OPTIMASI BIAYA PRODUKSI PADA INDUSTRI KERAJINAN KAIN TENUN BUTON MENGGUNAKAN METODE KARUSH-KUHN-TUCKER

SKRIPSI

SRI AYUWATI

H 111 13 502

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2019

OPTIMASI BIAYA PRODUKSI PADA INDUSTRI KERAJINAN KAIN TENUN BUTON MENGGUNAKAN METODE KARUSH-KUHN-TUCKER

S K R I P S I

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Progam Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin Makassar

SRI AYUWATI

H 111 13 502

PROGRAM STUDI MATEMATIKA DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HASANUDDIN

MAKASSAR

2019

LEMBAR PERNYATAAN KEOTENTIKAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi yang saya buat dengan judul:

Optimasi Biaya Produksi Pada Industri Kerajinan Kain Tenun Buton Menggunakan Metode Karush-Kuhn-Tucker

adalah benar hasil karya saya sendiri, bukan hasil plagiat dan belum pernah dipublikasikan dalam bentuk apapun.

Makassar, 16 April 2019

materai

SRI AYUWATI

NIM. H 111 13 502

OPTIMASI BIAYA PRODUKSI PADA INDUSTRI KERAJINAN KAIN TENUN BUTON MENGGUNAKAN METODE KARUSH-KUHN-TUCKER

SKRIPSI

SRI AYUWATI

H11113502

Telah Diperiksa dan Disetujui

Tanggal: 16 April 2019

Pembimbing Utama	Pembimbing Pertama
Prof. Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti , M.S.	Dr.Firman, S.Si., M.Si
NIP. 19570705 198503 2001	NIP. 19680429 200212 1001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	: SRI AYUWATI
NIM	: H11113502
Program Studi	: Matematika
Judul Skripsi	: Optimasi Biaya Produksi Pada Industri Kerajinan Kain Tenun Buton Menggunakan Metode Karush-Kuhn-Tucker

Telah berhasil dipertahankan dihadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin.

Dewan Penguji

1. Ketua : **Prof. Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti,M.S.** (..................................)

2. Sekretaris : **Dr. Firman, S.Si.,M.Si.** (..................................)

3. Anggota : **Prof. Dr. Hasmawati, M.Si.** (..................................)

4. Anggota : **Dr. Kasbawati, S.Si., M.Si** (..................................)

Ditetapkan di : Makassar

Tanggal : 16 April 2019

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Kuasa atas segala kasih karunia dan berkat-Nya yang senantiasa memberikan keselamatan, kesehatan, dan hikmat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Optimasi Biaya Produksi Pada Industri Kerajinan Kain Tenun Buton Menggunakan Metode Karush-Kuhn-Tucker**" untuk memenuhi persyaratan dalam meraih gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih sebagai wujud penghargaan kepada orang tua tercinta, La Djohani S.pd dan Dra. Hartini yang memberikan doa, nasihat, dukungan, dan kasih sayang yang tulus kepada penulis. Salah satu dari bentuk nasihat yang sangat berarti bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini walaupun berbagai hambatan yang dialami adalah untuk menjadi seseorang yang gigih.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Hj. Aidawayati Rangkuti, M.S., selaku pembimbing utama dan Dr. Firman, S.Si.,M.Si. selaku pembimbing pertama, yang dengan penuh kesabaran dan keikhlasan meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk mengarahkan dan membimbing penulis mulai dari awal penyusunan sampai selesainya.

Penghargaan yang tulus dan ucapan terima kasih dengan penuh keikhlasan juga penulis ucapkan kepada :

1. Prof. Dr. Amir Kamal Amir, M.Sc., selaku Ketua Departemen Matematika, Dr. Amran, S.Si., M.Si., selaku Sekretaris Departemen Matematika, dan segenap bapak dan ibu dosen serta staf Departemen Matematika, yang telah membekali ilmu dan bantuannya selama ini kepada penulis.
2. ...f. Dr. Hasmawati, S.Si., M.Si., selaku ketua tim penguji, dan Dr. ...bawati, S.Si., M.Si selaku sekretaris tim penguji, sekaligus penasihat

akademik yang telah meluangkan waktu untuk memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyusunan skripsi ini.

3. Saudara-saudaraku yang telah memberikan doa dan kasih sayangnya.
4. Teman-teman seperjuangan Matematika dan Statistika 2013, yang telah memberi banyak bantuan dan semangatnya kepada penulis selama berkuliah di Universitas Hasanuddin.
5. Teman-teman posko KKN Unhas Gelombang 93 di Desa Sakkoli, kecamatan Sajoanging, Kabupaten Wajo.
6. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebut satu per satu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun akan penulis terima untuk menyempurnakan tugas akhir ini di masa yang akan datang. Akhir kata, penulis berharap tugas akhir ini dapat memberikan manfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi semua pihak yang membacanya. Amin.

Makassar, 16 April 2019

Penulis

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai civitas akademik Universitas Hasanuddin, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	SRI AYUWATI
NIM	:	H11113502
Program Studi	:	Matematika
Departemen	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya	:	Skripsi

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Hasanuddin **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (***Nonexclusive Royalty and Free Right***) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

"Optimasi Biaya Produksi Pada Industri Kerajinan Kain Tenun Buton Menggunakan Metode Karush-Kuhn-Tucker"

Beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Terkait dengan hal di atas, maka pihak universitas berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/ pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan saya buat dengan sebenarnya.

Makassar, 16 April 2019

Yang menyatakan,

(SRI AYUWATI)

ABSTRAK

Optimisasi adalah suatu proses atau cara untuk memperoleh nilai maksimal atau minimal dari sebuah fungsi dengan mempertimbangkan beberapa kendala yang diberikan. Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah membentuk model matematika untuk pengoptialan total biaya produksi industry kerajinan kain tenun UT.Yulianti dengan menggunakan metode *Karush-Kuhn-Tucker*. Model matematika yang diperoleh berupa model nonlinier yang dibentuk menggunakan perhitungan regresi nonlinier dan aplikasi geogebra. Dala hal ini, model dipilih dari jenis kain tenun Bia Bunga, Bia Katambagawu, Bia Leja, Bia Kasopa, dan Bia samasili. Fungsi tujuan dari model tersebut adalah meminimumkan total biaya produksi. Dari hasil perhitungan menunjukan nahwa total biaya produksi minimal selaa satu bulan pada industry kerajinan kain tenun UT. Yulianti sebesar Rp 27.734.762,59. Dengan jenis kain tenun Bia Bunga sebanyak 35 buah, Bia Katambagawu sebanyak 40 buah, Bia Leja sebanyak 55 buah, Bia Kasopa sebanyak 50 buah, Bia Samasili sebanyak 35 buah, sehingga metode *Karush-Kuhn-Tucker* dapat digunakan untuk menentukan solusi optimal khususnya untuk bidang industry dalam memperoleh total biaya produksi yang minimal.

Kata Kunci : Optimasi, Pengali Lagrange, dan Karush-Kuhn-Tucker

ABSTRACT

optimization is a process or way to obtain the maximum or minimum value of a function by considering several constraints given. The purpose of this thesis is to form a mathematical model to optimize the total production costs of UT.Yulianti's woven fabric industry using the Karush-Kuhn-Tucker method. The mathematical model obtained is a nonlinear model formed using calculations of Nonlinear Regression and Geogebra Applications. In this case, the model was chosen from the type of Bia Bunga woven cloth, Bia Katambagawu, Bia Leja, Bia Kasopa, and Bia Samasili. The objective function of the model is to minimize total production costs. From the calculation results show that the total production cost is at least one month in the UT.Yulianti woven fabric craft industry amounting to Rp27,734,762.59. With 35 types of bia flower woven cloth, 40 pieces of katambagawu, 55 pieces of bja leja, 50 pieces of kasopa bia, and 30 pieces of fruit. So that the Karush-Kuhn-Tucker Method can be used to determine optimal solutions especially for industrial fields in obtaining a minimum total production cost.

Key words: Optimization, Lagrange Multiplier, Karush-Kuhn-Tucker

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah suatu cabang logika yang menyediakan suatu kerangka sistematis. Dalam matematika, definisi, aksioma, dan anggapan-anggapan dinyatakan secara tepat dengan mengunakan lambang-lambang sedangkan kesimpulannya dapat ditarik dengan proses analisis deduktif. Sedangkan ilmu ekonomi adalah ilmu yang memusat pada konsep-konsep kuantitatif, misalnya: harga, biaya, tingkat upah, investasi, penghasilan, dan laba. Dari kedua hal di atas dapat disimpulkan bahwa analisis ekonomi tidak bisa dilepaskan dari matematika. Apabila variabel ekonomi dinyatakan dengan lambang-lambang maka nilainya dinyatakan secara matematis. Matematika menyediakan teknik untuk menganalisis arti diantara lambang-lambang tersebut, yang berarti juga arti dari variabel-variabel yang diwakilinya. Oleh karena itu banyak analisis ekonomi yang kemudian menggunakan analisis matematika terapan. Dalam ekonomi dikenal juga masalah optimasi (Ridwan, 2007).

Optimasi adalah suatu disiplin ilmu dalam matematika yang fokus untuk mendapatkan nilai minimal atau maksimal secara sistematis dari suatu fungsi, peluang maupun pencarian nilai lainnya dalam berbagai kasus. Optimasi sangat berguna di hampir segala bidang dalam rangka melakukan usaha secara efektif dan efisien untuk mencapai target hasil yang ingin dicapai, sehingga Optimasi sangat penting dalam persaingan di dunia industri yang sudah sangat ketat di segala bidang yang ada. Terdapat dua jenis masalah optimasi berdasarkan keberadaan kendala yaitu masalah optimasi tanpa kendala dan masalah optimasi dengan kendala. Masalah optimasi juga dapat diklasifikasikan berdasarkan linearitasnya yaitu masalah optimasi pemrograman linear dan nonlinear.

nograman Linear (PL) merupakan suatu metode untuk membuat n diantara berbagai alternative kegiatan pada waktu kegiatan-kegiatan dibatasi oleh kegiatan tertentu. Keputusan yang akan diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan (*objective function*), sedangkan kendala-kendala yang dihadapi dalam membuat keputusan tersebut dinyatakan dalam bentuk fungsi kendala (*Constraints*). Sesuai dengan model pemrograman linear, maka fungsi tujuan berupa fungsi linear dan fungsi kendala berupa sekumpulan ketidaksamaan yang linear (Rangkuti, 2013: 24).

Suatu permasalahan optimasi disebut nonlinier jika fungsi tujuan dan kendalanya mempunyai bentuk nonlinier pada salah satu atau keduanya. Tidak semua masalah yang terjadi dapat dibentuk menjadi model linear. Kompleksitas masalah yang dihadapi oleh suatu usaha seperti misalnya penentuan biaya pengeluaran ataupun penentuan jumlah persediaan sering membuat optimasi yang dibentuk merupakan model nonlinear.

Pada diferensial fungsi majemuk telah dikenal konsep diferensial parsial. Dalam diferensial fungsi majemuk juga dapat dilakukan penyelidikan mengenai kedudukan khusus dari sebuah fungsi seperti halnya diferensial pada sebuah fungsi dengan satu variabel bebas. Nilai-nilai ekstrim (maksimal atau minimal) dari sebuah fungsi majemuk dapat dicari dengan menggunakan konsep diferensial parsial. Dalam penerapannya sering kali diharuskan untuk mengoptimalkan (menentukan nilai ekstrim) dari sebuah fungsi, yakni menentukan nilai maksimal atau minimal suatu fungsi, tetapi ada syarat yang harus dipenuhi. Dengan kata lain fungsi yang hendak dioptimalkan menghadapi suatu kendala (*constraint*). Kasus optimasi bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. Misalnya seseorang hendak memaksimalkan utilitas, atau tingkat kepuasannya tetapi terikat pada fungsi pendapatan, atau sebuah perusahaan yang ingin memaksimalkan labanya namun terikat pada fungsi produksi. Maka suatu cara yang dapat digunakan untuk menentukan titik ekstrim dari suatu fungsi yang bersyarat adalah dengan menggunakan metode Karush-Khun-Tucker. Metode Karush-Kuhn-Tucker merupakan Salah satu metode yang dapat menyelesaikan permasalahan optimisasi fungsi nonlinier dengan kendala berupa pertidaksamaan menggunakan perhitungan secara analitik.

Industri di Indonesia merupakan salah satu komponen perekonomian yang penting karena dapat membawa perubahan dalam struktur perekonomian nasional. Jenis industri di Indonesia yang banyak diminati adalah industri kerajinan (*Handicraft Industry*). Industri kerajinan (*Handicraft Industry*) di Indonesia sangat beragam, salah satunya adalah usaha dagang tenun, diantaranya usaha tenun (UT) Yulianti yang beralamat di jl.Hayam Wuruk kel.Tarafu Kota Bau-Bau. Salah satu nilai tambah dari usaha tenun ini adalah produk yang dihasilkan memiliki kualitas yang bagus dan harga jual yang sesuai. Kondisi tersebut menjadi kendala dalam penentuan jumlah produksi untuk meminimalkan biaya produksi. Hal ini dirasa perlu mengingat banyaknya minat terhadap produk ini dan juga kualitas yang harus tetap dijaga.

Terdapat dua model pemasaran kain tenun pada UT.yulianti yaitu dengan penjualan langsung dan membuka jasa pemesanan. Hal ini mengakibatkan kegiatan produksi setiap bulannya tidak selalu tetap .Jumlah biaya produksi yang berubah-ubah ini mengakibatkan model matematika yang akan diterapkan merupakan jenis model nonlinear.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka dilakukan penelitian dengan Judul :

“**Optimasi Biaya Produksi Pada Industri Kerajinan Kain Tenun Buton Menggunakan Metode Karush-Kuhn-Tucker** “

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dirumuskan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana membentuk model matematika untuk pengoptimalan biaya produksi industri kerajinan kain tenun UT.Yulianti?
2. Bagaimana penyelesaian model dengan metode Karush-Kuhn-Tucker?

tasan Masalah

ulisan skripsi ini membahas tentang langkah penyelesaian model nonlinier dan penerapannya dalam penentuan biaya produksi optimal pada industri kerajinan UT. Yulianti untuk 1 bulan produksi. Penyelesaian dengan metode Karush-Kuhn-Tucker yang kemudian diaplikasikan pada industri kerajinan UT.Yulianti.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membentuk model matematika untuk pengoptimalan total biaya produksi industri kerajinan kain tenun UT.Yulianti
2. Menyelesaiakan model menggunakan metode Karush-Kuhn-Tucker.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah :

a. Bagi Penulis
   1. Sebagai sarana untuk menambah pengetahuan dan wawasan dalam penerapan teori-teori yang sudah diperoleh di perkuliahan.
   2. Dapat mengaplikasikan teori tentang metode Karush-Kuhn-Tucker

b. Bagi Usaha dagang UT.Yulianti
   1. Memberikan biaya produksi yang optimal untuk produksi kain tenun.
   2. Dapat dijadikan acuan untuk meningkatkan produksi kain tenun.

c. Bagi Pembaca

   a. Menambah pemahaman tentang optimasi model nonlinear dengan menggunakan metode Karush-Kuhn-Tucker

   b. Bahan referensi dalam kajian optimasi biaya produksi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Kajian pustaka pada bab ini akan membahas tentang pengertian dan penjelasan yang berkaitan dengan fungsi, turunan parsial, pemrograman linear, pemrograman nonlinear, fungsi konveks dan konkaf, pengali *lagrange*, dan Syarat Karush-Kuhn-Tucker. Kajian pustaka pada penelitian ini akan digunakan pada bab selanjutnya.

2.1 Fungsi

Definisi 2.1. Fungsi

Sebuah fungsi $\boldsymbol{f}$ *adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek* x *dalam satu himpunan, yang disebut* ***daerah asal****, dengan sebuah nilai unik* $f(x)$ *dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut* ***daerah hasil*** *(jelajah) fungsi tersebut.*

Contoh 2.1

Jika f adalah fungsi dengan aturan $f(x) = x^2 + 2$ dan daerah asal dirinci sebagai {-1, 0, 1, 2, 3}, maka daerah hasilnya adalah { 2, 3, 6, 11}.

Definisi 2.2. Fungsi Konstanta

Fungsi konstan (tetap) didefinisikan dengan $f = x \to c$ *atau* $f(x) = c$ *dimana c konstan.*

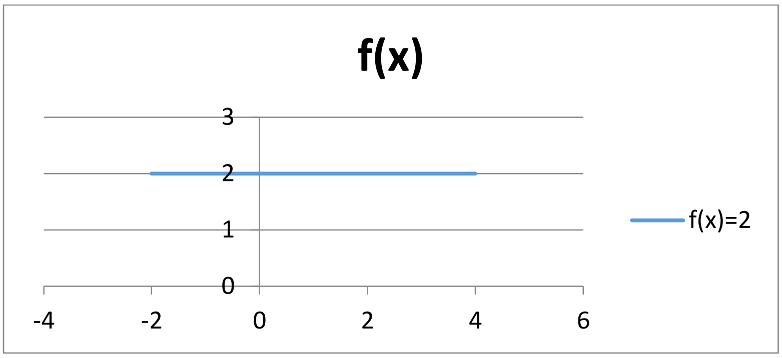
Contoh 2.2

Diketahui $f: R \to R$ dengan rumus $f(x) = 2$ dengan daerah domain : $\{x| -2 \leq x < 5\}$, tentukan gambar grafiknya.

Penyelesaian:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	2	2	2	2	2	2

Be...ikut adalah gambar grafik dari fungsi $f(x) = 2$, dengan domain ... $\leq x < 5\}$.



Gambar 1. grafik fungsi $f(x) = 2$

Definisi 2.3. Fungsi Identitas

Suatu fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ dikatakan fungi identitas bila setiap anggota domain (daerah asal) fungsi berlaku $\boldsymbol{f(x) = x}$ dengan x anggota R, atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.

Contoh 2.3

Pada R didefinisikan sebagai $f(x) = x$ atau setiap x. Carilah $f(3)$

Penyelesaian :

$f(x) = x$

$f(3) = 3$

Jadi $f(3) = 3$ adalah fungsi identitas.

Definisi 2.4. Fungsi Polinomial

Sebarang fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstanta dan fungsi identitas dengan menggunakan operasi penambahan, pengurangan, perkalian dan pangkat bilangan bulat tak negativ disebut fungsi polinomial.

Suatu fungsi polinomial dapat ditulis dalam bentuk $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ anggota bilangan real. Jika $a_n \neq 0$, maka n adalah derajat fungsi polinomial tersebut (Purcell, 2010).

Contoh 2.4

ketahui $f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x + 6$, tentukan nilai suku banyak $f(x)$

$= -1$

nyelesaian :

$$f(x) \quad = 2x^4 + x^2 - 4x + 6$$

$$f(-1) = 2(-1)^4 + (-1)^2 - 4(-1) + 6$$

$$= 2 + 1 + 4 + 6$$

$$= 13$$

Jadi nilai suku banyak $f(x)$ untuk $x = -1$ adalah 1

2.2 Fungsi Konveks dan Konkaf

Konsep konfeksitas sering digunakan dalam bidang penelitian operasional, terutama dalam ruang lingkup pemrograman nonlinier. Konsep fungsi konveks berhubungan langsung dengan himpunan konveks. Jadi, jika $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah fungsi konveks maka kumpulan titik-titik yang teletak diatas atau pada grafik $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ membentuk himpunan konveks. Hal yang sama, kumpulan titik yang terletak dibawah atau pada grafik fungsi konkaf adalah himpunan konveks.

2.2.1 Fungsi Konveks atau konkaf satu variabel

Definisi 2.5.

Fungsi satu variable $f(x)$ disebut fungsi konveks jika setiap pasangan nilai x, Katakanlah x' dan $x''(x' < x'')$. $f[\lambda f x'' + (1-\lambda)x'] \leq \lambda f(x'') + (1-\lambda)f(x')$ untuk semua nilai λ yang memenuhi $0 < \lambda < 1$. Fungsi tersebut merupakan fungsi konveks ketat jika $\leq$ dapat diganti $<$ dan merupakan fungsi konkaf (fungsi konkaf ketat) jika pernyataan $\leq$ duganti dengan $\geq$ (atau dengan $>$).

$f(x)$ bersifat konveks jika untuk setiap pasang titik pada grafik $f(x)$, segmen garis yang menghubungkan terletak pada ataupun diatas grafik $f(x)$ dan begitu juga sebaliknya untuk fungsi konkaf. Tepatnya jika memiliki turunan kedua, maka $f(x)$ bersifat konveks jika dan hanya jika $d^2 f(x)/dx^2 > 0$ untuk setiap nilai x yang mungkin.

...unan parsial kedua dapat digunakan untuk menguji konveks atau ...a suatu fungsi f dengan banyak variabel. Uji konveksitas untuk fungsi satu variabel $f(x)$ yang memiliki turunan kedua untuk setiap nilai x yang mungkin. Dengan demikian, fungsi $f(x)$ dapat bersifat:

1. Konveks jika dan hanya jika $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \geq 0$ untuk setiap nilai x yang mungkin,
2. Konveks ketat jika dan hanya jika $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0$ untuk setiap nilai x yang mungkin,
3. Konkaf jika dan hanya jika $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \leq 0$ untuk setiap nilai x yang mungkin,
4. Konkaf ketat jika dan hanya jika $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} < 0$ untuk setiap nilai x yang mungkin.

2.2.2 Fungsi Konveks dan Konkaf untuk beberapa variabel

Konsep fungsi konveks dan konkaf dari satu variabel dapat digeneralisasikan untuk fungsi dengan lebih dari satu variabel. Dengan demikian, saat $f(x)$ digantikan dengan fungsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definisi masih diterapkan apabila x digantikan oleh $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Hal yang sama penafsiran geometri yang berhubungan juga berlaku setelah generalisasi konsep titik dan segmen garis. Jadi, sama dengan nilai (x, y) tertentu ditafsirkan sebagai sebuah titik dalam ruang dua dimensi. Setiap kemungkinan nilai dari $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dapat diartikan sebagai titik dalam ruang $m -$ dimensi (ruang Euclide).

Misalkan $m = n + 1$, titik pada grafik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ menjadi nilai yang mungkin dari titik $[x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Kemudian, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ dikatakan terletak diatas, tepat, atau dibawah grafik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tergantung pada nilai x_{n+1} yang lebih besar, sama dengan atau lebih kecil daripada $f(x_1, x_2, \ldots, x_m^n)$.

Definisi 2.6.

Segmen garis yang menghubungkan kedua titik $(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ *dan* $(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ *merupakan penjumlahan titik-titik*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = [\lambda x_1'' + (1-\lambda)x_1', \lambda x_2'' + (1-\lambda)x_2', \ldots, \lambda x_m'' + (1-\lambda)x_m']$$

Dengan $0 \leq \lambda \leq 1$. *Jadi segmen garis dalam ruang* $m -$ *dimensi merupakan generalisasi langsung dari segmen dalam ruang dimensi.*

Definisi 2.7.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *merupakan fungsi konveks jika untuk setiap pasang titik pada grafik* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *segmen garis yang menghubungkan kedua titik tersebut seluruhnya terletak diatas atau tepat pada grafik fungsi* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Fungsi tersebut merupakan fungsi konveks ketat jika segmen garis tersebut seluruhnya terletak diatas grafik kecuali pada kedua titik akhirnya. Begitu juga sebaliknya untuk fungsi konkaf dan fungsi konkaf ketat.*

Turunan parsial kedua dapat digunakan untuk menguji fungsi banyak variabel konveks atau tidak, meskipun dengan cara yang lebih kompleks. Misalnya, jika terdapat dua variabel dan semua turunan parsial ada di semua tempat, uji konveksitas menilai tiga kuantitas memenuhi pertidaksamaan yang sesuai untuk semua nilai (x_1, x_2) yang mungkin seperti yang ditunjukkan pada tabel 1 berikut ini(Hillier dan Lieberman, 2008):

Tabel 1 Fungsi Konveks dan Konkaf dengan Dua Variabel

Kuantitas	Konveks	Konveks Ketat	Konkaf	Konkaf Ketat
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^2} \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^2 \partial {x_2}^2}\right]$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0

Sumber : Hillier dan Lieberman, 2008

2.3 Turunan

Definisi 2.8. Turunan

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{2.1}$$

Asalkan limit ini ada.

Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensialkan (terturunkan) di c (Purcell, 2010)..

Contoh 2.5

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 + 7x$, tentukan $f'(x)$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 + 7(x+h)] - [x^3 + 7x]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^3 + 7) \\ &= 3x^2 + 7 \end{aligned}$$

2.4 Turunan Parsial

Definisi 2.9.

Jika f suatu fungsi dengan n variabel, maka turunan parsial fungsi f terhadap x_1 di $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinyatakan oleh $f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atau $\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1}$ didefinisikan oleh:

$$f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x} \tag{2.2}$$

Turunan parsial terhadap $x_2, \dots, x_n$ didefinisikan dengan cara yang sama (Purcell, 2010)..

Contoh 2.6

Diberikan fungsi $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 + x_2 + 1$. Tentukan turunan parsial terhadap x_1.

Penyelesaian:

$$f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x}$$

$$f_{x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x_1)^2 x_2 + x_2 + 1 - ({x_1}^2 x_2 + x_1 + x_2 + 1)}{\Delta x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{2x_1 \Delta x_1 x_2 + (\Delta x_1)^2 x_2 + \Delta x}{\Delta x_1}$$

$$= 2x_1 x_2 + 1$$

Berikut diberikan notasi turunan parsial untuk variabel n dan dua variabel.

1. Turunan Parsial Fungsi n Variabel

Diberikan fungsi n variabel dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan persamaan $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka turunan-turunan parsialnya yaitu:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = f_{x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} = f_{x_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} = f_{x_n} \qquad (2.3)$$

Khusus untuk fungsi tiga variabel $x. y. z$ dari dengan persamaan

$$w = f(x, y, z),$$

maka turunan-turunan parsialnya yaitu

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z), \frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z), \frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z), \qquad (2.4)$$

2. Turunan Parsial Dua Variabel

...gertian dan notasi turunan parsial derajat dua fungsi $z = f(x, y)$ ...n dalam simbol-simbol berikut :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = z_{xx} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (2.5a)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = z_{yy} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2.5b)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = z_{yx} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2.5c)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (2.5d)$$

2.5 Optimasi

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia optimasi merupakan upaya atau cara untuk memperoleh hasil yang terbaik. optimasi dapat didefinisikan sebagai proses untuk menemukan kondisi yang memberikan nilai maksimal dan minimal dari suatu fungsi. Berdasarkan beberapa definisi tersebut maka dapat disimpulkan bahwa optimasi adalah suatu proses atau cara untuk memperoleh nilai maksimal atau minimal dari sebuah fungsi dengan mempertimbangkan Beberapa Kendala Yang Diberikan (Rao, 2009 : 1).

Optimisasi Hasil Produksi

Optimasi merupakan pendekatan normatif dengan mengidentifikasi penyelesaian terbaik dari suatu permasalahan yang diarahkan pada titik maksimal atau minimal suatu fungsi tujuan . Optimasi produksi diperlukan perusahaan dalam rangka mengoptimalkan sumberdaya yang digunakan agar suatu produksi dapat menghasilkan produk dalam kuantitas dan kualitas yang diharapkan, sehingga perusahaan dapat mencapai tujuannya. Optimasi produksi adalah penggunaan faktor-faktor produksi yang terbatas seefisien mungkin. Faktor-faktor produksi tersebut adalah modal, mesin, peralatan, bahan baku, bahan pembantu dan tenaga kerja .

Berdasarkan langkah-langkah optimasi setelah masalah diidentifikasi dan tujuan ditetapkan maka langkah selanjutnya adalah memformulasikan model matematik yang meliputi tiga tahap , yaitu:

Menentukan variabel yang tidak diketahui (variabel keputusan) dan nyatakan dalam simbol matematik,

2. Membentuk fungsi tujuan yang ditunjukkan sebagai hubungan linier (bukan perkalian) dari variabel keputusan,
3. Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikan dalam persamaan atau pertidaksamaan yang juga merupakan hubungan linier dari variabel keputusan yang mencerminkan keterbatasan sumberdaya masalah tersebut.

Setiap perusahaan akan berusaha mencapai keadaan optimal dengan memaksimalkan keuntungan atau dengan meminimalkan biaya yang dikeluarkan dalam proses produksi. Perusahaan mengharapkan hasil yang terbaik dengan keterbatasan sumberdaya yang dimiliki, namun dalam mengatasi permasalahan dengan teknik optimasi jarang menghasilkan suatu solusi yang terbaik. Hal tersebut dikarenakan berbagai kendala yang dihadapi berada diluar jangkauan perusahaan. Optimasi dapat ditempuh dengan dua cara yaitu maksimisasi dan minimisasi. Maksimisasi adalah optimasi produksi dengan menggunakan atau mengalokasian input yang sudah tertentu untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal. Sedangkan minimisasi adalah optimasi produksi untuk menghasilkan tingkat output tertentu dengan menggunakan input atau biaya yang paling minimal. Persoalan optimasi dibagi menjadi dua jenis yaitu tanpa kendala dan dengan kendala. Pada optimasi tanpa kendala, faktor-faktor yang menjadi kendala atau keterbatasan-keterbatasan yang ada terhadap fungsi tujuan diabaikan sehingga dalam menentukan nilai maksimal atau minimal tidak terdapat batasan-batasan terhadap berbagai pilihan alternatif yang tersedia. Sedangkan pada optimasi dengan kendala, faktor-faktor yang menjadi kendala terhadap fungsi tujuan diperhatikan dalam menentukan titik maksimal atau minimal fungsi tujuan . Optimasi dengan kendala pada dasarnya merupakan persoalan dalam menentukan nilai variabel suatu fungsi menjadi maksimal atau minimal dengan memperhatikan keterbatasan-keterbatasan yang ada. Keterbatasan-keterbatasan itu meliputi input atau faktor-faktor produksi seperti modal, bahan baku, tenaga kerja n. Optimasi produksi dengan kendala perlu memperhatikan faktor-faktor njadi kendala pada fungsi tujuan karena kendala menentukan nilai l dan minimal. Fungsi tujuan merupakan suatu pernyataan matematis yang digunakan untuk mempresentasikan kriteria dalam mengevaluasi solusi suatu masalah. Fungsi tujuan dalam teknik optimasi produksi merupakan unsur yang penting karena akan menentukan kondisi optimal suatu keadaan . Fungsi tujuan dan kendala merupakan suatu fungsi garis lurus atau linier. Salah satu metode untuk memecahkan masalah optimasi produksi yang mencakup fungsi tujuan dan kendala adalah metode Linear Programming. Metode ini adalah suatu teknik perencanaan analitis dengan menggunakan model matematika yang bertujuan untuk menemukan beberapa kombinasi alternatif solusi (Dika, 2016).

2.6 Pemrograman Nonlinier

Pemrograman Non linier merupakan pemrograman dengan fungsi tujuannya saja atau bersama dengan fungsi kendala berbentuk non linier yaitu pangkat dari variabelnya lebih dari satu. Salah satu bentuk umum masalah pemrograman non linier adalah untuk menentukan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sehingga mencapai tujuan untuk:

Maksimalkan/minimalkan : $f(x)$

Dengan kendala : $g_m(x) \geq 0$ dan

: $x \geq 0$

Dengan $f(x)$ dan $g_m(x)$ merupakan fungsi yang diketahui dengan n variable keputusan(Amalia, 2009)

terdapat 3 bentuk permasalahan pemrograman nonlinear, yaitu :

1. Pemrograman Nonlinier Tak Berkendala

Pemrograman nonlinear tanpa kendala merupakan optimasi yang tidak memiliki kendala dengan fungsi tujuan berbentuk nonlinear. Bentuk model pemrograman nonlinear tanpa kendala untuk menentukan nilai $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan Fungsi tujuan : maksimal / minimal $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

...enyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear tanpa kendala ...dua syarat keoptimalan, yaitu :

...rat Perlu Keoptimalan

Syarat perlu keoptimalan digunakan untuk mencari titik-titik optimal pada pendekatan analitis. Syarat perlu keoptimalan mengatakan bahwa :

Jika solusi $x = x^*$ adalah titik optimal dari $f(x)$ maka :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

di $x = x^*$ untuk $j = 1,2, \dots n$

b. Syarat Cukup Keoptimalan

Syarat cukup keoptimalan digunakan untuk menentukan apakah titik optimal yang didapatkan dari syarat perlu keoptimalan merupakan titik minimal atau titik maksimal.
Syarat cukup keoptimalan yaitu :

Jika $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ dan H(x^*) definit positif maka x^* titik minimal

Jika $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ dan H(x^*) definit negatif maka x^* titik maksimal

2. Pemograman Nonlinier Berkendala

Pemrograman nonlinear dengan kendala linear merupakan optimasi dengan kendala berbentuk fungsi linear dan fungsi tujuan berupa fungsi nonlinear. Untuk menentukan nilai $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan bentuk umum adalah :

Maksimal/Minimal	:	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
Dengan kendala	:	$g_m(x) \leq 0$
		$g_m(x) = 0$
		$g_m(x) \geq 0$

Untuk $m = 1,2, \dots, n$

3. Pemrograman Nonlinear Dengan Kendala Nonlinear

Menurut pemrograman nonlinear dengan kendala nonlinear merupakan ...salah optimasi dengan fungsi tujuan nonlinear dan fungsi kendala ...linear. Pemrograman nonlinear berkendala nonlinear dibedakan ...njadi dua yaitu:

a. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bentuk umum pemrograman nonlinear dengan kendala kesamaan (*equality*) adalah

Fungsi tujuan : Maksimal/Minimal: $f = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Fungsi kendala : $g_m(x) = 0$

Dimana m menunjukkan jumlah kendala dan n menunjukkan jumlah variabel dengan $m \leq n$.

b. Bentuk umum pemrograman nonlinear dengan kendala pertidaksamaan adalah

Maksimal/Minimal: $f = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Dengan kendala : $g_m(x) \leq 0$

$g_m(x) \geq 0$

untuk $m = 1,2, \dots, n$ dan $x \geq 0$ *(Taha, 2007).*

2.7 Regresi Nonlinier

Asumsi kelinearan tidak selalu dapat dipenuhi dalam suatu analisis regresi. Hal inidapat juga dilihat dari letak titik-titik pada diagram pencar data (x,y) yang sangat menyimpang dari sebuah garis lurus. Banyak sekali model regresi nonlinear, dan hanya beberapa yang akan dibahas disini. Model polinom merupakan topik pertama yang kitabicarakan, sebelum membicarakan model-model lainnya, salah satunya model hiperbola.

1. Model Polinom Berderajat dua

Model polinom dinyatakan dalam bentuk umum

$$y = c_0 + c_1 + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k$$

Dimana c_i, $i = 0,1,2, \dots, k$ (yang harus bilangan bulat positif) adalah konstanta. Untuk lebih konkretnya pembahasan, model derajat dua akan menjadi pusat perhatian pada bagian berikut ini.

a perhatikan bahwa model polinom mempunyai hanya satu peubah dasar, u x. Untuk $k = 1$, kita peroleh regresi linear sederhana (garis lurus)

$$y = c_0 + c_1 x$$

Polinom derajat dua, yaitu untuk $k = 2$ mempunyai model kuadratik (parabola) dengan bentuk umum

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Dari model matematis diatas, kita dapat menulis model statistis parabola dalam bentuk

$$\mu_y | x = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$

Atau

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon$$

Dengan persamaan ini, huruf besar Y dan X menunjukan peubah statistik ; $\beta_0, \beta_1,$ dan β_2 menyatakan parameter yang tidak diketahui dan disebut koefisien regresi; $\mu_y|x$ menyatakan rata-rata Y dan X yag diberikan; dan ε menyatakan rata-rata Y dan X yang diberikan; dan ε menyatakan komponen kesalahan yang mewakili selisih antara respon teramati Y dan X respons rata-rata $\mu_y|x$ pada X.

Jika kita asumsikan model parabola diatas yang cocok untuk menjelaskan hubungan X dan Y, kita harus menentukan sebuah taksiran parabola tertentu yang paling sesuai dengan ditentukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Taksiran untuk model parabola kuadratik dapat ditulis dengan.

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$$

dengan koefisien-koefisien $b_0, b_1,$ dan b_2 ditentukan berdasarkan data hasil pengamatan. Jika $x_1 y_i,\ i = 1,2, \dots, n$ menyatakan data hasil pengamatan dalam sebuah sampel berukuran n, metode kuadrat terkecil memberikan nilai-nilai $b_0, b_1,$ dan b_2 dengan cara menyelesaikan persamaan normal berikut (Bachri, 2012).

$$\text{n}\, b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} y_i$$

2.8 Pengali Lagrange

Pengali *lagrange* digunakan untuk menyelesaikan permasalahan optimasi (penentuan nilai ekstrim), dimana terdapat kendala-kendala tertentu.

a. Satu pengali *lagrange*

Prinsip dari metode ini adalah mencari nilai ekstrim (optimasi) suatu fungsi tujuan $f(x_1, x_2)$.

maksimal/ minimal: $f(x_1, x_2)$ (2.6)

dengan kendala: $g(x_1, x_2) = 0$ (2.7)

Fungsi *lagrange*nya adalah

$$F(x_1, x_2, \lambda^*) = f(x_1, x_2)\lambda^* g(x_1, x_2) \qquad (2.8)$$

Parameter λ^*disebut pengali *lagrange*

b. Lebih dari satu pengali *lagrange*

Pengali *lagrange* melibatkan lebih dari satu kendala, maka penggunaan parameter yang dipilih dapat ditambahkan menjadi $\lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*$atau parameter lainnya.

Misalnya untuk memperoleh nilai ekstrim (optimasi) suatu fumgsi tujuan $f(x_1, x_2, x_3)$.

maksimal/ minimal: $f(x_1, x_2, x_3)$

dengan kendala: $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ dan

$h(x_1, x_2, x_3) = 0$

Fungsi *lagrange*

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda^* \mu) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1{}^* g(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2{}^* h(x_1, x_2, x_3) \qquad (2.9)$$

dengan syarat perlu :

lengan $i = 1,2,3$ (2.10a)

dengan $i = 1,2$ (2.10b)

Metode ini dapat diperluas untuk n variabel $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$dengan k kendala

$$\emptyset_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \emptyset_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \emptyset_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Fungsi *lagrange*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*, \dots, \lambda_k{}^*) = f + \lambda_1{}^*\emptyset_1 + \lambda_2{}^*\emptyset_2 + \cdots + \lambda_k{}^*\emptyset_k$$

dengan syarat perlu :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1{}^*} = 0, \frac{\partial F}{\lambda_2{}^*} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_k{}^*} = 0$$

Dengan $\lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*, \dots, \lambda_k{}^*$ adalah pengali *lagrange*.

Penyelesaian pengali *lagrange* mempunyai kondisi yang harus dipenuhi untuk mendapatkan penyelesaian optimal. Jika masalah memaksimalkan maka fungsi tujuan harus dalam bentuk konkaf dan setiap fungsi kendala berupa fungsi linear yang konveks, sedangkan jika masalah meminimalkan maka fungsi tujuan harus konveks dan setiap fungsi kendala berupa fungsi linear yang konveks (Amalia, 2009).

langkah-langkah penyelesaian pengali *lagrange* adalah sebagai berikut :

1. Membentuk fungsi *lagrange* yaitu fungsi yang memuat hasil penjumlahan atau selisih fungsi tujuan dan perkalian antara pengali *lagrange* dengan fungsi kendala. Berdasarkan Persamaan (2.9) maka fungsi *lagrange* yang terbentuk adalah :

$$F(x, y, \lambda_i{}^*) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^* g_i(X, Y)$$

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_i{}^*) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1{}^* g_i(x_1, x_2, x_3), i = 1,2,3$$

2. Membuat turunan pertama pada semua variabel sebagai syarat perlu meminimalkan fungsi *lagrange* dalam kondisi stasioner

i. $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i{}^*) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + \lambda_i{}^* \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0$

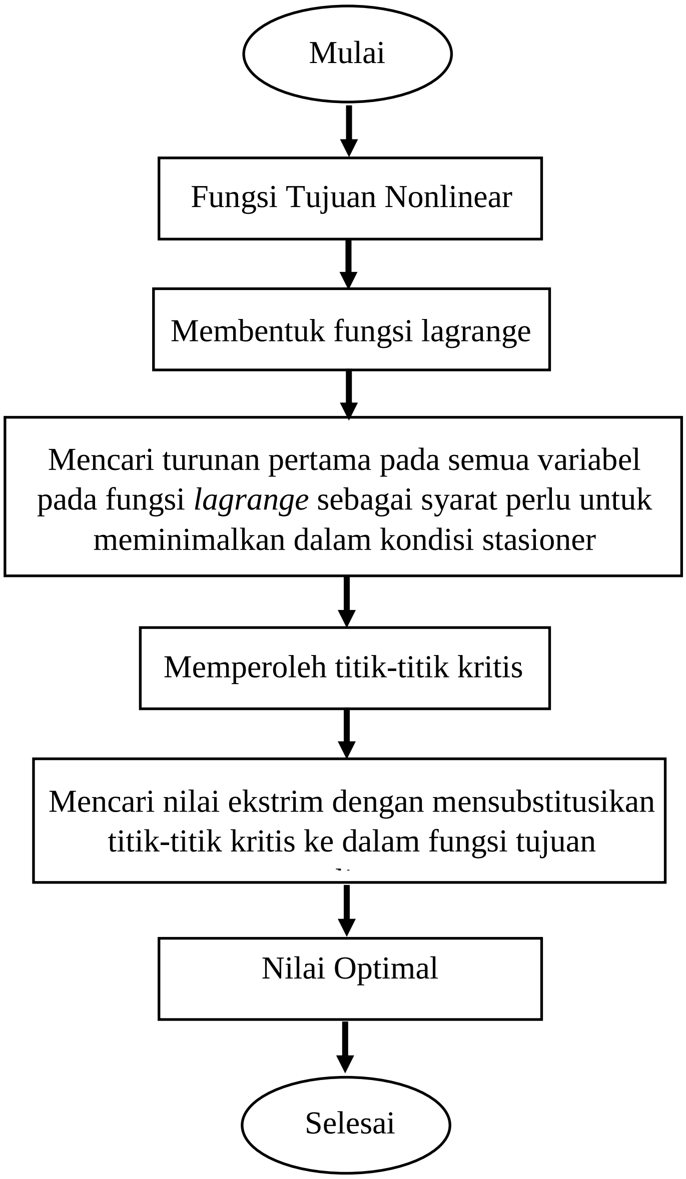
$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i{}^*) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) + \lambda_i{}^* \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i{}^*) = \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) + \lambda_i{}^* \frac{\partial g_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0$

iv. $\frac{\partial F}{\partial x_i{}^*}(x_1, x_2, x_3, \lambda_i{}^*) = g_i(x_1, x_2, x_3) = 0, i = 1,2,3$

3. Memperoleh titik-titik kritis dengan menyelesaikan persamaan yang diperoleh.
4. Mencari nilai ekstrim dengan mensubstitusikan titik-titik kritis ke dalam persamaan nonlinear (Purcell, 2010).

Langkah-langkah penyelesaian menggunakan pengali *lagrange* disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Bagan Alir Metode Pengali *Lagrange*

Contoh 2.7

Meminimalkan $2x^2 + 2y^2 + 20$ (2.11)

Dengan kendala: $x \geq 2$ (2.12a)

$y \geq 6$ (2.12b)

Penyelesaian:

Diperoleh turunan parsial kedua dari Persamaan (2.11) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4 > 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4 > 0$$

dan turunan pertama dari Persamaan (2.12a dan 2.12b) adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial fg(x,y)}{\partial y} = 1 > 0$$

karena $f''(x) > 0$ maka $f(x)$ merupakan fungsi konveks, sedangkan $g'(x) > 0$ merupakan fungsi yang konveks sehingga dapat diselesaikan menggunakan metode pengali *lagrange*.

Fungsi *lagrange* untuk masalah diatas adalah sebagai berikut

$$F(x, y, \lambda^*) = 2x^2 + 2y^2 + 20 + \lambda_1{}^*(2 - x) + \lambda_2{}^*(6 - y) \quad (2.13)$$

Pada titik stasioner turunan pertama pada setiap persamaan bernilai nol, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x - \lambda_1{}^* = 0$$

atau

$$\lambda_1{}^* = 4x \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial L}{} = 4y - \lambda_2{}^* = 0$$

x (2.15)

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1{}^*} = 2 - x = 0$$

atau

$$x = 2 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2{}^*} = 6 - y = 0$$

atau

$$y = 6 \tag{2.17}$$

Substitusi Persamaan (2.16) ke (2.14), dan Persamaan (2.17) ke (2.15) diperoleh

$$\lambda_1{}^* = 8, \lambda_2{}^* = 24 \tag{2.18}$$

Dari penyelesaian masalah tersebut diperoleh nilai

$$x = 2, y = 6, \lambda_1{}^* = 8, \lambda_2{}^* = 24 \tag{2.19}$$

Sehingga, nilai minimal fungsi dapat diperoleh dengan substitusi Persamaan (2.19) ke (2.11), diperoleh nilai minimal 100.

2.9 Kondisi Karush-Kuhn Tucker (KKT)

Pada tahun 1951 Kuhn Tucker menemukan suatu teknik optimasi yang dapat digunakan untuk mencari titik optimal dari suatu fungsi yang berkendala. baik fungsi dalam bentuk linear maupun nonlinear. Metode Karush Kuhn Tucker ini dapat digunakan untuk mencari solusi yang optimum tanpa memandang sifat dari fungsi tersebut apakah linier atau non linier.

Jika menghadapi masalah optimasi dalam bentuk:

Memaksimalkan/meminimalkan: $z = f(X)$ dengan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^t$ (2.20)

Dengan kendala: $g_i(X) \leq 0$

Atau $g_i(X) \geq 0$

Dengan $i = 1,2,3, \dots, m$

$X \geq 0$

banyak kendala lebih kecil atau sama dengan banyak variabel)

Pertama tuliskan kembali persyaratan-persyaratan yang tak negatif seperti $-x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, \dots, x_n,$ sehingga himpunan kendalanya adalah $m + n$ persyaratan ketidaksamaan yang masing-masing dengan tanda lebih kecil daripada atau sama dengan. Kemudian tambahkan variabel-variabel kurang $x_{n+1}^2, x_{n+2}^2, \dots, x_{n+m}^2$ berturut-turut pada ruas kiri dari kendala-kendala tadi, yang demikian merubah tiap-tiap ketidaksamaan menjadi suatu kesamaan. Variabel-variabel kendur (*slack variabels*) yang ditambahkan di sini berbentuk suku-suku kuadrat untuk menjamin bahwa mereka tak negatif. Kemudian bentuk fungsi lagrange:

$$L = F(X) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(X) - x_{n+1}^2] - \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_i [-x_i + x_{n+1}^2] \quad (2.21)$$

Untuk $\lambda_i, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n}$ adalah pengali-pengali Lagrange. Terakhir selesaikan Sistem persamaan

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, 2m + n) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, m + n) \quad (2.23)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1,2, \dots, m + n) \quad (2.24)$$

Persamaan-persamaan (2.22), (2.23), (2.24), di atas membentuk Persyaratan Karush-Kuhn-Tucker(KKT) untuk maksimal/minimal program linier dan non linier. Sehingga syarat Karush-Kuhn-Tucker untuk Kasus:

Minimumkan : $f = f(X)$ dengan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^t$

Dengan kendala: $g_j(X) \leq 0$

$= 1,2,3, \dots, m$

nyatakan dalam satu set pernyataan sebagai berikut:

$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{g_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2, \dots, n)$
(2.25)

$\lambda_j g_j = 0 \qquad (j = 1,2, \dots, m)$
(2.26)

$g_j \leq 0 \qquad (j = 1,2, \dots, m)$
(2.27)

$\lambda_j \geq 0 \qquad (j = 1,2, \dots, m)$
(2.28)

Catatan :

i. Jika permasalahannya adalah memaksimumkan bukan meminimumkan, maka $\lambda_j \leq 0$,

ii. jika kendalanya adalah $g_j \geq 0$, maka $\lambda_j \leq 0$,

iii. Jika permasalahannya adalah memaksimumkan dan jika kendalanya adalah $g_j \geq 0$, maka $\lambda_j \geq 0$ (Putra,2015).