap Tiga Faktor, Regresi *Robust*, *outlier*, Metode *Robust* MM, Analisis Variansi

ABSTRACT

When conducting experiments, it is often found that there are errors in the observed responses. It can cause data outliers to appear. The existence of outliers will result in inaccurate conclusions from the results of the analysis. Therefore, outliers need to be overcome by applying the robust regression method. The robust method used is the robust MM because it has a high level of efficiency and breakdown point so that a robust estimate of outliers is obtained. The Robust MM method is useful for obtaining parameter estimates in a three-factor Completely Randomized Design (CRD) which is applied to the data on average abdominal fat of broiler chickens experiencing outliers in four observations. Based on the results of analysis of variance on data containing outliers that there is no effect of differences in age of chicken and the interaction between age of chicken and feeding fermented kiambang on the average abdominal fat of broiler chickens. However, after the outliers are overcome by replacing the data with the estimated data obtained from the robust MM method, analysis of variance is carried out.The results showed that there was an effect of age of chicken and the interaction between age of chicken and feeding of fermented kiambang on the average abdominal fat of broiler chickens.

Keywords : Three-Factor Completely Randomized Design, Robust Regression, Outliers, MM Robust Method, Analysis of Variance

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Saat ini, ilmu pengetahuan mengalami perkembangan yang sangat pesat, termasuk pada bidang statistika. Statistika merupakan ilmu yang membahas terkait cara pengambilan data, penyajian data, analisis data hingga pengambilan keputusan. Statistika kerap kali digunakan sebagai metode ilmiah dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Oleh karena itu, statistika sangat dibutuhkan dalam hal pengambilan keputusan. Sebelum mengambil suatu keputusan, terlebih dahulu dilakukan proses pengumpulan data. Salah satu alternatif pengumpulan data dengan melakukan perancangan percobaan. Rancangan percobaan terbagi atas beberapa bentuk, yaitu Rancangan Acak Lengkap (RAL), Rancangan Acak Kelompok Lengkap (RAKL), Rancangan Bujur Sangkar Latin (RBSL), dan lain sebagainya (Mattjik dan Sumertajaya, 2000).

Rancangan Acak Lengkap atau *Completely Randomized Design* merupakan rancangan paling sederhana dalam suatu percobaan yang digunakan ketika kondisi unit percobaan relatif homogen. Rancangan ini menguji pengaruh dari satu faktor saja. Namun, dibeberapa percobaan kerap kali ditemukan penggunaan faktor lebih dari satu, sehingga interaksi pada faktor-faktor tersebut dapat terjadi. Percobaan ini disebut dengan percobaan faktorial. Percobaan faktorial dicirikan dengan perlakuan yang digunakan berupa kombinasi dari taraf-taraf faktor yang dicobakan (Mattjik, 2000). Rancangan faktorial dengan rancangan acak lengkap merupakan percobaan faktorial dengan rancangan dasar RAL.

Dalam perancangan percobaan, terdapat hal penting yang perlu diperhatikan terkait dengan data, yaitu keberadaan *outlier*. *Outlier* merupakan kondisi data yang menyimpang jauh dari sekumpulan data yang lain. *Outlier* terjadi apabila terdapat kesalahan entri data, penempatan perlakuan yang tidak tepat, atau adanya kesalahan pengamatan pada salah satu unit percobaan. Besarnya kesalahan akan tampak sangat nyata ketika menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT). Salah satu asumsi yang harus dipenuhi pada MKT yaitu data harus berdistribusi normal atau tidak adanya *outlier* pada pengamatan. Keberadaan *outlier* pada pengamatan mengakibatkan analisis pada data menjadi bias, sehingga memungkinkan terjadinya pengambilan kesimpulan yang tidak tepat. Oleh karena itu, keberadaan *outlier* harus diatasi.

Salah satu alternatif yang dapat digunakan untuk mengatasi *outlier* dengan menerapkan metode regresi *robust.* Regresi *robust* merupakan metode regresi yang digunakan ketika galat tidak berdistribusi normal atau terdapat beberapa *outlier* yang berpengaruh pada model (Olive, 2005). Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh Andrews (1972) untuk menganalisis data yang dipengaruhi *outlier* sehingga didapatkan model yang kekar terhadap *outlier*.

Ada beberapa bentuk estimasi pada regresi *robust*, diantaranya estimasi M (*Maximum Likelihood Type*), estimasi LMS (*Least Median of Squares*), estimasi LTS (*Least Trimmed Squares*), estimasi *S (Scale)* dan estimasi MM (*Method of Momen*). Setiap metode *robust* memiliki kelebihan dan kekurangan masing-masing. Estimasi M memiliki efisiensi yang tinggi, tetapi nilai *breakdown point* nol. Estimasi LMS, LTS, dan estimasi S memiliki *breakdown point* yang tinggi (BDP = 0.5), akan tetapi tingkat efisiensi yang rendah, sedangkan estimasi MM mempunyai efisiensi tinggi dan *breakdown point* yang tinggi pula (Ardiyanti, 2011).

Beberapa peneliti sebelumnya, telah mengkaji terkait estimasi parameter pada rancangan percobaan dengan pengamatan yang mengandung *outlier* menggunakan metode *robust*, diantaranya Siswanto (2014) mengestimasi parameter pada model faktorial RAL yang mengandung *outlier* dengan memanfaatkan sifat efisiensi pada *robust* M. Fabiola (2016) mengestimasi parameter model RAKL dengan memanfaatkan sifat pada *robust* S yang memiliki *breakdown point* yang tinggi. Masitah (2019) mengestimasi parameter pada model faktorial RAL dua faktor dengan *robust* MM. Sedangkan pada penelitian ini, penulis akan mengkaji lebih lanjut terkait penerapan metode *robust* MM pada rancangan faktorial RAL menggunakan tiga faktor. Metode ini menggabungkan sifat-sifat pada *robust* S dan *robust* M sehingga diperoleh estimasi parameter dengan efisiensi dan *breakdown point* yang tinggi. Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis menyusunnya dalam sebuah penelitian dengan judul "**Estimasi Parameter Model Rancangan Acak Lengkap Tiga Faktor dengan Metode *Robust* MM**".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana estimasi parameter model faktorial RAL tiga faktor dengan metode *robust* MM?
2. Bagaimana penerapan hasil estimasi parameter model faktorial RAL tiga faktor dengan metode *robust* MM pada data rata-rata lemak abdomen ayam broiler?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini dibatasi pada penggunaan metode *robust* MM untuk mengestimasi parameter pada model faktorial RAL dengan tiga faktor yang masing-masing faktor $a = 2$ taraf, faktor $b = 3$ taraf, faktor $c = 3$ taraf dan ulangan sebanyak 3 kali yang diilustrasikan mengalami *outlier* pada beberapa amatan. Pada penelitian ini diasumsikan menggunakan model tetap.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Mendapatkan estimasi parameter model faktorial RAL tiga faktor dengan metode *robust* MM.
2. Menerapkan hasil estimasi parameter model faktorial RAL tiga faktor dengan metode *robust* MM pada data rata-rata lemak abdomen ayam broiler.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat kepada berbagai pihak sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan dan memperluas wawasan terkait estimasi parameter model faktorial RAL pada data yang mengandung *outlier* dengan metode *robust* MM.
2. Sebagai bahan pertimbangan menggunakan *robust* MM dalam mengatasi *outlier* pada perancangan percobaan.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Percobaan Faktorial Rancangan Acak Lengkap dengan Tiga Faktor

Percobaan faktorial merupakan suatu percobaan yang tiap-tiap perlakuannya pada faktor tertentu disilangkan atau dikombinasikan dengan keseluruhan perlakuan pada tiap faktor lain pada percobaan itu (Sudjana, 2002). Percobaan faktorial dapat diterapkan pada keseluruhan unit percobaan jika kondisinya relatif homogen. Rancangan ini disebut rancangan faktorial dengan rancangan dasar RAL atau lebih dikenal dengan faktorial RAL. Semakin banyak faktor yang digunakan maka akan semakin kompleks dan rumit dalam pelaksanaannya. Model aditif faktorial RAL dengan tiga faktor dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

$$i = 1, 2, \dots, a\ ;\ j = 1, 2, \dots, b\ ;\ k = 1,2, \dots, c\ ;\ l = 1,2, \dots, r \qquad (2.1)$$

dengan

Y_{ijkl} : nilai pengamatan dari ulangan ke-l yang memperoleh perlakuan pada taraf ke-i faktor A, taraf ke-j faktor B , dan taraf ke-k dari faktor C

μ : nilai rataan umum

α_i : pengaruh utama taraf ke-i dari faktor A

β_j : pengaruh utama taraf ke-j dari faktor B

$(\alpha\beta)_{ij}$: pengaruh interaksi taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B

γ_k : pengaruh utama taraf ke-k dari faktor C

$(\alpha\gamma)_{ik}$: pengaruh interaksi taraf ke-i faktor A dan taraf ke-k faktor C

$(\beta\gamma)_{jk}$: pengaruh interaksi taraf ke-j faktor B dan taraf ke-k faktor C

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$: pengaruh interaksi taraf ke-i faktor A, taraf ke-j faktor B dan taraf ke-k faktor C

a : banyaknya taraf faktor A

b : banyaknya taraf faktor B

c : banyaknya taraf faktor C

r : banyaknya ulangan

ε_{ijkl} : galat percobaan pada taraf ke-i faktor A, taraf ke-j faktor B, taraf ke-k faktor C, dan ulangan ke-l.

Diberikan contoh, $a = 2, b = 3$, $c = 3$ dan $r = 3$. Model dari persamaan (2.1) dapat dibuat ke dalam bentuk perkalian kronecker sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = (\mathbf{1_2} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_2} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{1_2} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{I_2} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\alpha\beta} + (\mathbf{1_2} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{I_2} \otimes \mathbf{1_3} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\alpha\gamma} + (\mathbf{1_2} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\beta\gamma} + (\boldsymbol{I_2} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \mathbf{1_3})\boldsymbol{\alpha\beta\gamma} + (\boldsymbol{I_2} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \boldsymbol{I_3} \otimes \boldsymbol{I_3})\boldsymbol{e}$$

Sehingga persamaan dapat ditulis:

$$\boldsymbol{Y} = (\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_a} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{I_a} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\alpha\beta} + (\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{I_a} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\alpha\gamma} + (\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\beta\gamma} + (\boldsymbol{I_a} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{r})\boldsymbol{\alpha\beta\gamma} + (\boldsymbol{I_a} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \boldsymbol{I_r})\boldsymbol{e} \qquad (2.2)$$

dengan

$\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}}$	: matriks kolom yang berukuran $a \times 1$
$\boldsymbol{I_a}$	: matriks identitas berukuran $a \times a$
$\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times 1$
$\boldsymbol{I_a} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times a$
$\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times b$
$\boldsymbol{I_a} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{c}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times ab$
$\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abr \times c$
$\boldsymbol{I_a} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{b}} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times ac$
$\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times abc$
$\boldsymbol{I_a} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{r}}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times abc$
$\boldsymbol{I_a} \otimes \boldsymbol{I_b} \otimes \boldsymbol{I_c} \otimes \boldsymbol{I_r}$	: matriks dengan ukuran $abcr \times abcr$

Persamaan (2.2) dapat disederhanakan menjadi:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.3)$$

dengan $\boldsymbol{Y}$ adalah variabel respon berukuran $abcr \times 1$ dari hasil pengamatan, $\boldsymbol{X}$ adalah rancangan nilai observasi prediktor berukuran $abcr \times (1 + a + b + ab +$

$c + ac + bc + abc$), $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor yang berukuran $(1 + a + b + ab + c + ac + bc + abc) \times 1$ yang elemennya terdiri dari parameter regresi, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor galat yang berukuran $abcr \times 1$.

Asumsi yang digunakan pada model persamaan (2.3) adalah galat percobaan ε_{ijkl} diambil secara acak, menyebar secara bebas dan normal dengan nilai tengah sama dengan nol dan ragam σ^2 atau dituliskan sebagai $\varepsilon_{ijkl} \sim IN\ (0, \sigma^2)$ (Gaspersz, 1991). Selain dari ketiga asumsi tersebut, ada asumsi lain yang harus dipenuhi pada rancangan faktorial RAL. Asumsi yang digunakan jika faktor A dengan a taraf bersifat tetap, faktor B dengan b taraf bersifat tetap, dan faktor C dengan c taraf bersifat tetap sebagai berikut :

$$\sum_{i=1} \alpha_i = \sum_{j=1} \beta_j = \sum_{k=1} \gamma_k = \sum_{i=1} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{i=1} (\alpha\gamma)_{ik} = \sum_{k=1} (\alpha\gamma)_{ik} = \sum_{j=1} (\beta\gamma)_{jk} = \sum_{k=1} (\beta\gamma)_{jk} = \sum_{i=1} (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_{j=1} (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_{k=1} (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

Model tetap adalah model yang terbentuk dari taraf-taraf faktor yang tetap dan penentuan taraf perlakuan sesuai keinginan peneliti. Kesimpulan yang diambil hanya terbatas pada taraf-taraf faktor yang dicobakan.

2.2 Struktur Data Pengamatan dan Struktur Analisis Variansi

Tabulasi data pengamatan pada faktorial rancangan acak lengkap disajikan pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Struktur Data Faktorial RAL Tiga Faktor

Faktor A	Faktor B	Faktor C	Ulangan				Total Baris
			1	2	...	r	$(y_{ijk.})$
1	1	1	y_{1111}	y_{1112}	...	y_{111r}	$y_{111.}$
		⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
		c	y_{11c1}	y_{11c2}	...	y_{11cr}	$y_{11c.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
	b	1	y_{1b11}	y_{1b12}	...	y_{1b1r}	$y_{1b1.}$
		…	⋮	⋮	...	⋮	⋮
		c	y_{1bc1}	y_{1bc2}	...	y_{1bcr}	$y_{1bc.}$

Faktor A	Faktor B	Faktor C	Ulangan				Total Baris
			1	2	...	r	$(y_{ijk.})$
2	1	1	y_{2111}	⋮	...	⋮	⋮
		…	⋮	⋮	...	⋮	⋮
		c	y_{21c1}	y_{21c2}	...	y_{21cr}	$y_{21c.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
	b	1	y_{2b11}	y_{2b12}	...	y_{2b1r}	$y_{2b1.}$
		…	⋮	⋮	...	⋮	⋮
		c	y_{2bc1}	y_{2bc2}	...	y_{2bcr}	$y_{2bc.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
a	1	1	y_{a111}	y_{a112}	...	y_{a11r}	$y_{a11.}$
		…	⋮	⋮	...	⋮	⋮
		c	y_{a1c1}	y_{a1c2}	...	y_{a1cr}	$y_{a1c.}$
	⋮		⋮	⋮	...	⋮	⋮
	b	1	y_{ab11}	y_{ab12}	...	y_{ab1r}	$y_{ab1.}$
		…	⋮	⋮	...	⋮	⋮
		c	y_{abc1}	y_{abc2}	...	y_{abcr}	$y_{abc.}$
Total Kolom $(y_{\dots r})$			$y_{\dots 1}$	$y_{\dots 2}$	...	$y_{\dots r}$	$y_{\dots .}$

Berdasarkan pengamatan pada Tabel 2.1 dapat dibuat analisis variansi untuk percobaan faktorial RAL tiga faktor.

Hipotesis yang akan diuji sebagai berikut:

a. Pengaruh utama faktor A

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$ (faktor A tidak berpengaruh)

H_1 : paling sedikit ada satu i dengan $\alpha_i \neq 0$ untuk $i = 1,2,\dots,a$

b. Pengaruh utama faktor B

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$ (faktor B tidak berpengaruh)

H_1 : paling sedikit ada satu j dengan $\beta_j \neq 0$ untuk $j = 1,2,\dots,b$

c. Pengaruh utama faktor C

$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_c = 0$ (faktor C tidak berpengaruh)

H_1 : paling sedikit ada satu k dengan $\gamma_k \neq 0$ untuk $k = 1,2,\dots,c$

d. Pengaruh interaksi faktor A dengan faktor B

H_0 : $(\alpha\beta)_{11} = \cdots = (\alpha\beta)_{ab} = 0$ (interaksi faktor A dan faktor B tidak berpengaruh)

H_1 : paling sedikit ada sepasang $(i.j)$ dengan $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

e. Pengaruh interaksi faktor A dengan faktor C

H_0 : $(\alpha\gamma)_{11} = \cdots = (\alpha\gamma)_{ac} = 0$ (interaksi faktor A dan faktor C tidak berpengaruh)

H_1 : paling sedikit ada sepasang $(i.k)$ dengan $(\alpha\gamma)_{ik} \neq 0$

f. Pengaruh interaksi faktor B dengan faktor C

H_0 : $(\beta\gamma)_{11} = \cdots = (\beta\gamma)_{bc} = 0$ (interaksi faktor B dan faktor C tidak berpengaruh)

H_1 : paling sedikit ada sepasang $(j.k)$ dengan $(\beta\gamma)_{jk} \neq 0$

g. Pengaruh interaksi faktor A, faktor B, dan faktor C

H_0 : $(\alpha\beta\gamma)_{111} = \cdots = (\alpha\beta\gamma)_{abc} = 0$ (interaksi faktor A, faktor B, faktor C tidak berpengaruh)

H_1 : paling sedikit ada sepasang $(i.j.k)$ dengan $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$

Adapun langkah-langkah analisis sebagai berikut :

1) Menghitung faktor koreksi dan jumlah kuadrat total

a. Faktor Koreksi (FK)

$$FK = \frac{Y_{....}^2}{abcr} \tag{2.4}$$

b. Jumlah Kuadrat Total (JKT)

$$JKT = \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}\left(Y_{ijkl} - \bar{Y}_{....}\right)^2 \tag{2.5}$$

c. Jumlah Kuadrat Perlakuan (JKP)

$$JKP = \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}\left(\bar{Y}_{ijk.} - \bar{Y}_{....}\right)^2 \tag{2.6}$$

d. Jumlah Kuadrat Galat (JKG)

$$JKG = JKT - JKP \tag{2.7}$$

2) Menentukan derajat kebebasan (db)

a. Faktor A : $a - 1$

b. Faktor B : $b - 1$

c. Faktor C : $c - 1$

d. Perlakuan : $abc - 1$

e. Interaksi AB : $(a-1)(b-1)$
f. Interaksi AC : $(a-1)(c-1)$
g. Interaksi BC : $(b-1)(c-1)$
h. Interaksi ABC: $(a-1)(b-1)(c-1)$
i. Galat : $abc(r-1)$
j. Total : $abcr-1$

3) Menentukan jumlah kuadrat faktor utama dan interaksi

a. Jumlah Kuadrat Faktor A (JKA)

$$JKA = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}(\bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{....})^2 = \sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{i...}^2}{bcr} - FK \quad (2.8)$$

b. Jumlah Kuadrat Faktor B (JKB)

$$JKB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}\left(\bar{Y}_{.j..} - \bar{Y}_{....}\right)^2 = \sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{.j..}^2}{acr} - FK \quad (2.9)$$

c. Jumlah Kuadrat Faktor C (JKC)

$$JKC = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}(\bar{Y}_{..k.} - \bar{Y}_{....})^2 = \sum_{k=1}^{c}\frac{Y_{..k.}^2}{abr} - FK \quad (2.10)$$

d. Jumlah Kuadrat Interaksi A dan B ($JKAB$)

$$JKAB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{ij..}^2}{cr} - FK - JKA - JKB \quad (2.11)$$

e. Jumlah Kuadrat Interaksi A dan C ($JKAC$)

$$JKAC = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}\frac{Y_{i.k.}^2}{br} - FK - JKA - JKC \quad (2.12)$$

f. Jumlah Kuadrat Interaksi B dan C ($JKBC$)

$$JKBC = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{Y_{.jk.}^2}{ar} - FK - JKB - JKC \quad (2.13)$$

g. Jumlah Kuadrat Interaksi Faktor A, Faktor B, dan Faktor C ($JKABC$)

$$JKABC = JKP - JKA - JKB - JKC - JKAB - JKAC - JKBC \quad (2.14)$$

4) Menentukan kuadrat tengah

a. Kuadrat Tengah Faktor A (KTA)

$$KTA = \frac{JKA}{a-1}$$

b. Kuadrat Tengah Faktor B (KTB)

$$KTB = \frac{JKB}{b-1}$$

c. Kuadrat Tengah Faktor AB($KTAB$)

$$KTAB = \frac{JKAB}{(a-1)(b-1)}$$

d. Kuadrat Tengah Faktor C (KTC)

$$KTC = \frac{JKC}{c-1}$$

e. Kuadrat Tengah Faktor AC ($KTAC$)

$$KTAC = \frac{JKAC}{(a-1)(c-1)}$$

f. Kuadrat Tengah Faktor BC ($KTBC$)

$$KTBC = \frac{JKBC}{(b-1)(c-1)}$$

g. Kuadrat Tengah Faktor ABC ($KTABC$)

$$KTABC = \frac{JKABC}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

h. Kuadrat Tengah Galat (KTG)

$$KTG = \frac{JKG}{abc(r-1)}$$

5) Menghitung F_{hitung}

a. Pengaruh Utama Faktor A

$$F_{hitung}(A) = \frac{\frac{JKA}{a-1}}{\frac{JKG}{abc(r-1)}} = \frac{KTA}{KTG} \; ; F_{tabel} = F_{\propto(dbA,dbG)}$$

b. Pengaruh Utama Faktor B

$$F_{hitung}(B) = \frac{\frac{JKB}{b-1}}{\frac{JKG}{abc(r-1)}} = \frac{KTB}{KTG} \; ; F_{tabel} = F_{\propto(dbB,dbG)}$$

c. Pengaruh Utama Faktor C

$$F_{hitung}(C) = \frac{\frac{JKC}{c-1}}{\frac{JKG}{abc(r-1)}} = \frac{KTC}{KTG} \; ; F_{tabel} = F_{\propto(dbC,dbG)}$$

d. Pengaruh Interaksi Faktor A dengan Faktor B

$$F_{hitung}(AB) = \frac{\frac{JKAB}{(a-1)(b-1)}}{\frac{JKG}{abc(r-1)}} = \frac{KTAB}{KTG} \; ; F_{tabel} = F_{\propto(dbAB,dbG)}$$

e. Pengaruh Interaksi Faktor A dengan Faktor C

$$F_{hitung}(AC) = \frac{\frac{JKA}{(a-1)(c-1)}}{\frac{JKG}{abc(r-1)}} = \frac{KTAC}{KTG}\ ; F_{tabel} = F_{\propto(dbAC,dbG)}$$

f. Pengaruh Interaksi Faktor B dengan Faktor C

$$F_{hitung}(BC) = \frac{\frac{JKBC}{(b-1)(c-1)}}{\frac{JKG}{abc(r-1)}} = \frac{KTBC}{KTG}\ ; F_{tabel} = F_{\propto(dbBC,dbG)}$$

g. Pengaruh Interaksi Faktor A, Faktor B dan Faktor C

$$F_{hitung}(ABC) = \frac{\frac{JKABC}{(a-1)(b-1)(c-1)}}{\frac{JKG}{abc(r-1)}} = \frac{KTABC}{KTG}$$

6) Pengujian Hipotesis

a. Jika $F_{hitung}(A) > F_{a(dbA;dbG)}$, maka keputusan H_0 ditolak, artinya terdapat pengaruh faktor A.

b. Jika $F_{hitung}(B) > F_{a(dbB;dbG)}$, maka keputusan H_0 ditolak, artinya terdapat pengaruh faktor B.

c. Jika $F_{hitung}(C) > F_{a(dbC;dbG)}$, maka keputusan H_0 ditolak, artinya terdapat pengaruh faktor C.

d. Jika $F_{hitung}(AB) > F_{a(dbAB;dbG)}$, maka keputusan H_0 ditolak, artinya terdapat pengaruh interaksi faktor A dan faktor B.

e. Jika $F_{hitung}(AC) > F_{a(dbAC;dbG)}$, maka keputusan H_0 ditolak artinya terdapat pengaruh interaksi faktor A dan faktor C.

f. Jika $F_{hitung}(BC) > F_{a(dbBC;dbG)}$, maka keputusan H_0 ditolak artinya terdapat pengaruh interaksi faktor B dan faktor C.

g. Jika $F_{hitung}(ABC) > F_{a(dbABC;dbG)}$, maka keputusan H_0 ditolak artinya terdapat pengaruh interaksi faktor A, faktor B dan faktor C.

Berdasarkan perhitungan analisis variansi, maka dapat disajikan seperti pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Struktur Tabel ANAVA Faktorial RAL Tiga Faktor

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat (JK)	Kuadrat Tengah (KT)	F_{hitung}
A	$a-1$	JKA	KTA	$\frac{KTA}{KTG}$
B	$b-1$	JKB	KTB	$\frac{KTB}{KTG}$
C	$c-1$	JKC	KTC	$\frac{KTC}{KTG}$
AB	$(a-1)(b-1)$	$JKAB$	$KTAB$	$\frac{KTAB}{KTG}$
AC	$(a-1)(c-1)$	$JKAC$	$KTAC$	$\frac{KTAC}{KTG}$
BC	$(b-1)(c-1)$	$JKBC$	$KTBC$	$\frac{KTBC}{KTG}$
ABC	$(a-1)(b-1)$ $(c-1)$	$JKABC$	$KTABC$	$\frac{KTABC}{KTG}$
Galat	$abc(r-1)$	JKG	KTG	
Total	$abcr-1$	JKT		

2.3 Pengujian Asumsi yang Mendasari Analisis Variansi

Prosedur yang tepat untuk pengujian suatu hipotesis adalah analisis variansi. Namun, sebelum dilakukan pengujian ada beberapa asumsi yang harus dipenuhi. Menurut Gasperz (1991), beberapa asumsi dalam rancangan percobaan sebagai berikut:

1. Uji Kenormalan Galat

Tujuan dari uji kenormalan adalah untuk mengetahui data berasal dari populasi yang berdistribusi normal atau tidak. Uji yang dapat digunakan adalah uji Liliefors. Sebelum dilakukan pengujian, terlebih dahulu data diurutkan dari yang terkecil ke yang terbesar. Langkah-langkah pengujiannya sebagai berikut :

a. Pengujian Hipotesis :

   H_0 : Data berdistribusi normal

   H_1 : Data tidak berdistribusi normal

b. Taraf Signifikansi $\propto$: 5%

c. Statistik Uji :

$$L_0 = \text{selisih terbesar dari } |F(z_i) - S(z_i)|$$

dengan

$$z_i = \frac{Y_i - \bar{Y}}{SD}$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

$$S(z_i) = \frac{banyaknya\ \ z_1, z_2, \dots, z_n \leq (\ z_i)}{n}$$

z_i merupakan nilai transformasi pada distribusi normal, $F(z_i)$ adalah peluang kumulatif normal, $S(z_i)$ peluang kumulatif empiris, dan n adalah banyaknya pengamatan.

d. Kriteria Keputusan

Tolak H_0 jika $L_0 > L_{\propto(n)}$, dengan $L_{\propto(n)}$ adalah titik kritis uji Liliefors.

2. Kehomogenan Variansi

Pengujian homogenitas variansi dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan membuat plot antara nilai residual dengan nilai yang prediksi. Apabila plot yang terbentuk tidak membentuk suatu pola tertentu maka dikatakan homogenitas variansi terpenuhi. Cara lain yaitu dengan Uji Fisher. Adapun langkah-langkah sebagai berikut:

a. Pengujian Hipotesis :

$H_0 :\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (variansi perlakuan sama)

$H_1 :\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ dengan $i, j = 1{,}2$ (variansi perlakuan tidak sama)

b. Taraf Signifikansi $\propto$: 5%

c. Statistik Uji :

$$F_{hit} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{2.15}$$

dengan

$$s_i^2 = \sqrt{\frac{n_i \sum_{j=1}^{n_i} {Y_{ij}}^2 - \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}\right)^2}{n_i(n_i - 1)}}$$

s_i^2 adalah variansi perlakuan ke-i, n_i adalah banyaknya amatan ke-i.

d. Kriteria Keputusan

Tolak H_0 jika $F_{hit} > F_{(\propto;df1;df2)}$, berarti bahwa variansi perlakuan yang sama.

3. Kebebasan Galat

Kebebasan galat merupakan suatu pengamatan yang memiliki nilai tertentu tidak bergantung dari nilai-nilai galat pengamatan lainnya. Pengujian asumsi kebebasan galat pengamatan dilakukan dengan membuat plot antara nilai galat dengan nilai dugaan pengamatan. Memenuhi asumsi apabila tidak terbentuk pola tertentu pada galat atau galat percobaan menyebar secara acak.

2.4 *Outlier* dalam Rancangan Percobaan

Outlier merupakan kondisi data pengamatan yang tampak berbeda jauh dari pengamatan lainnya. *Outlier* juga dapat diartikan sebagai data yang tidak mengikuti pola umum pada model dan tidak berada dalam daerah selang kepercayaan (Sambiring, 1995).

Dalam rancangan percobaan sebelum melakukan analisis perlu dilakukan pengujian asumsi. Asumsi tersebut mencakup normalitas, independensi, dan homoskedastisitas. Pada praktiknya, sangat jarang ditemukan sebaran nilai pengamatan yang memiliki bentuk ideal. Bentuk data yang tidak ideal bisa disebabkan karena adanya *outlier*. Keberadaan *outlier* dalam data dapat menyebabkan tidak terpenuhinya satu atau lebih asumsi yang disyaratkan. *Outlier* terjadi apabila terdapat kesalahan entri data, kesalahan pemberian kode, penempatan perlakuan yang tidak tepat, atau adanya kesalahan pengamatan pada salah satu unit percobaan. Jika terjadi penyimpangan yang diakibatkan oleh keberadaan *outlier*, maka cara paling mudah untuk mengatasinya adalah dengan mengeluarkan data pengamatan yang dianggap *outlier* tersebut (Yutnosumarto, 1991).

2.5 Metode untuk Mendeteksi Outlier

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mendeteksi keberadaan *outlier* yaitu metode grafis. Keunggulan metode ini yaitu mudah dipahami karena menampilkan data secara grafis (gambar) tanpa membutuhkan perhitungan yang rumit. Sedangkan kekurangan metode ini terletak pada keputusan yang memperlihatkan ada tidaknya *outlier* pada data bergantung pada kebijakan (*judgement*) peneliti karena hanya mengandalkan visualisasi gambar. Salah satu bentuk pendeteksi *outlier* dengan metode grafis yaitu *boxplot.* Pada metode ini digunakan nilai kuartil dan jangkauan untuk mendeteksi *outlier*. Kuartil 1, 2 dan 3 membagi data menjadi beberapa bagian yang telah diurutkan sebelumnya.

$$IQR = Q3 - Q1$$

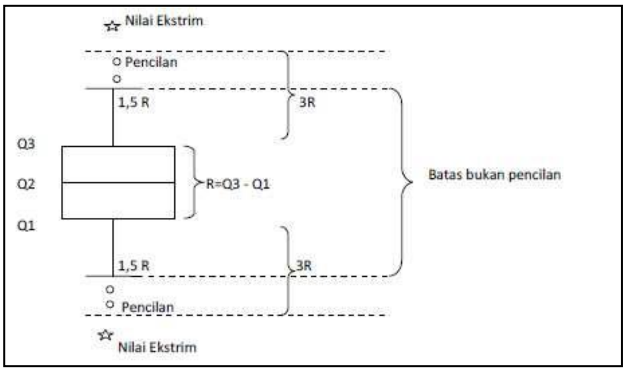
dengan

$Q1$: Kuartil ke 1

$Q3$: Kuartil ke 3

IQR : Jangkauan

Pada Gambar 2.1 Jangkauan *Interquartile Range* (IQR) merupakan selisih kuartil 1 terhadap kuartil 3, atau IQR = $Q_3 - Q_1$. Data *outlier* yaitu nilai yang kurang dari $Q_1 - 1.5IQR$ dan nilai yang lebih dari $Q_3 + 1.5$IQR disimbolkan dengan (o) untuk data *outlier* dan ($*$) untuk *outlier* ekstrem.



Gambar 2.1 Skema Identifikasi *Outlier* dengan *Boxplot*

2.6 Pendekatan Metode *Robust* MM

Metode *robust* MM dikenalkan oleh Yohai (1987) yang menggabungkan *high breakdown point* sebesar 50% dengan efisiensi yang tinggi mencapai 95%. Metode *robust* digunakan ketika galat tidak berdistribusi normal atau ketika ada pengamatan yang mengandung *outlier*. Metode ini penting untuk menganalisis data yang dipengaruhi oleh *outlier* sehingga dihasilkan model yang kekar terhadap *outlier*. Metode ini telah dikembangkan oleh Rousseuw dan Leroy pada tahun 1987 (Chen, 2002).

2.6.1 *Ordinary Least Square*

Ordinary Least Square (OLS) atau Metode kuadrat terkecil (MKT) adalah salah satu metode estimasi parameter yang bertujuan untuk meminimumkan jumlah kuadrat galat. Misalkan $\mu, \alpha_i, \beta_j, \gamma_k, (\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\beta\gamma)_{jk}, (\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ adalah parameter yang akan diestimasi, maka prosedur OLS yang digunakan sebagai berikut:

1. Membentuk jumlah kuadrat galat

$$L = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}\varepsilon_{ijkl}^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{r}\big(Y_{ijkl} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij} - \gamma_k - (\alpha\gamma)_{ik} - (\beta\gamma)_{jk} - (\alpha\beta\gamma)_{ijk}\big)^2 \quad (2.16)$$

2. Mendefinisikan L terhadap , α_i, $\beta_j, (\alpha\beta)_{ij}, \gamma_k, (\alpha\gamma)_{ik}, (\beta\gamma)_{jk}, (\alpha\beta\gamma)_{ijk}$.

2.6.2 Estimasi *S*

Metode estimasi S merupakan solusi dengan kemungkinan terkecil dari penyebaran residual, karena dapat meminimumkan variansi dan residual (Wilcox, 2005).

$$\hat{\beta}_s = arg\ min_\beta\ \hat{\sigma}_s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

Estimasi S mempunyai *breakdown point* sebesar 0,5. *Breakdown point* merupakan ukuran proporsi dari banyaknya data yang terkontaminasi *outlier* dibandingkan seluruh data pengamatan. *Breakdown point* sebesar 0,5 diperoleh menggunakan fungsi pembobot *Tukey Bisquare* dan *tuning constant* sebesar 1,547. Meskipun estimasi S mempunyai *breakdown point* yang tinggi, estimasi S kurang menarik untuk digunakan karena mempunyai efisiensi yang rendah (Setiarini dan Listyani, 2017).

Fungsi objektif adalah fungsi yang digunakan untuk mencari fungsi pembobot pada estimasi S. Adapun fungsi objektif pada *Tukey Bisquare* sebagai berikut:

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{c^2}{6}\left[1 - \left(1 - \left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right)^3\right] & ,\quad |\, u_i| \le c \\ \frac{c^2}{6} & \quad\ \ |\, u_i| > c \end{cases} \quad (2.17)$$

dengan c adalah nilai *tuning constant*. u_i adalah residual yang distandarisasikan, sehingga $u_i = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_s}$. Sedangkan $\hat{\sigma}_s = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0,6745}$.

Untuk meminimumkan persamaan (2.18) dapat dibentuk ke persamaan berikut:

$$\psi(u_i) = \rho'(u_i) = \frac{\partial(\rho(u_i))}{\partial u_i} = \begin{cases} u_i \left(1 - \left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right)^2, & |u_i| \leq c \\ 0 & |u_i| > c \end{cases}$$

$\psi(u_i)$ merupakan fungsi pengaruh yang digunakan dalam memperoleh pembobot (*weight*). Maka diperoleh fungsi pembobot sebagai berikut:

$$w_i = \frac{\psi(u_i)}{u_i} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right)^2 & |u_i| \leq c \\ 0 & |u_i| > c \end{cases},$$

Langkah–langkah estimasi S dapat diuraikan sebagai berikut (Susanti, 2014):

a) Menentukan nilai residual awal dari estimasi parameter regresi $\hat{\beta}$ dengan OLS.

$$\varepsilon_i = Y_i - \widehat{Y_i}$$

Residual ini kemudian berguna sebagai estimasi $\hat{\beta}_s^{\,1}$ awal.

b) Menentukan nilai $\hat{\sigma}_s$

$$\hat{\sigma}_s = \begin{cases} \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0.6745}, & iterasi = 1 \\ \sqrt{\frac{1}{nK}\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2}, & iterasi > 1 \end{cases}$$

K merupakan nilai ketetapan sebesar 0,1995.

c) Menentukan nilai u_i

$$u_i = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_s}$$

d) Menentukan nilai pembobot *Tukey Bisquare* $(c = 1{,}547)$

$$w_i = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{u_i}{c}\right)^2\right)^2 & |u_i| \leq c \\ 0 & |u_i| > c \end{cases},$$

e) Menentukan parameter ${\hat{\beta}_s}^1$ menggunakan metode IRLS dengan pembobot ${w_i}^0$.

f) Mengulang langkah $b - f$ sampai diperoleh nilai $\sum_{i=1}^{n} |\,{\varepsilon_i}^s|$ yang konvergen ke suatu nilai tertentu dengan $\sum_{i=1}^{n} |\,{\varepsilon_i}^s| - \sum_{i=1}^{n} |\,{\varepsilon_i}^{s-1}| <$ 0,0001 dengan ${\varepsilon_i}^s$ merupakan nilai residual pada estimasi S pada pengamatan ke-i.

2.6.3 Metode *Robust* MM

Metode *robust* MM atau estimasi MM merupakan metode regresi yang diawali dengan mengestimasi parameter yang sangat *robust* yang meminimumkan suatu skala residual menggunakan estimasi S. Kemudian skala residual tetap konstan dan diakhiri dengan menetapkan parameter-parameter regresi menggunakan estimasi M. Estimasi MM mempunyai *breakdown point* yang tinggi yaitu sebesar 0,5. Fungsi estimasi MM dapat dijelaskan sebagai berikut (Susanti, 2014):

$$\hat{\beta}_{mm} = arg\ min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_s}\right) \qquad (2.18)$$

dengan $\varepsilon_i = Y_i - \widehat{Y}_i$, maka $\varepsilon_i = Y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j$, sehingga

$$\hat{\beta}_{mm} = arg\ min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{Y_i - \sum_{j=0}^{p} X_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}_s}\right)$$

Pada estimasi MM digunakan fungsi pembobot Huber sebagai berikut :

$$\rho(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_i^2, & |\,u_i| \le c \\ c|\,u_i| - \frac{1}{2}c^2, & |\,u_i| > c \end{cases}$$

dengan fungsi pengaruh

$$\rho'(u_i) = \psi(u_i) = \frac{\partial\big(\rho(u_i)\big)}{\partial u_i} = \begin{cases} u_i & |u_i| \le c \\ c & u_i > c \\ c & u_i < c \end{cases}$$

Setelah diperoleh $\rho'(u_i)$, maka fungsi pembobot yang diperoleh sebagai berikut:

$$w_i = \frac{\psi(u_i)}{u_i} = \begin{cases} 1 & |\, u_i| \le c \\ & , \\ \frac{c}{|u_i|} & |\, u_i| > c \end{cases} \tag{2.19}$$

Sama halnya dalam kasus estimasi M, estimasi MM juga menggunakan metode *Iteratively Reweighted Least Square* (IRLS) untuk mencari estimasi parameter. Prosedur estimasi MM dapat diuraikan sebagai berikut (Susanti, 2014):

1. Mengestimasi parameter $\hat{\beta}_s{}^{l}$, sehingga diperoleh residual $\varepsilon_i{}^{(s)}$ dari proses estimasi S. ($\varepsilon_i = Y_i - \widehat{Y}_i$)

   Residual ini berguna sebagai estimasi $\hat{\beta}_{mm}{}^{1}$ awal.

2. Menentukan nilai $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{mm}$.

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{mm} = \frac{median|\varepsilon_i - median(\varepsilon_i)|}{0.6745}$$

3. Menentukan nilai u_i

$$u_i = \frac{\varepsilon_i}{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{mm}}$$

4. Menentukan nilai pembobot Huber (c =1,345).

$$w_i = \frac{\psi(u_i)}{u_i} = \begin{cases} 1 & |\, u_i| \le c \\ & , \\ \frac{c}{|u_i|} & |\, u_i| > c \end{cases}$$

5. Menentukan parameter $\hat{\beta}_{mm}{}^{1}$ menggunakan metode IRLS dengan pembobot $w_i{}^{1}$.

6. Mengulangi langkah kedua sampai kelima hingga diperoleh nilai $\sum_{i=1}^{n} |\, \varepsilon_i{}^{mm}|$ yang konvergen ke suatu nilai tertentu.