NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN-C_4 PADA GRAF $C_n \times P_3$

TOTAL $\boldsymbol{C_4}$ –IRREGULARITY STRENGTH OF $\boldsymbol{C_n \times P_3}$ GRAPH

WINDA ARITONANG

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2019

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN-C_4 PADA GRAF $C_n \times P_3$

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar Magister

Program Studi

Magister Matematika

Disusun dan diajukan oleh

WINDA ARITONANG

Kepada

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS HASANUDDIN
MAKASSAR
2019

TESIS

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN-C_4 PADA GRAF $C_n \times P_3$

Disusun dan diajukan oleh

WINDA ARITONANG
Nomor Pokok P3500216001

Telah dipertahankan didepan Panitia Ujian Tesis

pada tanggal 2 Januari 2019

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Menyetujui

Komisi Penasehat,

Dr. Nurdin, M.Si	**Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc**
Ketua	Anggota

Ketua Program Studi Magister Matematika,	Dekan Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin,
Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc	**Dr. Eng. Amiruddin, M.Si**

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Winda Aritonang
Nomor mahasiswa	: P3500216001
Program studi	: Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan tulisan atau pemikiran orang lain. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa sebagian atau keseluruhan tesis ini hasil karya orang lain, saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Makassar,   Maret 2019

Yang menyatakan

Winda Aritonang

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas izin dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penyusunan tesis ini sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister pada Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin dengan judul " Nilai Total Ketidakteraturan-C_4 pada Graf $C_n \times P_3$".

Dalam kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus kepada:

1. Ayahanda Alm. Ridwan Aritonang dan ibunda Nurhudaya tercinta yang senantiasa memberikan kasih sayang, doa dan materi kepada penulis dalam menuntut ilmu
2. Dr. Nurdin, M.Si, dan Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc selaku pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk senantiasa memberi bimbingan, semangat dan arahannya dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc, Dr. Loeky Haryanto, MS. M.Sc. MA dan Dr. Budi Nurwahyu, MS selaku penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyempurnaan tulisan ini.
4. Rektor Universitas Hasanuddin dan Direktur Program Pascasrjana beserta seluruh staf yang telah memberikan

layanan administrasi baik selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Hasanuddin.

5. Dekan FMIPA Universitas Hasanuddin Dr. Eng Amiruddin, seluruh dosen dan staff administrasi pada Program Studi S2 Matematika Program Pascasarjana Universitas Hasanuddin yang telah memberikan layanan akademik maupun layanan administrasi selama penulis menempuh pendidikan.
6. Adik-adikku Wastuti Aritonang, S.KH dan Afrida Aritonang serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, semangat, dan kasih sayang tanpa batas.
7. Emil Taufiq sebagai seorang yang selalu memberikan doa, perhatian dan semangat.
8. Teman-teman Program Studi Magister (S2) Matematika Universitas Hasanuddin angkatan 2016, H5N1, CERIWIS, LARUKKA dan kepada semua pihak yang telah membantu diucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Semoga hasil tesis ini memberikan kontribusi berharga bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan memberi informasi ilmiah secara umum.

Makassar, Maret 2019

WINDA ARITONANG

ABSTRAK

WINDA ARITONANG. Nilai Total Ketidakteraturan-C_4 pada Graf $C_n \times P_3$ (dibimbing oleh Nurdin dan Amir Kamal Amir).

Penentuan nilai total ketidakteraturan dari semua graf belum dapat dilakukan secara lengkap. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan-H pada graf C_n x P_3 untuk n ≥ 3 yang isomorfik dengan C_4. Penentuan nilai total ketidakteraturan-H pada graf C_n x P_3 dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya. Sedangkan batas atas dianalisa dengan pemberian label pada titik dan sisi pada graf C_n x P_3.Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh nilai total ketidakteraturan-H pada graf ths(C_n x P_3, C_4)=$\left\lceil\frac{2n+7}{8}\right\rceil$.

Kata kunci : Selimut-H, Nilai total ketidakteraturan-H

ABSTRACT

WINDA ARITONANG. *Total* $\boldsymbol{C_4}$ *–Irregularity Strength Of* $C_n \times P_3$ *GrapH* (Supervised by Nurdin and Amir Kamal Amir).

The determine of H-irregularity total strength in all graphs was not complete on graph classes. The research aims to determine alghorithm the H-irregularity total strength of graph C_n x P_3 for n ≥ 3 with use H-covering, where H is isomorphic to C_4. The determine of H-irregularity total strength of graph C_n x P_3 was conducted by determining lower bound and smallest upper bound. The lower bound was analyzed based on graph characteristics and other supporting theorem, while the upper bound was analyzed by edge labeling and vertex labeling of graph C_n x P_3.The result show that the H-irregularity total strength of graph ths(C_n x $P_{3,}$ C_4)=$\left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$.

Keyword : H-covering, H-irregularity total strength

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti/Keterangan
$V(G)$	Himpunan titik pada graf *G*
$E(G)$	Himpunan sisi pada graf *G*
P_n	Graf lintasan
C_n	Graf lingkaran
L_n	Graf tangga
$\|V(H)\|$	Jumlah titik pada graf *H*
$\|E(H)\|$	Jumlah sisi pada graf *H*
$ths(G,H)$	Nilai total ketidakteraturan-*H* pada graf *G*
$wt(H)$	Bobot graf *H*
$s(G)$	Nilai ketidakteraturan graf *G*
$tvs(G)$	Nilai total ketidakteraturan titik graf *G*
$tes(G)$	Nilai total ketidakteraturan sisi graf *G*
$wt(x)$	Bobot titik *x*
$wt(xy)$	Bobot sisi *xy*

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bagian ilmu dari matematika. Banyak permasalahan yang dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Konsep teori graf ini diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736, dalam permasalahan jembatan Konigsberg. Leonhard Euler mencoba membuktikan kemungkinan mengunjungi empat daerah yang terhubung oleh tujuh jembatan, melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ketempat asal. Permasalahan Jembatan Konigsberg dapat direpresentasikan dengan graf, dengan merepresentasikan keempat daerah itu sebagai simpul (vertex) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (edge).

Graf adalah pasangan dua buah himpunan yaitu himpunan titik dan himpunan sisi, dinotasikan dengan $G = (V, E)$ di mana V menyatakan himpunan titik yang tak kosong dan E adalah himpunan sisi yang merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik V. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf ... cara umum direpresentasikan dengan titik dan sisi, dan himpunan ... ilangan yang disebut label.

Pelabelan graf adalah suatu fungsi dengan domain himpunan titik dan himpunan sisi atau keduanya dengan *range*nya bilangan riil. Masalah pelabelan ini pertama kali dikemukakan oleh Alex Rosa pada tahun 1967. Jika daerah asal fungsi tersebut adalah himpunan titik atau himpunan sisi, masing-masing pelabelannya disebut pelabelan sisi atau pelabelan titik. Jika daerah asal adalah gabungan himpunan titik dan himpunan sisi maka disebut pelabelan total.

Ada banyak pelabelan graf yang telah dikembangkan, Topik penelitian ini adalah pelabelan total tidak teratur. Konsep pelabelan tidak teratur pada suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (1986). Pelabelan-*w* tidak teratur pada graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan sisi dari G ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,w\}$ sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Bobot titik x pada pelabelan ini adalah jumlah semua label sisi yang terkait pada x. Nilai ketidakteraturan (*Irregular labeling*) dari G, dinotasikan dengan $s(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil w sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan w tidak teratur.

Pada tahun 2007, Bača dkk. memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya yang didasarkan pada pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur sisi dan pelabelan total tidak teratur titik. Pelabelan-*k* total tidak ...itik graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan ...n titik dan sisi dari G ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,k\}$ sedemikian ...a semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Bobot titik x pada pelabelan ini adalah jumlah label titik x dan semua sisi yang terkait pada x. Nilai total ketidakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-*k* total tidak teratur titik.

Salah satu jenis pelabelan tidak teratur lainnya adalah pelabelan total tidak teratur$-H$(H-*Irreguler total labelling*). Pelabelan jenis ini melibatkan konsep selimut graf. Secara umum pelabelan total tidak teratur-H dari suatu graf di definisikan sebagai berikut. Misal G adalah suatu graf, selimut sisi dari G(*edge covering*) adalah koleksi subgraf $H_1, H_2, \dots, H_t$ dari graf G sedemikian sehingga setiap sisi dari G termuat dalam paling sedikit satu subgraf $H_{i\,,}$dimana $i = 1,2, \dots, t$. Dalam hal ini, maka G disebut memiliki selimut (sisi) -$(H_1, H_2, \dots, H_t)$ $((H_1, H_2, \dots, H_t)$-(*edgecovering*). Jika setiap subgraf H_i isomorfik dengan suatu graf *H*, maka dikatakan G memiliki suatu selimut-H(H-$covering$) (Bača, dkk., 2017).

Misal *G* adalah suatu graf yang diselimuti oleh selimut-*H*. Untuk suatu subgraf H dengan suatu pelabelan-*k* total *f* didefinisikan bobot-*H* adalah

$$wt_f(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$$

Pelabelan-*k* total *f* disebut pelabelan-*k* total tidak teratur-*H* dari graf *G* jika bobot setiap subgraf yang isomorfik dari *G* berbeda. Bilangan bulat positif ... ikian sehingga graf *G* memiliki suatu pelabelan-*k* total tidakteratur-

H disebut nilai ketidakteraturan-*H* total dari *G*, dinotasikan dengan $ths(G, H)$.

Terdapat beberapa hasil penelitian terkait dengan pelabelan total H tidak teratur antara lain Bača dkk (2017) telah menentukan nilai total sisi (ehs) dan nilai total titik (vhs) pada graf kipas, lintasan dan ladder. Bača dkk (2017) telah menentukan nilai total L_n dan F_n tidak teratur (ths) pada graf planar, dan Bača dkk (2017) telah menentukan nilai total P_m tidak teratur (ths) pada graf P_n dan nilai total C_m tidak teratur (ths) pada graf L_n dan C_m merupakan graf Lingkaran dengan m titik,$ths(F_n, C_3)$ dimana F_n merupakan graf kipas dengan n titik dan C_3 graf Lingkaran dengan 3 titik. Hesti Agustin dkk (2017) telah menentukan $ths(Amal(C_3, v, n)$ dimana $Amal(C_3, v, n)$ merupakan banyaknya graf C_3 yang di amalgamasi.

Pada penelitian ini penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang pelabelan pada graf $C_n \times P_3$ yang merupakan hasil kali kartesius dari graf Lingkaran C_n dengan Lintasan P_m dengan $n \geq 3$ dan $m = 3$. Selain karena $C_n \times P_3$ belum ditentukan ths-nya juga karena $ths(L_n, C_m)$ dan $ths(P_n, P_m)$ sudah ada, dimana kedua graf tersebut dikonstruksi dari graf P_n dan C_m.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang sebelumnya, masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan label titik dan sisi pada graf $C_n \times P_3$ ian sehingga diperoleh thsnya ?

C. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini diharapkan dapat mengkonstruksi pelabelan titik dan sisi graf $C_n \times P_3$ kemudian menggunakannya dalam menentukan nilai total ketidakteraturan graf $C_n \times P_3$.

D. Batasan Masalah

Dalam penentuan nilai total ketidakteraturan graf $C_n \times P_3$ pemberian label pada titik dan sisi dari graf $C_n \times P_3$ dimana $n \geq 3$.

E. Organisasi Tesis

Agar penulisan tesis lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami maka disusun organisasi tesis sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan akan dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, manfaat penelitian, batasan masalah,dan organisasi tesis.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab tinjauan pustaka terdiri atas teori yang mendukung hasil penelitian, diantara konsep-konsep tersebut yaitu terminologi graf, dan teorema-teorema pada teori graf yang relevan dengan pelabelan total tidak teratur pada graf $C_n \times P_3$ dan pelabelan graf, serta kerangka konseptual.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab metode penelitian meliputi metode yang berisi langkah-langkah yang ditempuh dalam melakukan penelitian yaitu jenis penelitian, lokasi dan waktu penelitian, rencana penenelitian.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab hasil dan pembahasan akan dijelaskan hasil yang diperoleh dari proses penelitian diantaranya yaitu hasil utama memuat definisi graf $C_n \times P_3$ dan prosedur penentuan cara pemberian label pada titik dan sisi graf $C_n \times P_3$.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab penutup akan dijelaskan kesimpulan yang merupakan jawaban dari rumusan masalah dan saran untuk penelitian berikutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan konsep dasar pada teori graf, terminologi graf, jenis-jenis graf serta penjelasan mengenai pelabelan pada graf yang digunakan pada bab selanjutnya.

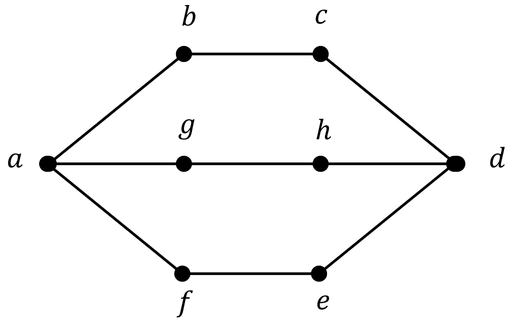
A. Pengertian Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan sebagai suatu gambar.

Definisi 2.1.1 *Graf* G *merupakan suatu pasangan himpunan* (V, E) *dinotasikan dengan* $G = (V, E)$ *dengan* V *adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan* E *adalah himpunan pasangan tidak terurut dari titik-titik berbeda di* V *disebut sisi*.

Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E dinotasikan dengan $G = (V, E)$. Sisi pada graf di gambarkan sebagai garis yang kedua ujungnya merupakan titik. Sisi e dengan titik-titik ujung u dan v ditulis $e = uv$. Banyaknya unsur dari $V(G)$ disebut *order* dari G dan banyaknya unsur dari $E(G)$ disebut *ukuran* (*size*) dari G.

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf G

Himpunan titik pada Gambar 2.1 adalah $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan himpunan sisinya adalah $E = \{ab, bc, cd, de, ef, af, ag, gh, hd\}$. Selanjutnya diperoleh order dari G adalah 8 dan ukuran dari G adalah 9.

B. Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa terminologi yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi yang akan digunakan pada bab pembahasan tugas akhir ini.

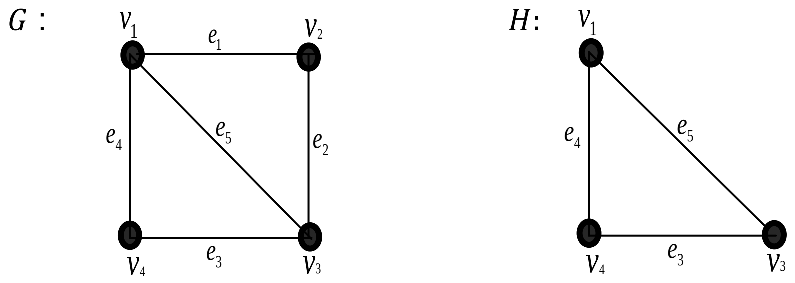
Definisi 2.2.1 *Dua buah titik pada graf disebut bertetangga* (*adjacent*) *jika keduanya dihubungkan oleh satu sisi. Dengan kata lain,* u *bertetangga dengan* v *jika* (uv) *adalah sebuah sisi pada graf* G.

Definisi 2.2.2 *Misalkan* G *adalah suatu graf dan* $(u, v) \in V(G)$, *jika* $e = (uv) \in E(G)$ *maka sisi* e *dikatakan terkait* (*incident*) *dengan titik* u *dan*

2.2.3 *Lintasan yang panjangnya n dari titik awal* v_0 *ke titik tujuan* *lam graf G ialah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi* *yang berbentuk* $v_0, e_1, v_{1,} e_2, v_{2,} \dots, v_{n-1,} e_n, v_n$ *sedemikian sehingga* $e_1 = v_0 v_1, e_2 = v_1 v_2, \dots, e_n = v_{n-1} v_n$ *adalah sisi dari graf, dan semua titik yang dilalui berbeda.*

Definisi 2.2.4 *Misalkan* $H = \big(V(H), E(H)\big)$ *dan* $G = \big(V(G), E(G)\big)$ *adalah dua buah graf. Graf H disebut subgraf dari G, jika* $V(H) \subseteq V(G)$ *dan* $E(H) \subseteq E(G)$ *dan dinotasikan dengan* $H \subseteq G$. *Jika* $H \subseteq G$ *tetapi* $H \neq G$ *maka* H *disebut subgraf sejati, dinotasikan dengan* $H \subset G$.

Untuk lebih memahami Definisi 2.5, perhatikan Gambar 2.2.



(a) **(b)**

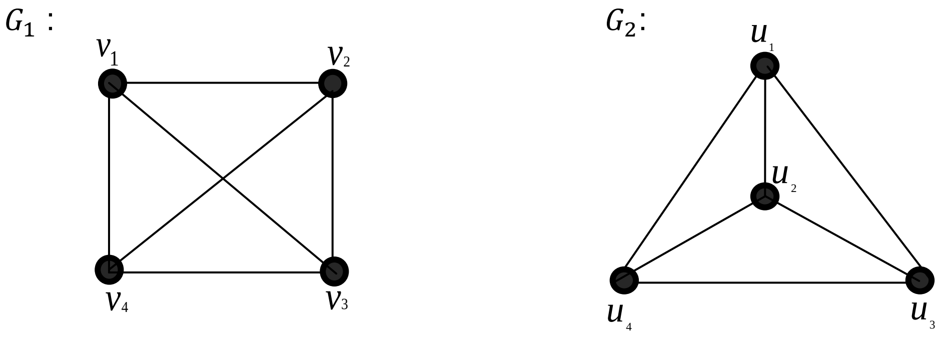
Gambar 2.2. (a) Graf G, (b) Graf H (subgraf dari graf G)

Pada Gambar 2.2, diketahui bahwa $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Sedangkan $V(H) = \{v_1, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{e_3, e_4, e_5\}$. Karena $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka H merupakan subgraf dari graf G.

Definisi 2.2.5 *Dua buah graf* G_1 *dan* G_2 *disebut isomorfik, dinotasikan dengan* $\{G_1 \cong G_2\}$, *jika terdapat pemetaan satu-satu* $\phi: V(G_1) \to V(G_2)$, *...ian sehingga dua titik* u *dan* v *bertetangga (adjacent) dalam graf*

G_1 *jika dan hanya jika titik* $\phi(u)$ *dan* $\phi(v)$ *bertetangga (adjacent) dalam graf* G_2.

Untuk lebih memahami Definisi 2.6, perhatikan Gambar 2.3.



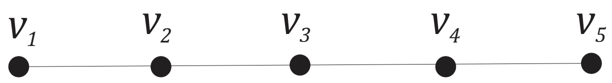
Gambar 2.3.Dua buah graf yang isomorfik($G_1 \cong G_2$)

Graf G_1dan G_2 pada Gambar 2.3 merupakan contoh dua buah graf yang isomorfik. Pemetaannya adalah $\phi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ dengan $\phi(v_i) = u_i$ dimana $i = 1, 2, 3, 4$.

C. Jenis-Jenis Graf

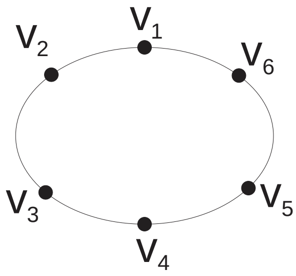
Beberapa graf dikelompokkan berdasarkan ciri khusus dari setiap graf. Pada subbab ini akan dipaparkan beberapa jenis graf yang digunakan pada penelitian ini.

Definisi 2.3.1 *Graf lintasan dengan n titik adalah graf terhubung yang terdiri atas tepat 2 titik berderajat 1 dan* $n-2$ *titik berderajat dua.*



Gambar 2.4 Graf Lintasan P_5

Definisi 2.3.2 *Graf lingkaran adalah graf terhubung dengan n buah titik yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dinotasikan dengan* C_n *dimana* $n \geq 3$.



Gambar 2.5 Graf Lingkaran C_6

D. Hasil Kali Kartesius

Membangun suatu graf dari graf lain dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satu cara yang dapat digunakan adalah dengan melakukan operasi antara dua buah graf. Operasi yang akan digunakan dalam tugas akhir ini adalah operasi hasil kali kartesius.

Hasil kali kartesius *(Cartesius Product)* dari himpunan A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan pasangan terurut dengan komponen pertama berasal dari himpunan A dan komponen kedua berasal dari himpunan B, atau

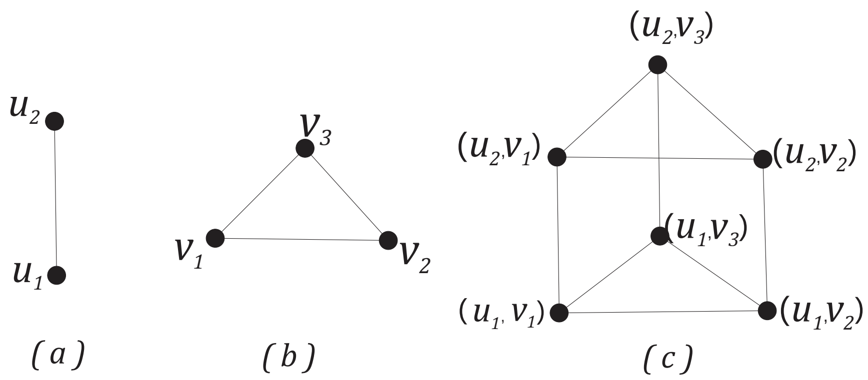
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \; dan \; b \in B\}.$$

Definisi 2.4.1 *Misalkan* G *dan* H *adalah graf dengan* $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

$) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ *maka* $G \times H$ *adalah graf dengan himpunan titik*

$V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ dan e = $(u_i, v_j)(u_k, v_l)$ adalah sisi dari $G \times H$ jika dan hanya jika memenuhi satu dari dua item berikut

1. *i= k dan $v_j v_l \in E(H)$ atau*
2. *$j = l$ dan $u_i u_k \in E(G)$.*



Gambar 2.6 (a). Graf P_2 (b). Graf K_3 (c). Graf $P_2 \times K_3$

E. Pelabelan Graf

Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan pada graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum.

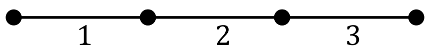
Definisi 2.5.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif, umumnya himpunan bilangan bulat positif.*

Himpunan bilangan yang menjadi kodomain dari pelabelan disebut *himpunan label*. Suatu pelabelan graf disebut *pelabelan titik*, jika domain gsinya adalah himpunan titik, dan disebut *pelabelan sisi* jika ya adalah himpunan sisi dan jika domainnya adalah gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut disebut *pelabelan total*.

Definisi 2.5.2 *Bobot titik* v *dinotasikan dengan* $wt(v)$, *pada suatu pelabelan sisi* λ *adalah jumlah semua label sisi yang terkait dengan* v, *yaitu*

$$wt(v) = \sum_{uv \in E} \lambda(uv).$$

Contoh 2.2



Gambar 2.7 Pelabelan Sisi pada P_4

Misalkan λ adalah pelabelan sisi pada P_4 seperti pada Gambar 2.7, yaitu:

$\lambda(v_1v_2) = 1$

$\lambda(v_2v_3) = 2$

$\lambda(v_3v_4) = 3.$

Maka bobot titik v_1, v_2, v_3 dan v_4 masing-masing adalah

$wt(v_1) = \lambda(v_1v_2) = 1$

$wt(v_2) = \lambda(v_1v_2) + \lambda(v_2v_3) = 1 + 2 = 3$

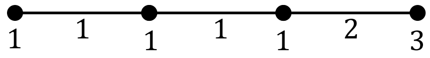
$wt(v_3) = \lambda(v_2v_3) + \lambda(v_3v_4) = 2 + 3 = 5$

$wt(v_4) = \lambda(v_3v_4) = 3.$

Definisi 2.5.3 *Bobot titik v pada pelabelan total adalah label titik* v *...h dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan* v, *yaitu*

$$wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv).$$

Contoh 2.3



Gambar 2.8 Pelabelan Total pada P_4

Misalkan f adalah pelabelan total pada P_4 seperti pada Gambar 2.8, yaitu:

$f(v_1) = 1$ $\qquad$ $f(v_1v_2) = 1$

$f(v_2) = 1$ $\qquad$ $f(v_2v_3) = 1$

$f(v_3) = 1$ $\qquad$ $f(v_3v_4) = 2.$

$f(v_4) = 3$

Maka bobot titik v_1, v_2, v_3 dan v_4 masing-masing adalah

$wt(v_1) = f(v_1) + f(v_1v_2) = 1 + 1 = 2$

$wt(v_2) = f(v_2) + f(v_1v_2) + f(v_2v_3) = 1 + 1 + 1 = 3$

$wt(v_3) = f(v_3) + f(v_2v_3) + f(v_3v_4) = 1 + 1 + 2 = 4$

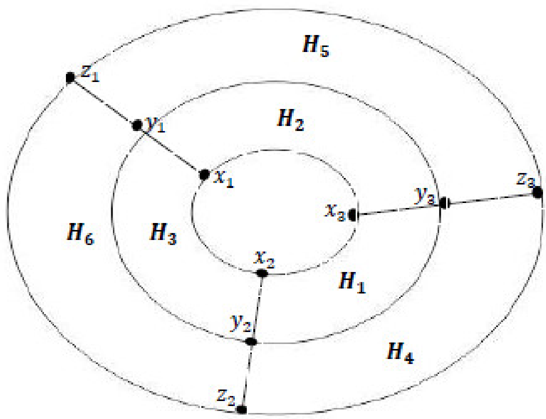
$wt(v_4) = f(v_4) + f(v_3v_4) = 3 + 2 = 5.$

F. Pelabelan Total Tidak Teratur$-\boldsymbol{H}$

Pelabelan sisi dan titik dari graf dapat dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah memberikan label pada titik dan sisinya dengan bilangan bulat positif.

Definisi 2.6.1 *Misal G merupakan suatu graf dengan $H_1, H_2, \ldots, H_t$, untuk suatu bilangan bulat positif t, merupakan subgraf-subgraf dari G. Koleksi* *$\ldots, H_t$, ditulis $(H_1, H_2, \ldots, H_t)$ disebut selimut sisi (edge covering) dari* *setiap sisi dari G termuat dalam paling sedikit satu subgraf*

H_i, *dimana* $i = 1,2,\ldots,t$, *dan dikatakan* G *mempunyai suatu selimut sisi-*($H_1, H_2, \ldots, H_t$) (($H_1, H_2, \ldots, H_t$)*-edge covering). Misalkan* G *mempunyai suatu selimut sisi-*($H_1, H_2, \ldots, H_t$), *jika setiap subgraf* $H_i(i = 1,2,..,t)$ *isomorfik dengan graf* H, *maka dikatakan* G *mempunyai selimut-*H (H*-covering).* Contoh dapat dilihat pada Gambar 2.9 :



Gambar 2.9 Graf $C_3 \times P_3$ dan subgraf pada graf $C_3 \times P_3$ yang isomorfik dengan H, dimana $H = C_4$.

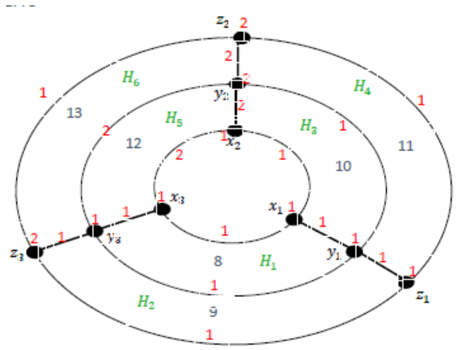
Gambar 2.9 merupakan graf $C_3 \times P_3$ yang mempunyai beberapa koleksi subgraf yaitu C_4, C_6 dan C_8 dengan subgraf $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6\}$ isomorfik dengan H, dimana $H = C_4$, maka dapat dikatakan graf $C_3 \times P_3$ mempunyai selimut-C_4 (C_4-*covering*).

Misalkan G adalah suatu graf yang mempunyai selimut-H. Untuk suatu subgraf $H \subseteq G$ dengan pelabelan-k total φ. Maka bobot dari subgraf H definisikan

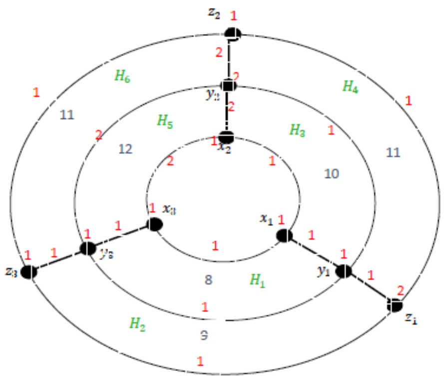
$$wt_{\varphi}(H) = \sum_{v \epsilon V(H)} \varphi(v) + \sum_{e \epsilon E(H)} \varphi(e).$$

Definisi 2.6.2 *Misal G merupakan suatu graf yang mempunyai suatu selimut-H, dengan suatu pelabelan-k total φ. Pelabelan-k total disebut pelabelan-k total tidak teratur-H jika untuk setiap bobot dua subgraf berbeda H' dan H'' yang isomorfik dengan H, maka $wt_{\varphi}(H') \neq wt_{\varphi}(H'')$.*

Contoh dapat dilihat pada gambar 2.10



(a)



(b)

Gambar 2.10 (a) Pelabelan– k total tidak teratur C_4 pada graf $C_3 \times P_3$. (b) Bukan pelabelan– k total tidak teratur C_4 pada graf $C_3 \times P_3$

Gambar 2.10 (a) merupakan graf $C_3 \times P_3$ yang mempunyai selimut$-C_4$ terdiri dari $H_1, H_{2,}H_3, H_4, H_5, H_6$. Misalkan φ adalah pelabelan$-k$ total tidak teratur C_4, maka pelabelan titiknya adalah :

$\varphi(x_1) = 1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(x_3) = 1$

$\varphi(y_1) = 1$, $\varphi(y_2) = 2$, $\varphi(y_3) = 1$

$\varphi(z_1) = 1$, $\varphi(z_2) = 2$, $\varphi(z_3) = 2$

Sedangkan pelabelan sisinya adalah :

$\varphi(x_1, x_2) = 1$, $\varphi(x_2, x_3) = 2$, $\varphi(x_3, x_1) = 1$

$\varphi(y_1, y_2) = 1$, $\varphi(y_2, y_3) = 2$, $\varphi(y_3, y_1) = 1$

$\varphi(z_1, z_2) = 1$, $\varphi(z_2, z_3) = 1$, $\varphi(z_3, z_1) = 1$

$\varphi(x_1, y_1) = 1$, $\varphi(y_1, z_1) = 1$

$\varphi(x_2, y_2) = 2$, $\varphi(y_2, z_2) = 2$

$\varphi(x_3, y_3) = 1$, $\varphi(y_3, z_3) = 1$

Bobot subgraf H_i dari graf $C_3 \times P_3$ adalah $wt_\varphi(H_1) = 8$, $wt_\varphi(H_2) = 9$, $wt_\varphi(H_3) = 10$, $wt_\varphi(H_4) = 11$, $wt_\varphi(H_5) = 12$, $wt_\varphi(H_6) = 13$. Pada gambar 2.10 (a) bobot setiap subgraf berbeda, maka dapat dikatakan bahwa gambar 2.10 (a) merupakan pelabelan-k total tidak teratur $- C_4$.

Gambar 2.10 (b) merupakan graf $C_3 \times P_3$ yang mempunyai selimut$-\,C_4$ terdiri dari $H_1, H_{2,}H_3, H_4, H_5, H_6$. Misalkan φ adalah pelabelan$-\,k$ total tidak teratur C_4, maka pelabelan titiknya adalah :

$\varphi(x_1) = 1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(x_3) = 1$

$\varphi(y_1) = 1$, $\varphi(y_2) = 2$, $\varphi(y_3) = 1$

$\varphi(z_1) = 2$, $\varphi(z_2) = 1$, $\varphi(z_3) = 1$

Sedangkan pelabelan sisinya adalah :

$\varphi(x_1, x_2) = 1$, $\varphi(x_2, x_3) = 1$, $\varphi(x_3, x_1) = 2$

$\varphi(y_1, y_2) = 1$, $\varphi(y_2, y_3) = 2$, $\varphi(y_3, y_1) = 1$

$\varphi(z_1, z_2) = 1$, $\varphi(z_2, z_3) = 1$, $\varphi(z_3, z_1) = 1$

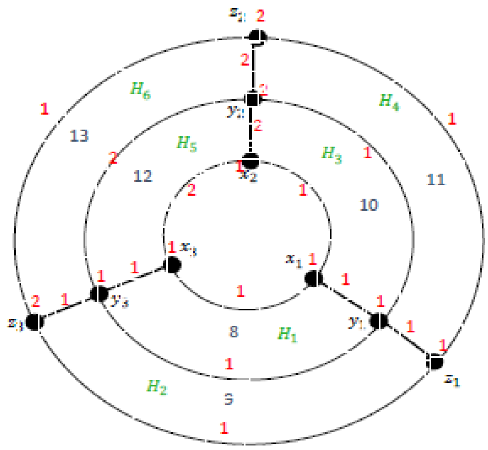
$\varphi(x_1, y_1) = 1$, $\varphi(y_1, z_1) = 1$

$\varphi(x_2, y_2) = 2$, $\varphi(y_2, z_2) = 2$

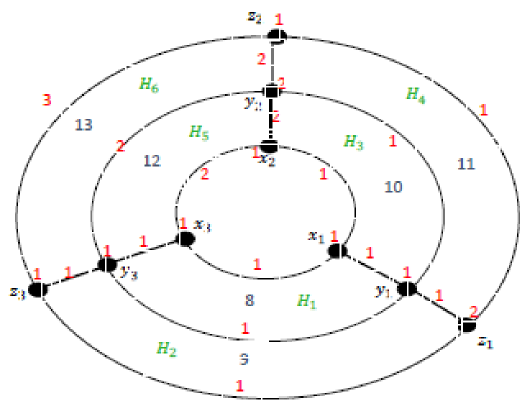
$\varphi(x_3, y_3) = 1$, $\varphi(y_3, z_3) = 1$

Bobot subgraf H_i dari graf $C_3 \times P_3$ adalah $wt_\varphi(H_1) = 8$, $wt_\varphi(H_2) = 9$, $wt_\varphi(H_3) = 10$, $wt_\varphi(H_4) = 11$, $wt_\varphi(H_5) = 12$, $wt_\varphi(H_6) = 11$. Karena $wt_\varphi(H_4) = wt_\varphi(H_6)$ maka dapat dikatakan bahwa gambar 2.10 (b) bukan merupakan pelabelan-k total teratur $-\,C_4$.

Definisi 2.6.3 *Misal G merupakan suatu graf yang mempunyai suatu selimut-* H *dengan suatu pelabelan-* k *total tidak teratur-*H*. Nilai total ketidakteraturan-* H *dari graf* G *adalah bilangan bulat positif terkecil, sedemikian sehingga graf* G *mempunyai suatu pelabelan-* k *total tidak teratur* H*, dinotasikan dengan* $ths(G, H)$*.*



(a)



(b)

mbar 2.11 Pelabelan– k total tidak teratur C_4 pada graf $C_3 \times P_3$

Gambar 2.11 (a) merupakan graf $C_3 \times P_3$ yang mempunyai selimut$-C_4$ terdiri dari $H_1, H_{2,} H_3, H_4, H_5, H_6$. Misalkan φ adalah pelabelan$-k$ total tidak teratur C_4, maka pelabelan titiknya adalah :

$\varphi(x_1) = 1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(x_3) = 1$

$\varphi(y_1) = 1$, $\varphi(y_2) = 2$, $\varphi(y_3) = 1$

$\varphi(z_1) = 1$, $\varphi(z_2) = 2$, $\varphi(z_3) = 2$

Sedangkan pelabelan sisinya adalah :

$\varphi(x_1, x_2) = 1$, $\varphi(x_2, x_3) = 2$, $\varphi(x_3, x_1) = 1$

$\varphi(y_1, y_2) = 1$, $\varphi(y_2, y_3) = 2$, $\varphi(y_3, y_1) = 1$

$\varphi(z_1, z_2) = 1$, $\varphi(z_2, z_3) = 1$, $\varphi(z_3, z_1) = 1$

$\varphi(x_1, y_1) = 1$, $\varphi(y_1, z_1) = 1$

$\varphi(x_2, y_2) = 2$, $\varphi(y_2, z_2) = 2$

$\varphi(x_3, y_3) = 1$, $\varphi(y_3, z_3) = 1$

Bobot subgraf H_i dari graf $C_3 \times P_3$ adalah $wt_\varphi(H_1) = 8$, $wt_\varphi(H_2) = 9$, $wt_\varphi(H_3) = 10$, $wt_\varphi(H_4) = 11$, $wt_\varphi(H_5) = 12$, $wt_\varphi(H_6) = 13$.

Gambar 2.11 (b) merupakan graf $C_3 \times P_3$ yang mempunyai selimut$-C_4$ ari $H_1, H_{2,} H_3, H_4, H_5, H_6$. Misalkan φ adalah pelabelan$-k$ total tidak $_4$, maka pelabelan titiknya adalah :

$\varphi(x_1) = 1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(x_3) = 1$

$\varphi(y_1) = 1$, $\varphi(y_2) = 2$, $\varphi(y_3) = 1$

$\varphi(z_1) = 2$, $\varphi(z_2) = 1$, $\varphi(z_3) = 1$

Sedangkan pelabelan sisinya adalah :

$\varphi(x_1, x_2) = 1$, $\varphi(x_2, x_3) = 1$, $\varphi(x_3, x_1) = 2$

$\varphi(y_1, y_2) = 1$, $\varphi(y_2, y_3) = 2$, $\varphi(y_3, y_1) = 1$

$\varphi(z_1, z_2) = 1$, $\varphi(z_2, z_3) = 3$, $\varphi(z_3, z_1) = 1$

$\varphi(x_1, y_1) = 1$, $\varphi(y_1, z_1) = 1$

$\varphi(x_2, y_2) = 2$, $\varphi(y_2, z_2) = 2$

$\varphi(x_3, y_3) = 1$, $\varphi(y_3, z_3) = 1$

Bobot subgraf H_i dari graf $C_3 \times P_3$ adalah $wt_\varphi(H_1) = 8$, $wt_\varphi(H_2) = 9$, $wt_\varphi(H_3) = 10$, $wt_\varphi(H_4) = 11$, $wt_\varphi(H_5) = 12$, $wt_\varphi(H_6) = 13$.

Pada Gambar 2.11(a) merupakan pelabelan-2 total tidak teratur C_4 pada graf $C_3 \times P_3$, sedangkan Gambar 2.11(b) merupakan pelabelan-3 total tidak teratur C_4 pada graf $C_3 \times P_3$. Sehingga diperoleh *k* terkecil adalah 2. Dengan demikian nilai total ketidakteraturan$-C_4$ pada graf $C_3 \times P_3$ adalah 2.

Pada tahun 2017, Bača dkk telah menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan-H untuk sebarang graf G, seperti yang ditulis pada Teorema 2.6.1.

Teorema 2.6.1: *Misalkan G adalah graf yang mempunyai selimut-H dengan banyaknya t subgraf yang isomorfik dengan H, maka*

$$ths(G,H) \geq \left\lceil 1 + \frac{t-1}{|V(H)| + |E(H)|} \right\rceil,$$

Dimana $|V(H)|$ dan $|E(H)|$ masing-masing merupakan banyaknya titik dan banyaknya sisi pada subgraf H.

Misalkan G suatu graf yang memuat H-selimut dengan banyaknya subgraf t yang isomorfik dengan H. φ dinyatakan sebagai pelabelan-k total tidak teratur H dari graf G dengan $ths\,(G,H) = k$. Bobot subgraf terkecil H dari pelabelan-k total adalah $|V(H)| + |E(H)|$.

G. Kerangka Konseptual

Pada penelitian ini, terdapat beberapa tahapan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan graf $C_n \times P_3$ antara lain:

1. Mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi kemudian mengkonstruksi label sisi dan titik $f = V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$, kemudian k adalah bilangan bulat positif terkecil.
2. Mendefinisikan fungsi pelabelan-k total tidak teratur C_m dari graf $C_n \times P_3$.

3. Menghitung bobot dan menunjukkan bahwa fungsi bobot dari setiap subgraf berbeda.